数理解析研究所講究録
第164巻 1972年 151-158

非線型熱方程式の解の時間に関する漸近行動

(東大、理) 増田久弥

方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + (1-u^2)u, & x \in R^N, \\ u(x,0) = \varphi(x) & (0 \leq \varphi \leq 1) \end{cases}$$

の解 $u(x,t)$ が もし $\varphi \not\equiv 0$ ならば、$t \to \infty$ の時 1 に近づくことを示すことが、この話の目的です。

もっと一般に、

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + a(x,t,u) \\ \qquad (x \in R^N, \ t > 0) \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

なる方程式を考えよう。ここで、

(A-1) $a(x,t,\rho)$ は、$\mathbb{R}^N \times [0,\infty) \times [0,1]$ 上で有界連続であって

$$a(x,t,0) = a(x,t,1) = 0$$
$$(\forall x \in \mathbb{R}^N, \ t > 0)$$

$$0 < a(x,t,s) < 1 \quad (x \in R^N, \ t \geq 0, \ 0 < \rho < 1)$$

(A-2)

$$a(x,t,p) - a(x,t,p') \geq b(x,t,p,p')\ (p-p')$$

が，$\forall x \in \mathbb{R}^N$，$\forall t \geq 0$，$0 \leq p' \leq p \leq 1$ に対し成立するごとき有界連続函数（x, t, p, p' について）$b(x,t,p,p')$ が存在する。

(A-3) 次の如き，$0 \leq p \leq 1$ で狭義単調減少連続函数 $F(p)$ が存在して，

$$0 \leq p F(p) \leq a(x,t,p)$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}^N,\ \forall t \geq 0,\ 0 \leq \forall p \leq 1)$$

(A-4) $a(x,t,p)$ は，各 x，p を固定した時に，t について広義単調増加（$a(x,t,p) \geq a(x,t',p)$，$t \geq t'$）

なる条件の下で，

定理　初期値 $\varphi(x)$ が

$$0 \leq \varphi \leq 1 \qquad \varphi \not\equiv 0$$

ならば，解 $u(x,t)$ は，1 に"指数函数的に"，（x について広義一様に）近づく（$t \to \infty$）

証明

1°. $0 \leq u \leq 1$, 且

$$u(x,t) \geq c\left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{\frac{N}{2}} \int_I e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} dy$$

(ここで c は適当な正定数，I は有界閉区間；
$[b_1, c_1] \times \cdots \times [b_N, c_N]$)

(A-1) から，$a(x,t,u) \geq 0$ であるから，u は，
$u_t \geq \Delta u$ をみたす。u_0 として

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = \Delta u_0, \qquad u_0(x,0) = \varphi(x)$$

の解とすると，$w \equiv u - u_0$ は，

$$w_t \geq \Delta w, \quad w(x,0) = 0$$

をみたす。故に，$w(x,t) \geq 0$ $(\forall x \in R^N, \forall t > 0)$

よって，

$$u(x,t) \geq u_0(x,t) = \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{\frac{N}{2}} \int e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} \varphi(y) dy$$

$\varphi \not\equiv 0$. $\varphi \geq 0$ であるから，

$$\varphi(x) \geq c\,\chi_I(x) \qquad (\forall x \in R^N)$$

なる正の定数 c と，有界閉区間 I が存在する。

これより、求める bound がでる。$w = 1-u$ は、

$$w_t = \Delta w - a(x,t,1-w)$$
$$= \Delta w + a(x,t,1) - a(x,t,1-w)$$
$$\geq \Delta w + b(x,t,1,1-w)w$$
$$w(x,0) = 1-\varphi(x) \geq 0$$

をみたす。これより、$w(x,t) \geq 0$ 。つまり、

$$u(x,t) \leq 1$$

が示された。

2°. 次の如き点列 ρ_j が存在する。

$$\rho_j \to 1 \quad (\rho_j < 1)$$
$$F(\rho_j) \to 0, \quad F'(\rho_j) < 0$$

これは、(A−3) より $F(1) = 0$ であること及び $F(\rho)$ が殆んど到る所微分できて、負の微分係数をもつからである。$\varepsilon_j = F(\rho_j)$ とおく。この時、

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dA} = F(v)v - \varepsilon_j v \\ v(0) = \delta \qquad (F(\delta) > \varepsilon_j) \end{cases}$$

なる~~常微分方程式を解~~く。これは、

$$\int_\delta^{v(t)} \frac{d\rho}{F(\rho)\rho - \varepsilon_j \rho} = t$$

と解かれる。$t\to\infty$ の時、右辺 $\to\infty$ より、
左辺 $\to\infty$ とならねばならない。これは、

$$\int_{\delta}^{\rho_j} \frac{ds}{F(\rho)\rho - \varepsilon_j \rho} = \infty$$

したがって、

$$v(t) \longrightarrow \rho_j \quad (t\to\infty)。$$

$$F(\rho) = F(\rho_j) + F'(\rho_j)(\rho-\rho_j) + o(\rho-\rho_j)$$

より、

$$\rho_j - v(t) \leq \mathrm{const.}\, e^{-\mathrm{const.}\, t}$$

を得る。

3° ξ を任意に固定する。

$$\rho = \frac{2N}{\varepsilon_j}$$

とする。この時、

$$0<\delta < C \left(\frac{1}{4\pi\rho}\right)^{\frac{N}{2}} e^{\frac{(x-\xi)^2}{\rho}} \int_I e^{-\frac{(x-y)^2}{2\rho}}\, dy \quad (\forall x\in\mathbb{R}^N)$$

なる如き δ が存在する。この δ を初期値とする 2° の解をとる。

$$e(x,t) \equiv e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t+\rho}}$$

とおき

$$u(x,t) = v(t)\, e(x,t)$$

とすると。

(i) $\underline{u}(x,0) = \delta\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{\rho}}$

$$\leq C\cdot\left(\frac{1}{4\pi\rho}\right)^{\frac{N}{2}} \int_I e^{-\frac{(x-y)^2}{2\rho}}dy$$

$(\forall x \in \mathbb{R}^N)$

$\therefore\ \underline{u}(x,0) \leq u(x,\rho).$

(ii) $\frac{\partial}{\partial t}\underline{u} - \Delta\underline{u} - a(x,t,\underline{u})$

$$= (F_1(v)v - \varepsilon_j v)\,\underset{\sim}{e}(x,t) + \frac{4(x-\xi)^2}{(4t+\rho)^2}\, v\, \underset{\sim}{e}(x,t)$$

$$- v\,\underset{\sim}{e}(x,t)\left(-\frac{2N}{4t+\rho} + \frac{4(x-\xi)^2}{(4t+\rho)^2}\right)$$

$$- a(x,t,\underline{u})$$

$$= F_1(v)\,\underset{\sim}{e}\,v + v\,\underset{\sim}{e}\left(-\varepsilon_j + \frac{2N}{4t+\rho}\right)$$

$$- a(x,t,\underline{u})$$

$$\leq F_1(v)\,\underset{\sim}{e}\,v - a(x,t,\underline{u}).$$

$F_1(v) \leq F_1(\underset{\sim}{e}\,v)$ （$\underset{\sim}{e} \leq 1$ と A.3 より）

を利用すると，

右辺 $\leq F_1(\underline{u})\underline{u} - a(x,t,\underline{u}) \leq 0$

ここで，(A.3) を用いた。

4°.

$$w(x,t) \equiv u(x,t+\rho) - \underline{u}(x,t)$$

とおくと，

$$w(x,0) = u(x,\rho) - \underline{u}(x,0) \geq 0$$

(3° より)

$$\begin{aligned} w_t(x,t) &= u_t(x,t+\rho) - \underline{u}_t(x,t) \\ &\geq \Delta u + a(x,t+\rho,u) \\ &\quad - \Delta\underline{u} - a(x,t,\underline{u}) \\ &\geq \Delta u + a(x,t,u) \\ &\quad - \Delta\underline{u} - a(x,t,\underline{u}) \\ &\geq \Delta w + b(x,t,u,\underline{u})\,w \end{aligned}$$

故に，

$$w(x,t) \geq 0$$

$$\therefore\ u(x,t+\rho) \geq \underline{u}(x,t)$$

を得る。故に，

$$u(\xi,t+\rho) \geq \underline{u}(\xi,t) = v(t)$$

$$\begin{aligned} \therefore\ k_j - u(\xi,t+\rho) &\leq k_j - v(t) \\ &\leq \text{const.}\, e^{-\text{const.}\,t} \end{aligned}$$

故に、 $\forall \varepsilon > 0$ に対して.

$$1-\varepsilon < u(x,t) \leqq 1$$

に、xについて、一様に 且 指数函数的に 初期値は、増大する。(広義)

(証了)