

## 分散性媒質中の振動型の孤立波

京大 数理解研 川原琢治

### § 1. 序

分散性媒質中の有限振巾波の記述に重要な役割を果たす Korteweg-de Vries (K-dV) 方程式に関しては多くのことが調べられている。<sup>1)</sup> K-dV 方程式は非線形性と分散性とは弱いという仮定のもとに得られるのであるが、分散性を表わす階微分の項の係数が 0 または非常に小さくなり、さらに高次の分散効果を取り入れる必要が生じる場合がある。例えば、冷たい無衝突プラズマ中を伝わる磁気音波に関しては、外部磁場に対して伝播角が  $\theta_c = \tan^{-1}(\sqrt{m_i/m_e} - \sqrt{m_e/m_i})$  ( $m_i, m_e$  はイオンと電子の質量) のとき K-dV 方程式の 3 階微分の項の係数が 0 になり、5 階微分の分散項で置き換えられることが Kakutani-Ono<sup>2)</sup> により示されている。また、水の波に關しても、浅水重力波に表面張力の影響を考慮したとき、表面張力の影響を表わすパラメーターがある値をとるときに、プラズマの場合と同様なことが起こることが

Hasimoto<sup>3)</sup>により示されている。

以上のような critical な状況での波のふるまいを調べるためには、K-dV 方程式にさらに5階の微分項を付け加えた一般化された K-dV 方程式を取り扱う必要がある。

K-dV 方程式の定常解としては、孤立波解（いわゆる soliton）と波列解とが存在することがわかっているが、ここでは、一般化された K-dV 方程式の定常解のうちで孤立波解に対応する解を電子計算機による数値計算で求めた結果について報告する。

## §2. 一般化された K-dV 方程式

線形分散関係が波数  $k$  の小さい値に対して

$$\omega/k = c - \tilde{\alpha}k^2 - \tilde{\beta}k^4 + \dots, \quad (1)$$

のように表わされる非線形媒質において、 $k^2$  に比例する分散性とつりあう非線形性を仮定したとき、しばしば K-dV 方程式が得られる。ところで、いま  $\tilde{\alpha}$  と  $\tilde{\beta}$  とが同程度の大きさなら  $|k| \ll 1$  に対しては  $\tilde{\beta}k^4$  を無視できるので K-dV 方程式で十分である。しかし、 $\tilde{\alpha} \ll \tilde{\beta}$  の場合には  $|k| \ll 1$  といえども  $\tilde{\alpha}k^2$  と  $\tilde{\beta}k^4$  が同程度の大きさになり、この場合には  $\tilde{\beta}k^4$  の効果を取り入れる必要があり、次のように一般化された K-dV 方程式が得られる。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{3}{2}f \frac{\partial f}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} - \beta \frac{\partial^5 f}{\partial x^5} = 0, \quad (2)$$

$\alpha, \beta$  は  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$  と同符号の定数であり, 正負いずれの値もとりに得るが,  $f \rightarrow -f, x \rightarrow -x, t \rightarrow t$  のような符号変換に対して  $\alpha \rightarrow -\alpha, \beta \rightarrow -\beta$  とおけば (2) 式は不変になるので, 一般性を失うことなく  $\beta > 0$  のみに話を限ることができる。従って,  $\beta > 0, \alpha > 0$  または  $\beta > 0, \alpha < 0$  の場合を考えればよい。(1), (2) により,  $\beta > 0, \alpha > 0$  のときは, 負の分散 (位相速度  $\omega/k$  が  $k$  の増加するとき減少),  $\beta > 0, \alpha < 0$  のときは,  $\alpha, \beta$  の絶対値の大小により分散の正負が変わるので混合型の分散と呼ぶこととする。

以下では  $f(x, t) = f(\zeta), \zeta \equiv x - \lambda t, \lambda = \text{const.}$  (3) となるような定常進行波解を考える。また, soliton に対応するものを求めるので境界条件としては,  $\zeta \rightarrow -\infty$  で一様状態に漸近する条件をとる。

(3) を (2) に代入し, 境界条件を用いて,  $\zeta$  に関して 1 回積分すると,

$$\beta \frac{d^4 f}{d\zeta^4} - \alpha \frac{d^2 f}{d\zeta^2} + \lambda f - \frac{3}{4} f^2 = 0, \quad (4)$$

を得る。

境界条件は

$$f = \frac{df}{d\zeta} = \frac{d^2f}{d\zeta^2} = \frac{d^3f}{d\zeta^3} = 0, \quad \zeta \rightarrow -\infty \quad (4')$$

である。

(4) 式はさらにもう一回積分可能で

$$\beta \left\{ 2 \frac{df}{d\zeta} \frac{d^3f}{d\zeta^3} - \left( \frac{d^2f}{d\zeta^2} \right)^2 \right\} - \alpha \left( \frac{df}{d\zeta} \right)^2 + \lambda f^2 - \frac{1}{2} f^3 = 0. \quad (5)$$

となる。(5) 式は数値計算の際に利用される。

以上により、我々の問題は4階非線形常微分方程式(4)を境界条件(4')のもとに解くことに帰着される。

### § 3. 数値計算の方法

数値計算の便宜上次のような置きかえをする。

$$\left. \begin{aligned} f &= \lambda u, & \zeta &= 4 \sqrt{\frac{\beta}{|\lambda|}} z, \\ \varepsilon &= \sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta|\lambda|}} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$\varepsilon$  は5階微分の係数と3階微分の係数の相対的な大きさを表わすパラメーターになっている。

$\beta > 0$  に限られているので  $\alpha$  と  $\lambda$  の正負によって(4) 式は次の4つの場合に分けることができる。

$$\left. \begin{aligned} \text{(I)} \quad u'''' - \varepsilon u'' + u - 0.75 u^2 &= 0, \\ (\lambda > 0, \quad \alpha > 0) \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{(II)} \quad u'''' + \varepsilon u'' + u - 0.75 u^2 = 0, \\
 \quad \quad (\lambda > 0, \alpha < 0) \\
 \text{(III)} \quad u'''' - \varepsilon u'' - u + 0.75 u^2 = 0, \\
 \quad \quad (\lambda < 0, \alpha > 0) \\
 \text{(IV)} \quad u'''' + \varepsilon u'' - u + 0.75 u^2 = 0, \\
 \quad \quad (\lambda < 0, \alpha < 0)
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{(II)} \\ \text{(III)} \\ \text{(IV)} \end{array}} \right\} (7)$$

境界条件は(4)から

$$u = u' = u'' = u''' = 0 \quad z \rightarrow -\infty \quad (7')$$

である。但し、 $\prime$ は $\frac{d}{dz}$ を表わす。

境界条件(7')を考慮すると $z = -\infty$ 近傍での解として、(7)式を線形化したときの線形方程式の解をとることができる。

線形解は(7)の分類に対応して次のように求まる。

$$\text{(I) i) } u = K \exp\left(\frac{\sqrt{\varepsilon+2}}{2} z\right) \cos\left(\frac{\sqrt{2-\varepsilon}}{2} z + \theta\right), \quad (\varepsilon < 2)$$

$$\text{ii) } u = (A + Bz) \exp(z), \quad (\varepsilon = 2)$$

$$\text{iii) } u = A \exp\left(\frac{\sqrt{\varepsilon+2} + \sqrt{\varepsilon-2}}{2} z\right) + B \exp\left(\frac{\sqrt{\varepsilon+2} - \sqrt{\varepsilon-2}}{2} z\right), \quad (\varepsilon > 2)$$

$$\text{(II) i) } u = K \exp\left(\frac{\sqrt{2-\varepsilon}}{2} z\right) \cos\left(\frac{\sqrt{\varepsilon+2}}{2} z + \theta\right), \quad (\varepsilon < 2)$$

$$\text{ii) } z = -\infty \text{ で } u = 0 \text{ から立ち上る解なし。} \quad (\varepsilon \geq 2)$$

$$(III) \quad u = A \exp\left(\sqrt{\frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 4}}{2}} z\right), \quad (\text{すべての } \varepsilon)$$

$$(IV) \quad u = A \exp\left(\sqrt{\frac{-\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 4}}{2}} z\right), \quad (\text{すべての } \varepsilon)$$

ここで,  $K, \theta, A, B$  は任意定数.

(7)式の積分は  $u' = v, v' = w, w' = S$  と置き,  
( $u, v, w, S$ ) に対する1階連立方程式になおし, 通常の  
Runge-Kutta法を用いて行なう。例えば(I)の場合には

$$\left. \begin{aligned} u' &= v, & v' &= w, & w' &= S \\ S' &= -u + 0.75u^2 + \varepsilon w \end{aligned} \right\}$$

となる。

数値計算の出発値は線形解を利用するのであるが, 線形解  
の種類により次のようにとるのが便利である。

(I)-i) のように, 線形解が振動型の場合には  $z_0 \approx -\infty$  に  
おいて,

$$\left. \begin{aligned} u &= K \exp\left(\frac{\sqrt{\varepsilon+2}}{2} z_0\right) \cos\left(\frac{\sqrt{2-\varepsilon}}{2} z_0 + \theta\right), \\ v &= K \exp\left(\frac{\sqrt{\varepsilon+2}}{2} z_0\right) \cos\left(\frac{\sqrt{2-\varepsilon}}{2} z_0 + \theta + \theta_0\right), \\ w &= K \exp\left(\frac{\sqrt{\varepsilon+2}}{2} z_0\right) \cos\left(\frac{\sqrt{2-\varepsilon}}{2} z_0 + \theta + 2\theta_0\right), \\ S &= K \exp\left(\frac{\sqrt{\varepsilon+2}}{2} z_0\right) \cos\left(\frac{\sqrt{2-\varepsilon}}{2} z_0 + \theta + 3\theta_0\right), \\ \tan \theta_0 &= \sqrt{2-\varepsilon} / \sqrt{\varepsilon+2}, \quad z_0 \approx -\infty \end{aligned} \right\}$$

と表わせる。 $Q_0$ は $\varepsilon$ によってきまる定数であるから、 $\varepsilon_0$ ,  $K$ を適当に与えることにより、実質的なパラメターは $\theta$ だけになる。従って $\theta$ を0から $2\pi$ まで変化させて、 $\varepsilon = +\infty$ での境界条件をみたす解を捜せばよいことになる。

一方、(I)-ii), iii)の場合には、 $A, B$  2つのパラメターがあり、 $\varepsilon = -\infty$ からの積分は難しいので、 $\varepsilon = 0$ を積分の出発点とし、(5)式を用いて $\varepsilon = 0$ に因して対称な解を求める。(5)式に(6)と同様な変換を行い、 $\varepsilon = 0$ で $u' = u''' = 0$ を仮定すると、出発値としては、 $u = u_0$ ,  $v = 0$ ,  $w = -u_0(1 - u_0/2)^{\frac{1}{2}}$ ,  $s = 0$ . とすればよいことになる。パラメターを $u_0$  1個にすることが出来る。

(III), (IV) の場合は、線形解は最初からパラメター 1個だけで表わされているので、 $\varepsilon = -\infty$ からの積分は容易に実行できる。

#### § 4. 結果

前節の4つの場合に対する数値計算の結果は次の通りである。

- |        |                   |        |
|--------|-------------------|--------|
| (I) i) | $\varepsilon < 2$ | 振動型孤立波 |
| ii)    | $\varepsilon = 2$ | 単調孤立波  |
| iii)   | $\varepsilon > 2$ | 単調孤立波  |

(II) i)  $\varepsilon < 2$  振動型孤立波

ii)  $\varepsilon \geq 2$  解なし.

(III) 解なし

(IV)  $\varepsilon \geq 5$  に対して単調孤立波.

いくつかのパラメーターに対する解を図に示した。第1図は、位相空間  $(u, v, w, s)$  における解軌跡の  $(u, v)$  成分を、第2図は、それらに対応する波形を表わす。

以上は、(6) のような変換をした場合の話であるが、もとの方程式 (2) に戻って整理しなおすことにしよう。その前に、まず、 $K$ -dV 方程式の孤立波解について述べておく。

$K$ -dV 方程式 ((2) 式で  $\beta = 0$ ) の孤立波解は

$$f = 2\lambda \operatorname{sech}^2 \left\{ \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} (x - \lambda t) \right\}$$

で与えられ、 $\alpha > 0$  (負分散) のとき  $\lambda > 0$  で、圧縮型と呼ばれる孤立波が、 $\alpha < 0$  (正分散) のとき  $\lambda < 0$  で膨張型と呼ばれる孤立波が可能である。

我々の場合、 $\lambda > 0$ 、すなわち  $\alpha$  の正方向に伝わる波のみに注目して得られた結果を整理してみると、

$\beta > 0$  のとき  $\alpha \geq 2\sqrt{\beta\lambda}$  なら単調孤立波

$2\sqrt{\beta\lambda} > \alpha \geq 0$  なら振動型孤立波

$0 > \alpha > -2\sqrt{\beta\lambda}$  なら振動型孤立波

$\alpha \leq -2\sqrt{\beta\lambda}$  なら解なし.



すなわち、 $\alpha$  が大きいと単調孤立波になり、逆に  $\beta$  が相対的に大きくなれば振動型孤立波が可能になる。また、混合型分散の場合には、 $\alpha \leq -2\sqrt{\beta\lambda}$  に対しては、解は存在しない。

$\beta < 0$  のとき、 $\alpha \geq 5\sqrt{-\beta\lambda}$  なら単調孤立波が可能になる。

以上からわかるように  $\lambda > 0$  の解が存在するのは、分散が負の場合であり、これは  $f = \lambda u$  の関係から、 $K-dV$  の場合の圧縮型の波に対応することがわかる。符号反転により  $\lambda < 0$  の場合にも同様な議論ができ、分散が正なら膨張型の解が存在することがわかる。

分散の正負に対応して、膨張型と圧縮型の波が可能で、それらは、さらに、3階微分と5階微分の項の係数の相対的な大きさにより、単調孤立波と振動型孤立波のいずれかになる。

§1 で述べた磁気流体波や水の波の場合には、分散項の大きさ、分散の正負により、ここで得られたいずれかの波が可能になると考えられる。

しかし、ここで得られた振動型の孤立波等が、 $K-dV$  方程式の場合の soliton のように安定であるかどうかは、まだわかっていない。

## 引用文献

- 1) A. Jeffrey and T. Kakutani : SIAM Rev. J.  
N. J. Zabusky: Proc. Symp. Nonlinear Partial  
Differential Equations ed. W. Ames  
(Academic Press, New York, 1967) P. 223.  
角谷典彦: "分散性媒質中の非線形波動"  
日本物理学会誌. 27(1971) 1月号.
- 2) T. Kakutani and H. Ono:  
J. Phys. Soc. Japan 26(1969) 1305.
- 3) H. Hasimoto: 岩波"科学" 40(1970) 401.

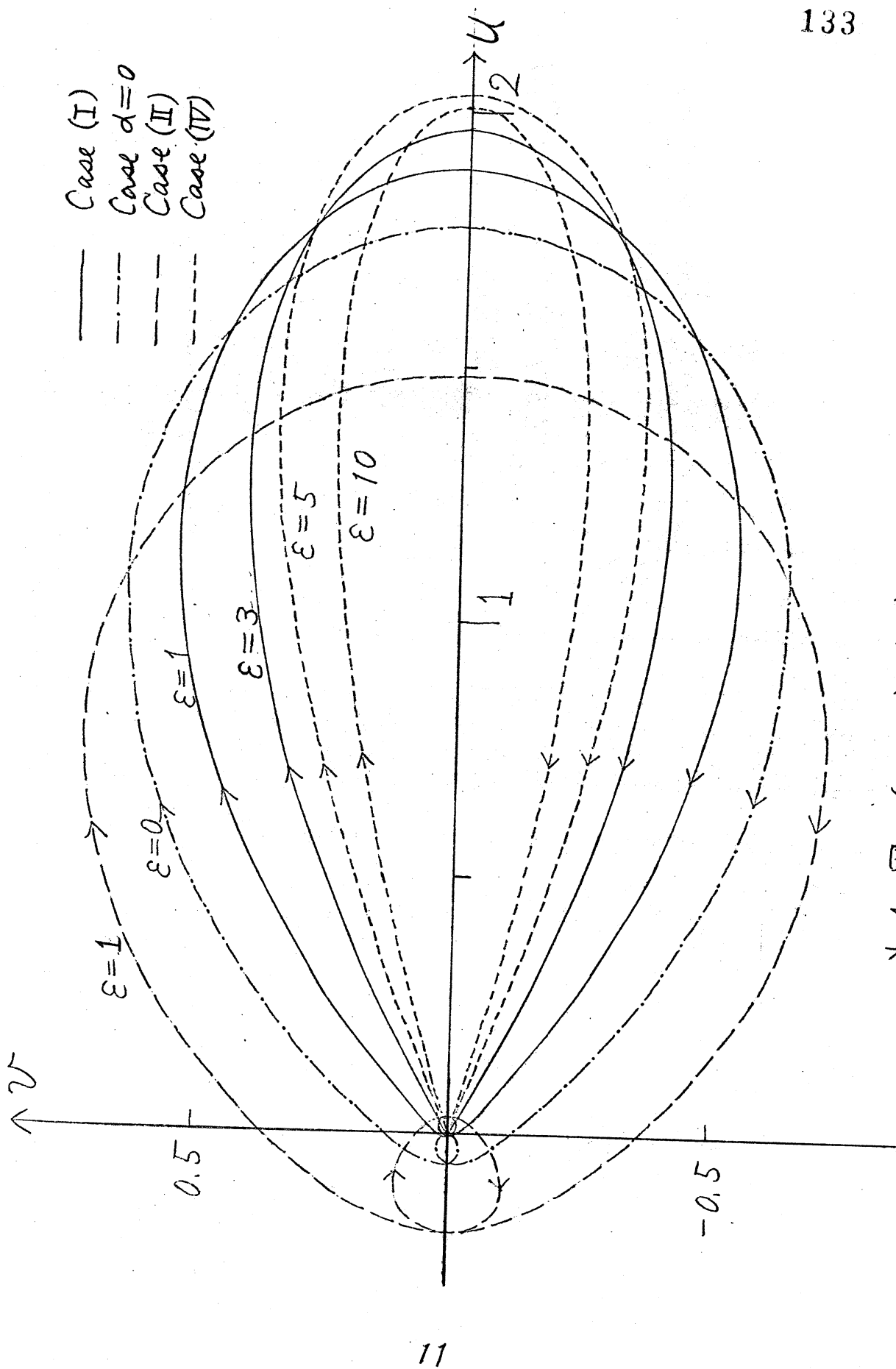


图 1 (u, v)-成分

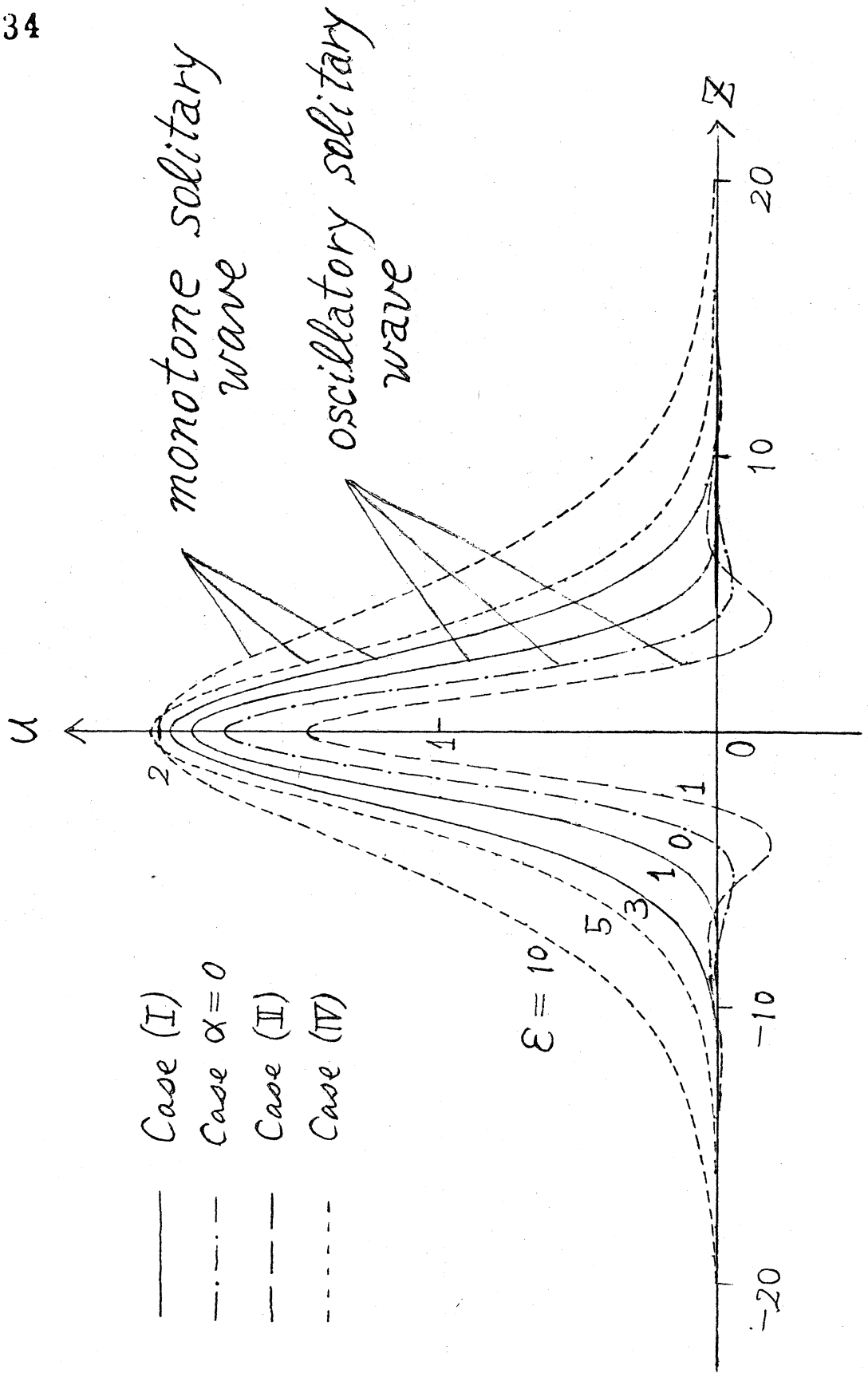


图 2 孤立波の波形