

Solenoidal 有界部分空間への射影の 数値的取扱いについて

東大 理 後藤 滋樹

§1. 目標

我々が本来目標とするのは、Navier-Stokes 方程式 (1.1)~(1.4) の数値解法を、発展方程式的取扱い(例えば[1]) にできるだけ平行な形で行なうことである。ただし、ここで述べるのはそのために必要な準備や予備的考察である。

Ω 有界 C^m , $m=2,3$, $\partial\Omega$ は十分滑らかとする。

$$\begin{cases} (1.1) & \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - \text{grad } p - (u \cdot \text{grad})u & (x \in \Omega, t > 0) \\ (1.2) & \text{div } u = 0 & (x \in \Omega, t > 0) \\ (1.3) & u|_{\partial\Omega} = 0 & (t > 0) \\ (1.4) & u|_{t=0} = a & (x \in \Omega) \end{cases}$$

上式中では $u = u(x, t) = (u_1(x, t), \dots, u_m(x, t))$ 速度場
 $p = p(x, t)$: 圧力 $a = a(x)$: 初期値 をそれぞれ表わし
ている。また、粘性率、密度はともに1であるとしている。

更に notation として、次の様に定める。

Def. 1 $\mathcal{H} \equiv [L^2(\Omega)]^m$, $\mathcal{H}_0 \equiv \overline{\{u \in \mathcal{H} \mid \operatorname{div} u = 0, u_n|_{\partial\Omega} = 0\}}$
 $\mathcal{H}_\pi \equiv \overline{\{u \in \mathcal{H} \mid \exists h \in C^\infty(\Omega), u = \operatorname{grad} h\}}$ ただし
 u_n は u の外向き法線方向の成分を, $\overline{\quad}$ は \mathcal{H} で
 の closure を表わす。

すなわち \mathcal{H}_0 は境界条件 $u_n|_{\partial\Omega} = 0$ を満たす solenoidal
 vectors の集合であり, \mathcal{H}_π は十分滑らかな函数 h で $u = \operatorname{grad} h$
 と書ける vector の集合である。

Prop. 1 $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_\pi$ が成立する. [1]

特に $u \in \mathcal{H}_0$ ならば $(u, \operatorname{grad} p) = \int_{\Omega} u(x) \cdot \operatorname{grad} p(x) dx = 0$
 と直交している。さゆえ, P を $P: \mathcal{H} \xrightarrow{\text{onto}} \mathcal{H}_0$ なる
 直交射影と定めると, (1.1) ~ (1.4) は 次の方程式に書換
 えられる。

$$\begin{cases} (1.5) & \frac{du}{dt} = P(\Delta u - (u \cdot \operatorname{grad})u), & (t > 0) \\ (1.6) & u|_{\partial\Omega} = 0 & (t > 0) \\ (1.7) & u(+0) = a \end{cases}$$

[1]に於ては \mathcal{H}_0 の自己共役作用素 A を

$$Au = -P\Delta u$$

$$\mathcal{D}(A) = A \text{ の定義域} = \{u \in \mathcal{H}_0 \mid \Delta u \in \mathcal{H}, u|_{\partial\Omega} = 0\}$$

と定め, これを用いて (1.5), (1.6) の代りに発展方程式

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -Au - P(u \cdot \operatorname{grad})u \\ u(0) = a \end{cases}$$

としている。

§2. 直交射影 P の解析的構成

数値的な考察に先立って解析的な構成を見ておく。

2-1. Neumann問題に帰着する方法.

Prop. 2.1. $v = v(x)$ が \mathcal{H} に属するベクトル函数であるとき、スカラー函数 h を次の Neumann 問題 (2-1), (2-2) の解として定める。(ただし v の滑らかさは仮定する.)

$$(2-1) \quad \Delta h = \operatorname{div} v \quad \text{in } \Omega$$

$$(2-2) \quad \frac{\partial h}{\partial n} = v_n \equiv v \cdot n \quad \text{on } \partial\Omega. \quad n \text{ は外向き単位法線ベクトル}$$

この時 $Pv = v - \operatorname{grad} h$ である。

証明は易しい。(略) 解の存在条件 $\int_{\Omega} (\operatorname{div} v) dx = \int_{\partial\Omega} v_n ds$ は満たされているが、解 h には定数項の任意性が残されていることに注意すべきである。

2-2. 流れの函数を用いる方法 (2次元の場合)

2次元の場合には、流れの函数 を用いて (2-1), (2-2) を書直せば、Dirichlet 問題となる。流れの函数を Φ で表わし、 $x = (x, y)$ と書くと、 $u = (u_1, u_2) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}, -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)$ である。また $\operatorname{Rot}(v_1, v_2) \equiv \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}$ と2次元の Rotation を定める。

Prop. 2.2. $v=v(x)$ が \mathcal{H} に属するベクトル函数であるとき、流線の函数 Φ を次の Dirichlet 問題 (2.3), (2.4) の解として定める。ただし Ω は 単連結 と仮定する。

$$(2.3) \quad -\Delta\Phi = \text{Rot } v \equiv \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \quad \text{in } \Omega$$

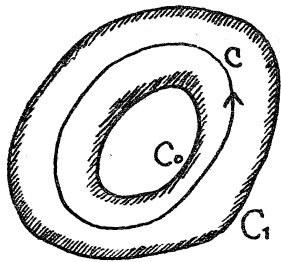
$$(2.4) \quad \Phi = \text{const. (任意定数)} \quad \text{on } \partial\Omega$$

この時 $Pv = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}, -\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)$ である。

証明は易しい。(略)

Remark.

Ω が単連結でない場合の例として、穴がひとつある場合をみる。穴が幾つあっても同様に扱える。(2.4) 式の $\Phi = \text{const.}$ は $u_n|_{\partial\Omega} = 0$ に対応しており、2つの境界で同じ const. となる必然性は全くない。そこで次の2つの Dirichlet 問題の解を Φ_0, Φ_1 として $\Phi \equiv \Phi_0 + \gamma\Phi_1$, γ は定数 を作ると、



$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta\Phi_0 = \text{Rot } v \quad \text{in } \Omega, \\ \Phi_0 = 0 \quad \text{on } \partial\Omega = C \cup C_0. \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} -\Delta\Phi_1 = 0 \quad \text{in } \Omega \\ \Phi_1 = 1 \quad \text{on } C_1 \\ \Phi_1 = 0 \quad \text{on } C_0. \end{array} \right.$$

Φ は (2.3), (2.4) をみたす。

γ を決めるには、次の関係式を用いれば良い。

$$\oint_C v = \oint_C u + \oint_C \text{grad } h = \oint_C u = \oint_C \frac{\partial\Phi}{\partial n} = \oint_C \frac{\partial\Phi_0}{\partial n} + \gamma \oint_C \frac{\partial\Phi_1}{\partial n}$$

ただし C は図のような積分路。 n は C の内向き法線方向にとる。

§3. 直交射影 P の数値的構成

3-1. Neumann 問題

前節の結果をそのまま用いて, (2-1), (2-2); (2-3), (2-4) を差分法によって解くことを考える. discretization の結果はどちらの場合も次のような線型方程式系となる.

$$(3-1) \quad Ax = b$$

Dirichlet 問題の方は計算の実行に関して注意すべき点はあるが, それらは周知であろうし, 原理的な困難もない. 一方 Neumann 問題 (2-1), (2-2) では, 解 x が unique ではないから, 対応する行列 A が正則ではなくなる. 従って取扱いにはより一層の注意が必要であり, そのうちの幾つかをここで述べることは意義がある.

ひとつの方法として, もとの微分方程式に付加条件を追加して解が unique となるようにやり直しても良いが, 正則でなくても, 通常の反復法で解けるし, 実際上加速可能である.

後出の Remark により, 収束性を議論する限り考察の対象を $b=0$ の場合.

$$(3-2) \quad Ax = 0$$

に限, ても一般性を失わない.

Prop. 3.1. n 次対称行列 $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ が正半定値かつ $a_{ii} > 0, 1 \leq i \leq n$ ならば $Ax = 0$ を解く Gauss-Seidel 法

(逐次置換法)は、すべての初期ベクトル $x^{(0)}$ に対して、この方程式のある解 $x^{(\infty)}$ に収束する。 $x^{(\infty)} = \text{Proj}_{\text{Ker}[A]}(x^{(0)})$ が成立する。

証明は [2]。

特に A が $\text{Prop}(A)$ なる性質 [3] を満たせば、SOR も使用できる。

Prop. 3.1. の仮定は Neumann 問題の discretization を考えている限りでは、そう厳しいものではない。

Cor. 3.2. 上記 Prop. 3.1. に於て $A = G^*G$ と仮定すれば、すべての初期ベクトル $x^{(0)}$ に対して $Gx^{(\infty)} = 0$ である。

[証明] Prop. 3.1. により $Ax^{(k)} \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) for $\forall x^{(0)}$ 及び $\|x^{(k)}\| \leq M_0$, (M_0 は $x^{(0)}$ に依存する定数) が判る。

$$\therefore {}^t x^{(k)} A x^{(k)} \leq \|x^{(k)}\| \cdot \|A x^{(k)}\| \leq M_0 \|A x^{(k)}\| \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$$

$$\therefore G x^{(k)} \rightarrow 0 \quad (\text{終り})$$

こゝでの A としては ($a_{ii} > 0$ として) 境界条件付きの、 $(-\Delta)$ を近似するものを考えているので、 $-\Delta = (-\text{div}) \text{grad}$ の difference analogue としての $A = (-D)G = G^*G$ を然るべく考慮して、 $G \sim \text{grad}$, $G^* \sim (-\text{div})$ となる。我々が Neumann 問題を解いて最終的に得ようとしたのは、解の grad であつたから、 Cor. 3.2. は P の数値的構成、特に P_U の一意性を裏付ける。

Remark.

① Neumann 問題 (2-1), (2-2) を discretize した (3-1) 式 $Ax=b$ に於ては, $\int_{\Omega} \operatorname{div} v dx = \int_{\partial\Omega} v_n ds$ に対応して,
 $b \in [\operatorname{Ker}(A)]^{\perp} = \operatorname{Rng}(A^*) = \operatorname{Rng}(A)$ \ominus A は実対称行列
 が言える。つまり (3-1) の解の存在が保証される。ゆえに,
 $b=0$ と考えても一般性を失わない。

② Prop. 3.1. は 'Generalized Inverses' の知識によって簡潔にまとめ得る。([4] など)

3-2. Chorin 等の方法.

我々の方法も, 数値計算の段階では反復法であるが, A. J. Chorin が [5] に述べている方法は, 次のような反復法である.

$$\begin{cases} w^{k+1} = v - G\phi^k & k \geq 1, G \sim \operatorname{grad}. \\ \phi^{k+1} = \phi^k - \theta D w^{k+1} & k \geq 1, \theta > 0, D \sim \operatorname{div}. \end{cases}$$

$0 < \theta < h^2/m^2$ (h : 格子間隔, m : 次元) ならば,

$$w^k \rightarrow P v, \quad (k \rightarrow \infty) \quad \text{for } \forall \phi^1$$

Chorin の場合には, w^k, ϕ^k, v は周期的であるという仮定の下に使用されている。従って境界条件に関する困難は存在しない時だけが考えられているが, Temam が [6] で, 一般の場合にも, この方法を引用している。

また, Jamet-Lascaux-Raviart [7] では, 2次元の

流れの函数を用いた場合には、我々と殆ど同じ方法を提示していると言えるが、一般の場合については記述が正確を欠いている。すなわち我々が述べたように Neumann 問題を解くべきであるのに対して、Dirichlet 問題を解けば良いとしている。 H_π が $\{ \text{grad } p \mid p=0 \text{ on } \partial\Omega \}$ において張られるかの如く誤解したことによる誤りであろう。

§4. 簡単な数値実験

2次元の場合には、Neumann 問題を解いても、Dirichlet 問題を解いても "P" が構成できる。簡単な例について実際の計算をして比較してみた。結果を以下に報告する。

ここで扱うのは次のような場合である。

$\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ 正方形領域。ただし流れは横(x)方向には周期的であり、周期は1であるとする。

$v = (y(1-y), 1)$, $(x, y) \in \Omega$ を与えて P_v を計算する。

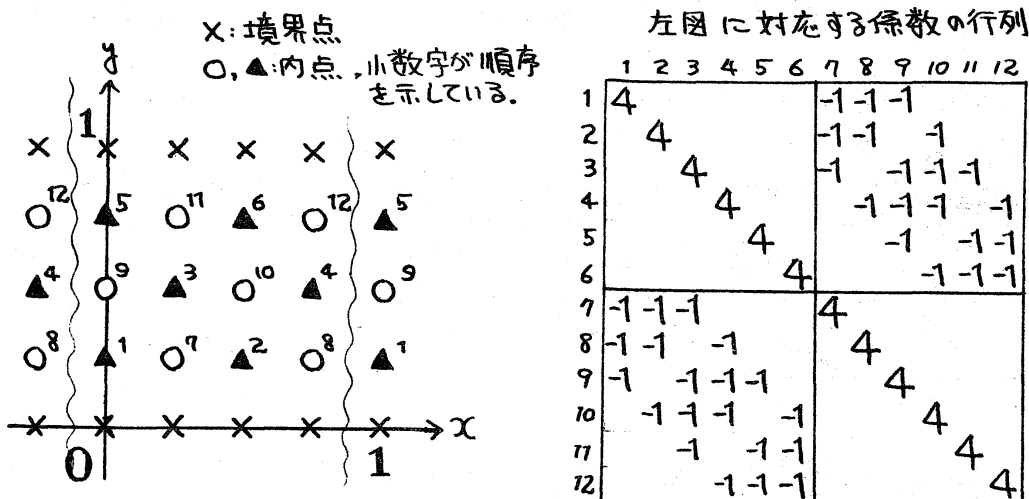
この場合には、簡単に $P_v = (y(1-y), 0) = \text{Poiseuille flow}$ と判ってしまうから、誤差を観察するのは容易である。

実際の discretization に於ては、まず mesh 間隔 $1/6$ の正方格子で領域 Ω を切り、境界は $\partial\Omega$ をそのまま採用する。

Δ (ラプラシアン) の近似は普通の 5点近似、Neumann 条件の

$\frac{\partial u}{\partial n}$ は簡単に後退差分とした。更に Dirichlet 問題の $\text{Rot} u$, $\int_{\partial \Omega} u$, Neumann 問題の $\text{dir} u = 0$, $v_n = \pm 1$ は外部より data として与えてしまった。

SOR の適用を可能にするため、計算の順序 (order) は、格子点を偶数点と奇数点とに分けて、交互に計算する方式 ([2] など) を採った。この方法を mesh 間隔 $1/4$ で Dirichlet 問題の場合について図示すれば下のようである。



左図に対応する係数の行列

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4								-1	-1	-1	
2		4							-1	-1	-1	
3			4						-1	-1	-1	-1
4				4					-1	-1	-1	-1
5					4				-1	-1	-1	
6						4			-1	-1	-1	
7							4					
8								4				
9									4			
10										4		
11											4	
12												4

空白は成分 0 を表わしている。

実際の計算では mesh 間隔 $1/16$ である。

反復法の収束の判定は、修正量の maximum norm が 10^{-4} (あるいは 10^{-5}) 以下になった時に収束とみなした。SOR の加速係数は、同じく修正量の maximum norm を用いて推定した。次ページ以下の「計算の結果」に於ける誤差とは、誤差を maximum norm で表示したものである。

計算の結果* 1)~3)の表で・回 は反復回数,・秒 はCPU time を表わす.

1) Neumann 問題を解いて ψ の近似解を求める計算について.
(初期値は all zero)

加速係数 収束判定	$\omega=1.0$	$\omega=1.2$	$\omega=\tilde{\omega}_{opt}=0.1613999 E+01$
10^{-4}	215回	150回	67回 (5秒) 誤差 $0.1605213 E-02$
10^{-5}	/	/	92回 (6秒) 誤差 $0.1674891 E-03$

2) Dirichlet 問題を解いて Φ_0 の近似解を求める計算について.
(初期値は all zero)

加速係数 収束判定	$\omega=1.0$	$\omega=1.2$	$\omega=\tilde{\omega}_{opt}=0.1572605 E+01$
10^{-4}	34回	25回	20回 (5秒) 誤差 $0.1739953 E-03$
10^{-5}	/	/	24回 (5秒) 誤差 $0.2339110 E-04$

3) Dirichlet 問題を解いて Φ_1 の近似解を求める際には, 初期値を両端の境界値の線型補間で決めるのが常道である. 特に今の Φ_1 では, そのまま解に収束. 強いて初期値 all zero より出発してみると下のようになる.

加速係数 収束判定	$\omega=1.0$	$\omega=1.2$	$\omega=\tilde{\omega}_{opt}=0.1505180 E+01$
10^{-4}	251回	174回	99回 (—) ...
10^{-5}	/	/	137回 (—) ...

4) Dirichlet 問題に於ける γ の計算。ただし ω は $\tilde{\omega}_{opt}$ で 10^{-4} で判定したものを用了。また ω は境界値の線型補間の値を用了。 $\frac{\partial}{\partial n}$ は前進差分または中央差分で近似した。積分路は $y = \text{const.}$ で const の値を変えて比較した結果を下に示す。なお exact 値は $\gamma = 1/6$ である。

const	前進差分	中央差分
0	0.1358883	中央差分定義されず
$1/16$	0.1396086	0.1670942
$2/16$	0.1442702	0.1672972
$3/16$	0.1479424	0.1676024
$4/16$	0.1528082	0.1679647
$5/16$	0.1565720	0.1683293
$6/16$	0.1610792	0.1686403
$7/16$	0.1650163	0.1688491
$8/16$	0.1688064	0.1689225
$9/16$	0.1728962	0.1688491
$10/16$	0.1760379	0.1686403
$11/16$	0.1801745	0.1683293
$12/16$	0.1831221	0.1679647
$13/16$	0.1871732	0.1676024
$14/16$	0.1904877	0.1672972
$15/16$	0.1943669	0.1670942

5) 最終的な Pv の近似誤差.

Neumann問題では, $\omega = \hat{\omega}_{opt}$, 収束判定 10^{-4} での \hat{u} の近似解に対して $\text{grad } \hat{u}$ を中央差分で求めた.

Dirichlet問題 (流れの函数) では前項4) と同じ Φ_0, Φ_1 の近似値に $\gamma = 0.1670942$ (前項の表の右下の値) を用いて, $\Phi = \Phi_0 + \gamma \Phi_1$ とし, $(\frac{\partial \Phi}{\partial y}, -\frac{\partial \Phi}{\partial x})$ を中央差分で計算した.

上のそれぞれの値と $(y(1-y), 0)$ とを内部格子点に於て比較し, x, y 成分ごとに maximum error を求めた.

解き方	x 成分	y 成分
Neumann	0.0	0.5176902 E-02
Dirichlet	0.1944423 E-02	0.0

今の場合には, \hat{u} が, それゆえ解が, x によらないことと, 偶数-奇数法の結果に中央差分を用いたことによつて error 0.0 が生まれた.

計算は, CPU time を明示したものについては, HITAC 5020E: FORTRAN (HARP) [東大大型計算機センター] を使用した. その他の部分は FACOM 270-20:FORTRAN をも使用した.

*東大理学部 物理・数学共用.

文献

- [1] H. Fujita & T. Kato, On the Navier-Stokes initial value problem. I. Arch. Rational Mech. Anal. **16**, 269-315 (1964).
- [2] G.E. Forsythe and W.R. Wasow, Finite Difference Methods for Partial Differential Equations. John Wiley, New York (1960)
- [3] D. Young, Iterative methods for solving partial difference equations of elliptic type. Trans. Amer. Math. Soc. **76**, 92-111 (1954)
- [4] K. Tanabe, An adaptive acceleration of general linear iterative processes for solving systems of linear equations. Res. Memo. no.43. Inst. Statist. Math. (1971)
- [5] A.J. Chorin, On the convergence of discrete approximations to the Navier-Stokes equations. Math. Comp. **23**, 341-354 (1969)
- [6] R. Témam, Sur l'Approximation de la solution des équations de Navier-Stokes par la méthode des pas fractionnaires (II). Arch. Rational Mech. Anal. **33**, 377-385 (1969)
- [7] P. Jamet, P. Lascaux, P.A. Raviart, Une méthode de résolution numérique des équations de Navier-Stokes. Numer. Math. **16** 93-114 (1970)