数理解析研究所講究録
第 164 巻 1972 年 135-150

重力波の非線型変調 *

京大 理　小野廣明

§1. 序

非線型分散系における顕著な性質として非線型効果と分散効果のつり合による有限振巾の定常進行波の存在することが知られている。重力波の場合、そのような波列の安定性や変調が Benjamin & Feir[1), Benjamin[2)そして Whitham[3)によって詳しく調べられた。そしてある種の攪乱に対して深い水の場合波列は不安定であることが示された。しかし彼等の理論ではそれぞれの制約のため不安定による結果を調べることはできなかった。

ところが最近 Chu & Mei[4) は Whitham の変調に対する方程式に分散項を加えることにより不安定攪乱の非線型発展を記述できる方程式系を導いた。しかしながら具体的な結果[5)は無限深さの場合に限られている。

ここでは任意の一様な深さの水の上にたつ波列の一般的な

変調をTaniuti & Yajimaの方法[6]により考える。そして基礎方程式系が簡単で扱い易い単一の方程式に還元できることを示す。同様の型の方程式(nonlinear Schrödinger方程式と呼ばれている)は既にいろいろの非線型分散系の研究においても得られている[7,8]。この方程式の非線型平面波解はStokes wave trainに対応していること、そして方程式の形の単純さにもかかわらずBenjamin[2], Whitham[3]によって得られた結果をすべて含み、さらに不安定モードの成長をも非線型変調過程の特別の場合としてこの方程式は記述できることを示す。またこの同じ方程式は浅い水の極限でKorteweg-de Vries方程式の弱いcnoidal wave解の漸近的な舞いをも支配していることがわかる。

§2　Nonlinear Schrödinger方程式の導出

一様な深さh_0の2次元非圧縮性完全流体層の自由表面上に生じる重力波の基礎方程式は速度ポテンシャル$\phi(x,y,t)$に対する調和方程式である。

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0 \quad ; -h_0 \leqq y \leqq \eta(x,t) \tag{2.1}$$

境界条件は、

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=0 \quad ; y=-h_0 \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x} \quad ; y=\eta(x,t) \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2\right\}+g\eta=0 \quad ; y=\eta(x,t) \tag{2.4}$$

ここで、x, y, t はそれぞれ水平方向，鉛直方向および時間座標、$\eta(x,t)$ は静止しているときの自由表面 $y=0$ から測った攪乱されたときの自由表面をあらわす。g は重力定数。

方程式系(2.1)～(2.4)を線型化し $\exp\{i(kx-\omega t)\}$ に比例する正弦波を仮定するとよく知られた線型分散関係式を得る。

$$\omega^2=kg\tanh kh。 \tag{2.5}$$

ここで ω と k はそれぞれ線型波の振動数と波数である。

これから線型化の極限で k_0, ω_0 なる波数と振動数をもつ波列のゆっくりした非線型変調を考える。k_0, ω_0 は1オーダーと仮定する。長い時間に渡って正しい解を得るために次のような座標の stretching 変換を導入する。[6]

$$\xi=\varepsilon(x-\lambda_0 t)\ , \quad \tau=\varepsilon^2 t \tag{2.6}$$

ε は分散の弱さを示す小さいパラメータで、$\lambda_0\left(=\frac{\partial \omega_0}{\partial k_0}\right)$ は線型波の群速度である。

一方弱い非線型変調を考えるので従属変数は ε の級数で展開できると仮定する。この意味で ε はまた非線型性の測度とみることができる。

$$\phi=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\sum_{m=-n}^{n}\phi^{(n,m)}(\xi,y,\tau)\exp\{im(k_0x-\omega_0 t)\} \tag{2.7}$$

$$\eta=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\sum_{m=-n}^{n}\eta^{(n,m)}(\xi,\tau)\exp\{im(k_0x-\omega_0 t)\} \tag{2.8}$$

ここで $\phi^{(n,m)}$, $\eta^{(n,m)}$ は基本の波列の振巾と位相の変調をあらわす複素振巾である。ϕ, η は実関数だから $\overline{\phi^{(n,m)}}=\phi^{(n,-m)}$, $\overline{\eta^{(n,m)}}=\eta^{(n,-m)}$ という式が成り立つ。$-$ は複素共役を示す。

方程式系(2.1)~(2.4)に(2.6)~(2.8)を代入して異ったオーダーと調和成分を分けると $\phi^{(n,m)}$, $\eta^{(n,m)}$ に対する線型常微分方程式系を得る。**

$$\phi_{yy}^{(n,m)}-m^2k_0^2\phi^{(n,m)}=A^{(n,m)}(\xi,y,\tau) \quad : -h_0\leqq y\leqq 0 \qquad (2.9)$$

$$\phi_{y}^{(n,m)}=0 \quad : y=-h_0 \qquad (2.10)$$

$$\phi_{y}^{(n,m)}+i\omega_0 m\eta^{(n,m)}=B^{(n,m)}(\xi,\tau) \quad : y=0 \qquad (2.11)$$

$$-im\omega_0\phi^{(n,m)}+g\eta^{(n,m)}=C^{(n,m)}(\xi,\tau) \quad : y=0 \qquad (2.12)$$

(2.11)と(2.12)から $\eta^{(n,m)}$ を消去すれば

$$g\phi_{y}^{(n,m)}-m^2\omega_0^2\phi^{(n,m)}=gB^{(n,m)}-im\omega_0C^{(n,m)} \quad : y=0 \qquad (2.13)$$

$A^{(n,m)}$, $B^{(n,m)}$, $C^{(n,m)}$ は n について低次の量を含む。(具体形は付録にあげる。)

方程式系(2.9)~(2.10)は y について積分できるがそれは更に(2.13)を満さなければならない。このとき $\eta^{(n,m)}$ は(2.12)より求まる

** ϕ, η は ε について展開してるので $y=\eta(x,t)$ における境界条件は $y=0$ でのもので置きかえることができる。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\phi}{\partial y}-\dfrac{\partial\eta}{\partial t}-\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\dfrac{\partial\phi}{\partial x}+\eta\dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\dfrac{1}{2}\eta^2\dfrac{\partial^3\phi}{\partial y^3}-\eta\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}+\cdots \quad : y=0 \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+g\eta+\eta\dfrac{\partial^2\phi}{\partial t\partial y}+\dfrac{1}{2}\eta^2\dfrac{\partial^3\phi}{\partial t\partial y^2}+\eta\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}+\eta\dfrac{\partial\phi}{\partial y}\dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\cdots \\ \quad : y=0 \end{cases}$$

具体的には$m=0$に対して

$$\phi_y^{(n,0)} = \int_{-h_0}^{y} A^{(n,0)}\,dy \quad : -h_0 \leqq y \leqq 0 \tag{2.14}$$

$$\int_{-h_0}^{0} A^{(n,0)}\,dy = B^{(n,0)} \quad : y=0 \tag{2.15}$$

$$\eta^{(n,0)} = \frac{1}{g} C^{(n,0)} \quad : y=0 \tag{2.16}$$

$m \neq 0$ に対しては、

$$\phi^{(n,m)} = \psi^{(n,m)} \frac{\cosh mk_0(y+h_0)}{\cosh mk_0h_0} + \frac{1}{mk_0}\Big[\sinh mk_0(y+h_0) \times \int_{-h_0}^{y} A^{(n,m)} \cosh mk_0(y+h_0)\,dy - \cosh mk_0(y+h_0) \int_{-h_0}^{y} A^{(n,m)} \sinh mk_0(y+h_0)\,dy\Big] \quad : y=0 \tag{2.17}$$

$$\left(k_0 \sinh mk_0h_0 - m\frac{\omega_0}{g}\cosh mk_0h_0\right)\left\{m\psi^{(n,m)} - \frac{1}{k_0}\int_{-h_0}^{0} A^{(n,m)} \times \sinh mk_0(y+h_0)\,dy\right\} + \left(k_0 \cosh mk_0h_0 - m\frac{\omega_0}{g}\sinh mk_0h_0\right) \times \frac{1}{k_0}\int_{-h_0}^{0} A^{(n,m)} \cosh mk_0(y+h_0)\,dy = B^{(n,m)} - im\frac{\omega_0}{g} C^{(n,m)} \quad : y=0 \tag{2.18}$$

$$\zeta^{(n,m)} = \frac{1}{g}\left(im\omega_0 \psi^{(n,m)} + C^{(n,m)}\right) \quad : y=0 \tag{2.19}$$

ここで$\psi^{(n,m)}$はξとτだけの関数である。これより$(n,m)=(1,0),(1,1),(2,0),(2,1),(2,2)$に対する$\phi^{(n,m)}$, $\zeta^{(n,m)}$は$\psi^{(1,1)}$であらわすことができる。速度ポテンシャルに対しては

$\phi^{(1,1)} = \psi^{(1,1)} \cosh k_0(y+h_0)/\cosh k_0h_0$, $\quad \phi_\xi^{(1,0)} = \beta_1 |\psi^{(1,1)}|^2$

$$\phi^{(2,0)}=0\ ,\quad \phi^{(2,1)}=i\beta_2\psi_\xi^{(1,1)}\cosh k_0(y+h_0)/\cosh k_0h_0$$

$$\phi^{(2,2)}=i\beta_3\psi^{(1,1)2}\cosh 2k_0(y+h_0)/\cosh 2k_0h_0 \tag{2.20}$$

ここで

$$\begin{cases}\beta_1=\dfrac{\lambda_0(\omega_0^2/g^2-k_0^2)-2\omega_0k_0}{gh_0-\lambda_0^2}\ ,\quad \beta_2=-\dfrac{1}{k_0}\{k_0(y+h_0)\tanh k_0(y+h_0)-k_0h_0\tanh k_0h_0\}\\[2mm] \beta_3=\dfrac{3\omega_0(\omega_0^4/g^2-k_0^2)}{2(k_0g\tanh 2k_0h_0-2\omega_0^2)}\end{cases} \tag{2.21}$$

一方自由表面$\eta^{(n,m)}$に対しては、

$$\eta^{(1,0)}=0\ ,\quad \eta^{(1,1)}=i\gamma_1\psi^{(1,1)}\ ,\quad \eta^{(2,0)}=\gamma_2|\psi^{(1,1)}|^2$$

$$\eta^{(2,1)}=\gamma_3\psi_\xi^{(1,1)}\ ,\quad \eta^{(2,2)}=\gamma_4\psi^{(1,1)2} \tag{2.22}$$

ここで

$$\begin{cases}\gamma_1=\omega_0/g\ ,\quad \gamma_2=\dfrac{1}{g}(\lambda_0\beta_1+\omega_0^4/g^2-k_0^2)\ ,\quad \gamma_3=\lambda_0/g\\[2mm] \gamma_4=\dfrac{1}{g}\left\{-\dfrac{1}{2}(3\omega_0^4/g^2-k_0^2)-\dfrac{3\omega_0^2(\omega_0^4/g^2-k_0^2)}{k_0g\tanh 2k_0h_0-2\omega_0^2}\right\}\end{cases} \tag{2.23}$$

これに対して$\psi^{(1,1)}$は$(n,m)=(3,1)$に対する(2.18)より次の方程式を満さねばならない。

$$i\frac{\partial\psi^{(1,1)}}{\partial\tau}+\mu\frac{\partial^2\psi^{(1,1)}}{\partial\xi^2}+\nu|\psi^{(1,1)}|^2\psi^{(1,1)}=0 \tag{2.24}$$

ここで

$$\mu=\frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega_0}{\partial k_0^2}\ , \tag{2.25}$$

$$\nu=-\frac{k_0^4}{4\omega_0}\left\{\frac{9\tanh^4k_0h_0-10\tanh^2k_0h_0+9}{\tanh^2k_0h_0}+\frac{4\frac{\omega_0^2}{k_0^2}+4\lambda_0\frac{\omega_0}{k_0}\mathrm{sech}^2k_0h_0+gh_0\mathrm{sech}^4k_0h_0}{\lambda_0^2-gh_0}\right\} \tag{2.26}$$

μ,νはk_0h_0の実関数であるが(2.5)より明らかなようにμはいつでも負である。それに対してνはk_0h_0が減少するにつれ

$k_0h_0=1.363$ を境いにして負から正に符号をかえる。この形の方程式は nonlinear Schrödinger 方程式と呼ばれていて、既にいろいろの分散媒質に対して得られている。[7,8] μ, ν が複素数となったような一般的な方程式が平面 Poiseuille 流れの非線型安定性の研究において Stewartson & Stuart[9] によって得られている。

もし複素振巾 $\psi^{(1,1)}$ のかわりに2つの実関数 A, Ω を用いるなら次のような連立方程式を得る。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A^2}{\partial \tau}+\dfrac{\partial}{\partial \xi}(A^2\Omega)=0 & (2.27) \\ \dfrac{\partial \Omega}{\partial \tau}+\Omega\dfrac{\partial \Omega}{\partial \xi}-2\mu\nu\dfrac{\partial A^2}{\partial \xi}-2\mu^2\dfrac{\partial}{\partial \xi}\left(\dfrac{1}{A}\dfrac{\partial^2 A}{\partial \xi^2}\right)=0 & (2.28) \end{cases}$$

ただし $\psi^{(1,1)}=A\exp\{i\int \Omega/2\mu \, d\xi\}$ (2.29)

これらは $k_0h_0\to\infty$ の極限で Chu & Mei[5] によって得られた方程式と本質的に同じものとなる。

§3 nonlinear Schrödinger 方程式(2.24)のいくつかの解

3−1 非線型平面波解

方程式(2.24)は非線型平面波をあらわす次のような解をもつことが知られている。[6,10]

$$\psi^{(1,1)}=\psi_0\exp\{i(\alpha\tau-K\xi)\}, \qquad (3.1)$$

ただし $\psi_0=$一定, $\alpha=-\mu K^2+\nu|\psi_0|^2$ (3.2)

この解がもとの物理空間で何をあらわすかを考える。特に

$K=0$, $\psi_0=a/(2i\gamma_1)$ ここで a は実定数ととると(2.22)は

$$\eta^{(1,0)}=0,\ \eta^{(1,1)}=\frac{a}{2}e^{i\alpha_0\tau},\ \eta^{(2,0)}=-\frac{\gamma_2}{4\gamma_1^2}a^2,\ \eta^{(2,1)}=0$$

$$\eta^{(2,2)}=-\frac{\gamma_4}{4\gamma_1^2}a^2e^{2i\alpha_0\tau} \tag{3.3}$$

ここで $\alpha_0=\dfrac{\nu}{4\gamma_1^2}a^2$ (3.4)

(3.3)のすべての成分をとり第2近似までで Stokes wave train をうる。

$$\eta=\varepsilon a\cos\zeta+\varepsilon^2a^2\left(\frac{\gamma_2}{4\gamma_1^2}-\frac{\gamma_4}{4\gamma_1^2}\cos 2\zeta\right)+O(\varepsilon^3) \tag{3.5}$$

ここで $\zeta=k_0x-(\omega_0-\varepsilon^2\alpha_0)t$ (3.6)

$\omega\equiv\omega_0-\varepsilon^2\alpha_0$ は、波の伝播方向への平均の流れ($\phi_\xi^{(1,0)}$)を含んだ Stokes の非線型分散関係式に他ならない。また $K=0$ とおいたのでこの解に対しては(2.24)の分散項は本質的な役割を果してないことを注意しておく。

3−2 平衡解

上でのべた平面波解の他に(2.24)は、非線型効果と分散効果の動力学的つり合いによる別のタイプの解をもつ。これを平衡解と呼ぶことにする。

$$\psi^{(1,1)}=\hat{\psi}(\xi)\exp i\alpha\tau \tag{3.7}$$

ここで α＝一定，$\hat{\psi}(\xi)$＝実数 *** (3.8)

*** $\hat{\psi}(\xi)$ が複素数であることを許せば、もう少し一般的な平衡解を得る。[5] しかしながらあとの議論のためには、実数と選ぶことで十分である。

◎ $\mu\nu>0$ のとき

$$\hat{\varphi}(\xi)=A_0\,\mathrm{dn}\left\{A_0\sqrt{\frac{\nu}{2\mu}}\,\xi\right\} \tag{3.9}$$

ただし母数 s は、 $s^2=2-\frac{2\alpha}{\nu}/A_0^2$ (3.10)

◎ $\mu\nu<0$ のとき

$$\hat{\varphi}(\xi)=A_0\,\mathrm{sn}\left\{\frac{A_0}{s}\sqrt{-\frac{\nu}{2\mu}}\,\xi\right\} \tag{3.11}$$

ただし母数 s は、 $s^2=A_0^2/\left(\frac{2\alpha}{\nu}-A_0^2\right)$ (3.12)

§4. 平面波解(3.5)の線型安定性

Stokes wave の安定性は、最初に Benjamin & Feir により解析的かつ実験的に調べられた。ここでは、不安定モードの時間発展が(2.24)に支配される一般的な変調過程の特別の場合として含まれることを示す。

Stokes wave を再現するために(3.1)で $K=0$, $\alpha=\alpha_0$, $\psi_0=a/(2i\gamma_1)$ ととる。このとき

$$\psi^{(1,1)}=(\psi_0+\hat{\varepsilon}\psi)\exp i\{\alpha_0\tau+\hat{\varepsilon}\theta\} \tag{4.1}$$

で与えられる攪乱された Stokes wave を考える。ただし ψ,θ は攪乱をあらわす実関数で $\hat{\varepsilon}$ は小さなパラメーターである。これを(2.24)に代入して $\hat{\varepsilon}$ について線型化すると、

$$\begin{cases}\psi_\tau+\mu|\psi_0|\theta_{\xi\xi}=0 & (4.2)\\ \theta_\tau-2\nu|\psi_0|^2\psi-\mu\psi_{\xi\xi}=0 & (4.3)\end{cases}$$

これらは常係数の線型微分方程式系であるから次のような形の解を仮定できる。

$$\begin{pmatrix}\psi\\ \theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{\psi}\\ \hat{\theta}\end{pmatrix}\exp\{i(\hat{k}\xi-\hat{\omega}\tau)\}+\text{c.c.} \tag{4.4}$$

ここで$\hat{\psi}$, $\hat{\theta}$は定数でc.c.は第一項の複素共役。(4.2), (4.3)が有意な解をもつための条件から分散関係をうる。

$$\hat{\omega}^2=\mu^2\hat{k}^2(\hat{k}^2-2\nu/\mu|\psi_0|^2) \tag{4.5}$$

この式から$\nu\mu\leqq 0$なら任意の$\hat{k}$の値に対して$\hat{\omega}$はいつも実数であるから(3.5)であらわされるStokes waveは中立安定である。一方$\mu\nu>0$なら$\hat{\omega}$は

$$\hat{k}<\sqrt{2\nu/\mu}\,|\psi_0| \tag{4.6}$$

のような攪乱に対して虚数となり攪乱は指数関数的に成長する。この意味で(3.5)であらわされるStokes waveは上のような変調的な攪乱に対して不安定であり、その最大成長率はδ_{max}であらわすと次のようになる。

$$\delta_{max}=|\nu\psi_0|,\qquad \hat{k}=\sqrt{\nu/\mu}\,|\psi_0|\text{に対して} \tag{4.7}$$

§2におけるμ, νについての議論を思い出すと、上の結果は正にBenjamin[2], Whitham[3]によって得られたものを再現していることがわかる。ここでの理論の場合には、nonlinear Schrödinger方程式(2.24)にもどれば、このような不安定なモードのそれからの時間発展を線型理論が使えなくなる段階においてさえも調べることができる。たとえば$s=1$のとき平衡解(3.9)は孤立波になるが、

$$\hat{\Phi}(\xi)=\sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda}}\,\mathrm{sech}\left\{\sqrt{\frac{\alpha}{\mu}}\,\xi\right\} \tag{4.8}$$

この波の巾は$\sqrt{\mu/\alpha}$である。これは、$\alpha=\alpha_0$のとき最大成長率をもった不安定モードの波長と一致している。この事実は、不安定なStokes waveは結局上の孤立波に変形されるだろうという予想にわれわれを導く。実際、Chu & Mei[5], Karpman & Kruskhal[10]によってなされた数値計算は、この予想を強く支持している。

§5 浅い水の極限でのnonlinear Schröodinger方程式 (2.24)

方程式(2.24)の広い適用性を示すために浅い水の極限での方程式を考えてみる。h_0を1オーダーに保って$k_0h_0\to 0$とすると(2.24)のμとνとはそれぞれ次のようになる。

$$\left\{\begin{aligned}\mu_s&=-\frac{\sqrt{gh_0}\,k_0h_0^2}{2} &(5.1)\\ \nu_s&=\frac{9k_0}{4\sqrt{gh_0}\,h_0^2} &(5.2)\end{aligned}\right.$$

このとき(3.3)で与えられる非線型平面波は

$$\eta^{(1,0)}=0,\quad \eta^{(1,1)}=\frac{a}{2}e^{i\alpha_s\tau},\quad \eta^{(2,0)}=-\frac{3a^2}{4k_0^2h_0^3},\quad \eta^{(2,1)}=0,$$

$$\eta^{(2,2)}=\frac{3a^2}{8k_0^2h_0^3}e^{2i\alpha_s\tau} \tag{5.3}$$

ここで
$$\alpha_s=\frac{9\sqrt{gh_0}\,a^2}{16k_0h_0^4} \tag{5.4}$$

従って(3.5)は次のようになる。

$$\eta = \varepsilon a \cos\zeta_s + \varepsilon^2 a^2 \frac{3}{4k_0^2 h_0^3}(\cos 2\zeta_s - 1) + O(\varepsilon^3), \quad (5,5)$$

ここで $\zeta_s = k_0 x - (\omega_0 - \varepsilon^2 \alpha_s)t, \quad \varepsilon < (k_0 h_0)^3 << 1 \quad (5,6)$

しかる一方浅い水の波はKorteweg-de Vries方程式で記述されることが知られている[11]。

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + \sqrt{gh_0}\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{h_0}}\eta\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\sqrt{gh_0^5}}{6}\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3} = 0 \quad (5,7)$$

これはcnoidal waveと呼ばれている定常周期解をもつ

$$\eta = \varepsilon a \eta_\infty + \frac{2\varepsilon a}{s^2}\mathrm{dn}^2 v \quad (5,8)$$

ここで

$$v = \sqrt{\frac{\varepsilon a}{6}}(x - Vt), \quad V = \sqrt{gh_0} + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{h_0}}\left\{\varepsilon a \eta_\infty + \frac{2\varepsilon a}{3}\left(\frac{2}{s^2} - 1\right)\right\}$$

また平均の深さを $\bar{\eta}$ とすると (5,9)

$$\bar{\eta} = \varepsilon a \eta_\infty + \frac{2\varepsilon a}{s^2}\frac{E}{K} \quad (5,10)$$

ここで s^2, K, E はそれぞれ楕円関数dnの母数，第一種第二種の完全楕円積分である。

$$k_0^2 = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon a}{s^2 h_0^3}\frac{\pi^2}{K^2}, \quad \bar{\eta} = -\frac{3}{4}\frac{\varepsilon^2 a^2}{h_0^3 k_0^2} \quad (5,11)$$

とおいて(5,8)をsの小さい値に対して展開すると(5,5)を得る。これによって非線型平面波解は浅い水の極限で弱いcnoidal waveに対応していることがわかる。$\mu = \mu_s$, $\nu = \nu_s$ であるnonlinear Schrödinger方程式はKorteweg-de Vries方

程式(5.7)から§2で用いた方法により直接導くこともできることも注意しておく。そのようなやり方は固体中のheat pulseの研究においてTappert & Varma[8]が採用している。§4で論じた安定性の判定条件に従えば $\mu_s \nu_s < 0$ であるから弱いcnoidal waveは変調的な微少攪乱に対しては安定である。ここで考えた弱いcnoidal waveを補うような場合、すなわちsolitonについては、伝統的な線型安定理論によってJeffrey & Kakutani[12]が任意の波数の攪乱に対して中立安定であることを示している。また任意の母数 s の値に対するcnoidal waveの漸近的な振舞いについてはBerezin & Karpman[13]がWhithamの定式化から出発して調べている。しかし彼等は§1で注意したように(2.29)の末項で示される分散項は考えなかった。

最後に内容について議論し、批評して下さった角谷典彦先生に感謝の意を表します。

---

* 研究の途中、橋本英典氏(東大宇宙研)が同様の問題を扱っておられることを角谷典彦先生の注意により知りました。最終的な研究結果は、共同の形でまとめることが予定されていることを断っておきます。

付録　$A^{(n,m)}, B^{(n,m)}, C^{(n,m)}$の具体形

§2にあらわれた$A^{(n,m)}, B^{(n,m)}, C^{(n,m)}$の具体形は次の通りである。

$$A^{(n,m)}=-2imk_0\phi_\xi^{(n-1,m)}-\phi_{\xi\xi}^{(n-2,m)} \tag{A-1}$$

$$\begin{aligned}
B^{(n,m)}=\ &\eta_\tau^{(n-2,m)}-\lambda_0\eta_\xi^{(n-1,m)}-\langle\eta^{(n',m')}\phi_{yy}^{(n'',m'')}\rangle_{n,m}\\
&+\langle\eta_\xi^{(n',m')}\phi_\xi^{(n'',m'')}\rangle_{n-2,m}+ik_0\langle m'\eta^{(n',m')}\phi_\xi^{(n'',m'')}\rangle_{n-1,m}\\
&+ik_0\langle m''\eta_\xi^{(n',m')}\phi^{(n'',m'')}\rangle_{n-1,m}-k_0^2\langle m'm''\phi^{(n',m')}\eta^{(n'',m'')}\rangle_{n,m}\\
&-\frac{1}{2}\langle\eta^{(n',m')}\eta^{(n'',m'')}\phi_{yyy}^{(n''',m''')}\rangle_{n,m}+\langle\eta^{(n',m')}\eta_\xi^{(n'',m'')}\phi_{\xi y}^{(n''',m''')}\rangle_{n-2,m}\\
&+ik_0\langle m'''\eta^{(n',m')}\eta_\xi^{(n'',m'')}\phi_y^{(n''',m''')}\rangle_{n-1,m}\\
&+ik_0\langle m''\eta^{(n',m')}\eta^{(n'',m'')}\phi_{\xi y}^{(n''',m''')}\rangle_{n-1,m}\\
&-k_0^2\langle m'',m'''\eta^{(n',m')}\eta^{(n'',m'')}\phi_y^{(n''',m''')}\rangle_{n,m}
\end{aligned} \tag{A-2}$$

$$\begin{aligned}
C^{(n,m)}=\ &-\phi_\tau^{(n-2,m)}+\lambda_0\phi_\xi^{(n-1,m)}-\langle\eta^{(n',m')}\phi_{\tau y}^{(n'',m'')}\rangle_{n-2,m}\\
&+i\omega_0\langle m''\eta^{(n',m')}\phi_y^{(n'',m'')}\rangle_{n,m}+\lambda_0\langle\eta^{(n',m')}\phi_{\xi y}^{(n'',m'')}\rangle_{n-1,m}\\
&-\frac{1}{2}\langle\phi_\xi^{(n',m')}\phi_\xi^{(n'',m'')}\rangle_{n-2,m}-\frac{1}{2}ik_0\langle m''\phi_\xi^{(n',m')}\phi^{(n'',m'')}\rangle_{n,m}\\
&-\frac{1}{2}ik_0\langle m'\phi^{(n',m')}\phi_\xi^{(n'',m'')}\rangle_{n-1,m}+\frac{1}{2}k_0^2\langle m'm''\phi^{(n',m')}\phi^{(n'',m'')}\rangle_{n,m}\\
&-\frac{1}{2}\langle\phi_y^{(n',m')}\phi_y^{(n'',m'')}\rangle_{n,m}-\frac{1}{2}\langle\eta^{(n',m')}\eta^{(n'',m'')}\phi_{\tau yy}^{(n''',m''')}\rangle_{n-2,m}\\
&+\frac{1}{2}i\omega_0\langle m'''\eta^{(n',m')}\eta^{(n'',m'')}\phi_{yy}^{(n''',m''')}\rangle_{n,m}\\
&+\frac{\lambda_0}{2}\langle\eta^{(n',m')}\eta^{(n'',m'')}\phi_{\xi yy}^{(n''',m''')}\rangle_{n-1,m}\\
&-\langle\eta^{(n',m')}\phi_\xi^{(n'',m'')}\phi_{\xi y}^{(n''',m''')}\rangle_{n-2,m}\\
&-ik_0\langle m'''\eta^{(n',m')}\phi_\xi^{(n'',m'')}\phi_y^{(n''',m''')}\rangle_{n-1,m}\\
&-ik_0\langle m''\phi^{(n',m')}\eta^{(n'',m'')}\phi_{\xi y}^{(n''',m''')}\rangle_{n-1,m}
\end{aligned}$$

$$+k_0^2\langle m''m'''\eta^{(n',m')}\phi^{(n'',m'')}\phi_y^{(n''',m''')}\rangle_{n,m}$$
$$-\langle\eta^{(n',m')}\phi_y^{(n'',m'')}\phi_{yy}^{(n''',m''')}\rangle_{n,m} \qquad \text{(A-3)}$$

ここで$\langle\quad\rangle_{n,m}$は第$m$調和成分の$\varepsilon$について$n$オーダーの項の係数をあらわす。例えば

$$\langle m''\phi_\xi^{(n',m')}\phi^{(n'',m'')}\rangle_{n,m}=\sum_{n'+n''=n}\sum_{m'+m''=m} m''\phi_\xi^{(n',m')}\phi^{(n'',m'')}$$

無撞着条件(2.15),(2.18)は$(n,m)=(1,0),(2,0)$に対しては(A-1)~(A-3)より明らかなように満されている。$(n,m)=(1,1),(2,1)$に対するものから分散関係式(2.5)とλ_0として群速度をとるべきことが出る。それに対して$(n,m)=(3,0),(2,2)$に対する条件より$\phi_\xi^{(1,0)}$, $\phi^{(2,2)}$を$\psi^{(1,1)}$の項で決めることができる。$(n,m)=(3,1)$に対する無撞着条件により$\psi^{(1,1)}$がnonlinear Schrödinger方程式(2.24)に従うことが出る。

参考文献

1) T.B. Benjamin and J.E. Feir : J.Fluid Mech.(1967) <u>27</u> 417.

2) T.B. Benjamin : Proc.Roy.Soc.(1967) <u>A290</u> 59.

3) G.B. Whitham : J.Fluid Mech.(1967) <u>27</u> 399.

4) V.H. Chu and Mei : J.Fluid Mech.(1970) <u>41</u> 873.

5) V.H. Chu and Mei : J.Fluid Mech.(1971) <u>47</u> 337.

6) T. Taniuti and Y Yajima : J. Math. Phys. (1969) 10 1369.

7) N. Asano, T. Taniuti and N. Yajima : J. Math. Phys. 10 2020.

8) F.D. Tappert and C.M. Varma : Phys. Rev. Lett. (1970) 25 1108.

9) K. Stewartson and J.T. Stuart : J. Fluid Mech. (1971) 48 529.

10) V.I. Karpman and E.M. Kruskhal' : JETP (1969) 28 277.

11) D.J. Korteweg and G. de Vries : Phil. Mag. (1895) 39 422.

12) A. Jeffrey and T. Kakutani : J. Math. and Mech. (1971)

13) Yu. A. Berezin and V.I. Karpman : JETP (1967) 24 1049.