数理解析研究所講究録
第 165 巻 1972 年 1-20

Lorentz 群の表現の Intertwining operators について

三重大 教育 土川真夫

§0. 序

半単純リー群Gの基礎表現の intertwining operator は表現の同値性，既約性，ユニタリ性，部分表現や因子表現の形，すでに作られた離散系列のユニタリ表現の基礎表現の中での位置等 表現の構成に関する基本的な諸問題について重要な役割を背負っており，また群上の調和解析とも密接な関係をもっている。これらの問題を広く cover するためには，可能な限り intertwining operator を求める必要がある。Intertwining operator については，Gelfand 等のほか，Kunze-Stein，Stein，Lipsman，Schiffmann，Knapp-Stein 等の研究があり，後者らの場合は特異積分の話が中心となっており，とくに表現のパラメターにおける特異点の場合については，一部を除いてはふれていない様である。

すべての intertwining operator が求まっているのは，

$G=SL(2,\mathbb{C})$, $SL(2,\mathbb{R})$[2] の場合と, $G=SL(3,\mathbb{C})$[3] の場合だけの様だが, その方法は本質的には Bruhat[1] に負っている。 本稿では $G=SO_0(n.1)$ について, Gelfand-Bruhat の方法にそってすべての intertwining operator を求めることを試みた。

§2. 準備

我々の取扱う群 G は n 次の斉次 Lorentz 群 $SO_0(n.1)$, すなわち二次形式 $x_0^2-x_1^2-x_2^2\cdots-x_n^2$ を不変にする一次変換の群の単位元連結成分である。

まず G の部分群を挙げる。

$$K=\left\{ k=\begin{bmatrix} 1 & \\ & k \end{bmatrix},\ k\in SO(n) \right\}$$

---

1) F.Bruhat: Sur les representations induites des groups de Lie, Bull.Soc.Math.Fr.,vol.84(1956),pp.97-205.

2) Gelfand and others: Generalized functions, vol.5.

3) M.Tsuchikawa: On the representations of SL(3,$\mathbb{C}$),Proc. Japan Acad.,43(1967),852-855,44(1968),127-129,130-132. I, II, III

$$A=\left\{ a(t)=\begin{bmatrix} \mathrm{ch}\,t & \mathrm{sh}\,t & \\ \mathrm{sh}\,t & \mathrm{ch}\,t & \\ & & 1_{n-1} \end{bmatrix},\quad t\in\mathbb{R}\right\}$$

$$M=\left\{ \gamma=\begin{bmatrix} 1_2 & \\ & \gamma \end{bmatrix},\quad \gamma\in SO(n-1)\right\}$$

$$N=\left\{ n(\xi)=\begin{bmatrix} 1+\frac{1}{2}|\xi|^2 & -\frac{1}{2}|\xi|^2 & {}^t\xi \\ \frac{1}{2}|\xi|^2 & 1-\frac{1}{2}|\xi|^2 & {}^t\xi \\ \xi & -\xi & 1_{n-1} \end{bmatrix},\quad \xi=\begin{bmatrix} \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{n-1}\right\}$$

$$\hat{N}=\left\{ \hat{n}(\eta)=\begin{bmatrix} 1+\frac{1}{2}|\eta|^2 & \frac{1}{2}|\eta|^2 & {}^t\eta \\ -\frac{1}{2}|\eta|^2 & 1-\frac{1}{2}|\eta|^2 & -{}^t\eta \\ \eta & \eta & 1_{n-1} \end{bmatrix},\quad \eta=\begin{bmatrix} \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_{n-1} \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{n-1}\right\}$$

KはGの極大コンパクト群，Aは(G,K)のCartan部分群，MはKにおけるAの中心化群，Nと$\hat{N}$はunipotent群で，Aに対応するCartan部分環に関して，それぞれ正と負のroot vectorの作る部分環の部分群である。

$B=MAN$はBorel部分群，また$G=KAN$と書けて，

これは岩沢分解として知られているものである。

$$w = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1_{n-2} \end{bmatrix}$$

とおくとき，$\{e, w\}$ は G/K の Weyl 群

$$G = B \dot{+} BwB \qquad (1.1)$$

は Bruhat 分解を与え，これより $G = B \dot{+} B\hat{N}w = B\hat{N} \cup B\hat{N}w$ を知る。$B\hat{N}$，$B\hat{N}w$ は G の密な開集合である。

$B \ni b = a(t)\gamma n(\xi) = n(\xi')a(t)\gamma$ に対して，$d_\ell b = dt\,d\gamma\,d\xi$，$d_r b = dt\,d\gamma\,d\xi'$ とおけば，$d_\ell b$ および $d_r b$ はそれぞれ B の左右の Haar 測度を定義する。

$$\beta(b) = \frac{d_\ell b}{d_r b} = \frac{d\xi}{d\xi'} = \frac{d(e^{-t}\gamma\xi')}{d\xi'} = e^{-(n-1)t} \qquad (1.2)$$

とおくとき，G の Haar 測度は $dg = d_\ell b\,d\eta = \beta(b)\,d_r b\,d\eta$ で与えられる。以後 $d_r b$ を単に db と書くことにする。

§2 G の基礎表現

コンパクト群 M の V $\left(\ni v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_p \end{bmatrix}\right)$ 上への既約表現を

$m(\gamma)$, A の 1 次元表現を $a(t) \longmapsto e^{-ct}$ (c は複素数) とするとき, $\chi(b) = \chi(a\gamma n) = e^{-ct} m(\gamma)$ は B の表現を与え, この表現を $\chi = (c, m)$ と書くことにする。

このとき, $\mathcal{D}_\chi$ は次の性質をもつ G 上の V 値関数 $f(g)$ 全体の作る位相線型空間である:

i) $f(g)$ は C^∞ である。

ii) $f(bg) = \chi\beta^{-\frac{1}{2}}(b) f(g)$

$$\left(\chi\beta^{-\frac{1}{2}}(b) = e^{-ct + \frac{n-1}{2}t} m(\gamma) \right)。$$

iii) $\mathcal{D}_\chi$ の関数列が 0 に収束するとは, その関数の各階の導関数が任意のコンパクト集合上で 0 に一様収束するということである。

この空間 $\mathcal{D}_\chi$ 上で, $T^\chi_g f(\cdot) = f(\cdot\, g)$ によって T^χ_g を定義すれば, $\mathcal{R}^\chi = \{T^\chi, \mathcal{D}_\chi\}$ は G の誘導表現 $T^\chi = \mathrm{Ind}\,\{\chi \mid B \uparrow G\}$ として知られ, これが基礎表現と呼ばれている。

この表現は次の様に書き変えることも出来る。

$\mathcal{D}'_\chi$ は次の性質をもつ $\hat{N}$ 上の V 値関数 $\varphi(\hat{n}(\eta)) = \varphi(\eta)$ 全体の作る線型位相空間である:

i) $\varphi(\eta)$ は C^∞ である。

ii) $\hat{n}(\eta)\, w = b(\hat{n}(\eta), w) \cdot \hat{n}(\eta w)$

$$= a(\eta, w)\cdot\gamma(\eta, w)\cdot n\cdot\hat{n}(\eta_w) \qquad (2.1)$$

とおくと，$a(\eta, w) = a(t) \quad t = |\eta|^{-2}$,

$$\gamma(\eta, w) = \begin{bmatrix} \frac{2\eta_2^2}{|\eta|^2} - 1 & -\frac{2\eta_2\eta_3}{|\eta|^2} & \cdots\cdots & -\frac{2\eta_2\eta_n}{|\eta|^2} \\ \frac{2\eta_2\eta_3}{|\eta|^2} & 1 - \frac{2\eta_3^2}{|\eta|^2} & \cdots\cdots & -\frac{2\eta_3\eta_n}{|\eta|^2} \\ \vdots & & & \\ \frac{2\eta_2\eta_n}{|\eta|^2} & -\frac{2\eta_3\eta_n}{|\eta|^2} & \cdots\cdots & 1 - \frac{2\eta_n^2}{|\eta|^2} \end{bmatrix} = [\eta] \qquad (2.2)$$

$$\eta_w = \frac{1}{|\eta|^2}\begin{bmatrix} -\eta_2 \\ \eta_3 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix}, \qquad (2.3)$$

以上の記号のもとで，

$$|\eta|^{2c-(n-1)} m([\eta])\,\varphi(\eta_w) \qquad (2.4)$$

もまた C^∞ である。

iii) $\mathcal{D}'_\chi$ の関数列が 0 に収束するとは，$\varphi(\eta)$ および $|\eta|^{2c-(n-1)} m([\eta])\,\varphi(\eta_w)$ の各階の導関数が任意コンパクト集合上で一様収束することである。

この空間 $\mathcal{D}'_\chi$ 上で，$\hat{n}(\eta)g = b(\eta, g)\,\hat{n}(\eta_g)$ とおくとき，$T'^{\chi}_g\varphi(\eta) = \chi\beta^{-\frac{1}{2}}(b(\eta, g))\,\varphi(\eta_g)$ によって T'^{χ}_g を定義すると，表現 $\mathcal{R}'^{\chi} = \{T'^{\chi}, \mathcal{D}'_\chi\}$ が得られる。とくに，

$$T'^{\chi}_{w}\varphi(\eta) = |\eta|^{2c-(n-1)} m([\eta])\varphi(\eta w) \qquad (2.5)$$

二つの表現$\mathcal{R}^{\chi}$と$\mathcal{R}'^{\chi}$とは同一の表現であって，今後単に$\mathcal{R}^{\chi}$と書いて，両者を混同して利用することにする。

$\hat{N}$上のコンパクトな台をもつV値C^{∞}－関数全体を$\mathcal{D}$とすれば，$\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_{\chi}$，$\mathcal{D}_{\chi} = \mathcal{D} \cup T^{\chi}_{w}\mathcal{D}$，ゆえに$\mathcal{D}_{\chi}$の関数$\varphi(\eta)$は$\varphi_1(\eta)$，$\varphi_2(\eta) \in \mathcal{D}$を用いて，

$$\varphi(\eta) = \varphi_1(\eta) + T^{\chi}_{w}\varphi_2(\eta) \qquad (2.6)$$

と表わすことが出来る。

§3. 不変双一次形式

$\varphi(\eta) \in \mathcal{D}_{\chi}$，$\varphi'(\eta) \in \mathcal{D}_{\chi'}$に関する連続双一次形式Bで，

$$B(T^{\chi}_{g}\varphi,\ T^{\chi'}_{g}\varphi') = B(\varphi,\ \varphi') \qquad (3.1)$$

を満すものの形を求めよう。

<u>命題</u>　C^{∞}_{0}をG上のV値C^{∞}－関数でコンパクトな台をもつものの全体で，普通の位相をもった線型空間とする。このとき，$C^{\infty}_{0} \ni f(g)$に対して，

$$\pi^{\chi}(f) = \int_{B} \chi\beta^{-\frac{1}{2}}(b^{-1})\, f(bg)\, db \qquad (3.2)$$

で定義される線型対応$C^{\infty}_{0} \longrightarrow \mathcal{D}_{\chi}$は，全射準同型である。

(3.1)を満すBに対して

$$B_1(\mathfrak{f},\ \mathfrak{f}') = B(\pi^{\chi}(\mathfrak{f}),\ \pi^{\chi'}(\mathfrak{f}')) \qquad (3.3)$$

とおくとき，(3.1)，(3.2)より，G上の $p' \times p$ 次の行列で表わされる（Schwartzの意味での）超関数 $\mathbb{T}(g)dg$ があって，

$$(G) \qquad \mathbb{T}(b_1^{-1} g b_2)dg = {}^t\chi'\beta^{\frac{1}{2}}(b_2)\mathbb{T}(g)\chi\beta^{\frac{1}{2}}(b_1)\,dg$$

を満し，

$$B_1(\mathfrak{f},\ \mathfrak{f}') = \int_G {}^t\big(\mathbb{T}(g_1)\,\mathfrak{f}(g_1 g_2)\big)\,\mathfrak{f}(g_2)\,dg_1\,dg_2 \qquad (3.4)$$

と書ける。逆に(G)を満す $\mathbb{T}(g)dg$ があれば，(3.3)，(3.4)によって $B(\varphi,\ \varphi')$ が得られる。だから，不変双一次形式を求める問題は，(G)をみたす超関数 $\mathbb{T}(g)dg$ を求める問題に帰着する。

§4. 超関数 $\mathbb{T}(g)dg$ （その1）

$G = B\hat{N}w \dotplus B$，$B\hat{N}w$ はGの密開集合だったから，まず $\mathbb{T}$ を $B\hat{N}w$ に制限したものを求めよう。

(1)

$$\mathbb{T}\big|_{B\hat{N}w} = \mathbb{T}_1(b\hat{n}w) = \mathbb{T}_1'(b,\ \hat{n}) \qquad (4.1)$$

とおくと，$f \in C_0^\infty$ ，$supp(f) \subset B\hat{N}w$ に対して，

$$\mathbb{T}_1(f) = \int_{B\hat{N}} \mathbb{T}_1'(b, \hat{n}) f(b_1 \hat{n} w) \beta(b)\, db\, d\hat{n} \qquad (4.2)$$

だから，$\hat{n}_2 = w n_2 w^{-1}$ としたとき

$$\mathbb{T}_1(f(b_1 g n_2)) = \int_{B\hat{N}} \mathbb{T}_1'(b', \hat{n}) f(b_1 b \hat{n} \hat{n}_2 w) \beta(b)\, db\, d\hat{n}$$

$$= \int_{B\hat{N}} \mathbb{T}_1'(b_1^{-1} b, \hat{n} \hat{n}_2^{-1}) f(b \hat{n} w) \beta(b)\, db\, d\hat{n},$$

一方（G）より

$$\mathbb{T}_1(f(b_1 g n_2)) = \int_{B\hat{N}} \mathbb{T}_1'(b, \hat{n}) \chi\beta^{\frac{1}{2}}(b_1) f(b \hat{n} w) \beta(b)\, db\, d\hat{n}$$

つまり，

$$\mathbb{T}_1'(b_1^{-1} b, \hat{n}_1 \hat{n}_2) \beta(b)\, db\, d\hat{n} = \mathbb{T}_1'(b, \hat{n}) \chi\beta^{\frac{1}{2}}(b_1) \times \beta(b)\, db\, d\hat{n},$$

これより，

$$\mathbb{T}_1'(b, \hat{n}) \beta(b)\, db\, d\hat{n} = A \chi\beta^{\frac{1}{2}}(b^{-1})\, db\, d\hat{n} \qquad (4.3)$$

（A は $p' \times p$ の定数の行列）を得て，

$$\mathbb{T}_1(f) = A \int_{B\hat{N}} \chi\beta^{-\frac{1}{2}}(b^{-1}) f(b \hat{n} w)\, db\, d\hat{n} \qquad (4.4)$$

$\tau_g f(\cdot) = f(\cdot\, g)$ とおけば，$supp(f) \subset B\hat{N}w$ から $supp(\tau_w f) \subset B\hat{N}$，だから $\pi^\chi(f) = \varphi(\eta)$ としたとき，$\pi^\chi(\tau_w f) = T_w^\chi \varphi(\eta) \in \mathcal{D}$ 。このとき (4.4) は

$$\mathbb{T}_1(f) = A\int_{\hat{N}} T_w^{\chi}\, \varphi(\eta)\, d\eta \qquad (4.5)$$

となり，右辺の積分はつねに収束する。

(ロ) この超関数 $\mathbb{T}_1(g)\,dg$ を $B\hat{N}w$ から G上へ拡張することを考えよう。

今度は f の台が $B\hat{N}w$ に含まれておらず，$f = f_1 + f_2$ $supp(f_1) \subset B\hat{N}$ $supp(f_2) \subset B\hat{N}w$ となる。だから $\mathbb{T}_1(f_1)$，$\mathbb{T}_1(f_2)$ についてみると，$\mathbb{T}_1(f_2)$ については(4.5)で問題はない。そこで(4.4)の右辺の形で f_1 を代入してみると，$\pi^{\chi}(f_1) = \varphi_1 \in \mathcal{D}$ に対して，

$$A\int_{\hat{N}} T_w^{\chi}\, \varphi_1(\eta)\, d\eta = A\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\eta|^{2c-(n-1)}\, m([\eta])\, \varphi_1(\eta_w)\, d\eta,$$

η_w を η と書き直すと右辺は

$$A\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\eta|^{-2c-(n-1)}\, m({}^t[\eta])\, \varphi_1(\eta)\, d\eta \qquad (4.6)$$

$\varphi_1 \in \mathcal{D}$ だから，この積分は $Re\, c > 0$ で実際に収束し，その値は c について解析的，正整数を除いて解析延長がなされる。(4.6)をこの様に正則化された意味で与えられていると考えれば

$$\mathbb{T}_1(f) = \mathbb{T}_1(f_1) + \mathbb{T}_1(f_2)$$

$$= A \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\eta|^{-2c-(n-1)} m({}^t[\eta])\varphi(\eta)\,d\eta \quad (4.7)$$

によって Π_1 が拡張されたことになる。

(ハ) (G) をみたす超関数を求めるにあたって，第一段階として，(イ) では $b_2 = a_2\gamma_2 n_2$ の n_2 に関する条件のみを使った。そこで，a_2 に関する条件を使って整理すれば，$A \neq 0$ ならば $-c' + c = 0$，つぎに γ_2 に関する条件を使えば $A\,m(w\gamma w^{-1}) = m'(\gamma)A$ を得る。Schur の補題より A は正則行列，$m^w(\gamma) = m(w\gamma w^{-1})$ と $m'(\gamma)$ とは同値であることが必要であることがわかる。

(3.2), (3.3), (3.4), (4.4) 等を逆にたどってもとの不変双一次形式にもどすと次の定理を得る（Γ－因子などでわったりして定数倍を修正する）：

<u>定理 1</u> 正整数でない複素数 c に対して，$\mathcal{R}^{c,m}$ と $\mathcal{R}^{c,m^w}$ の間に不変双一次形式が存在する。その形は

$$B(\varphi, \varphi') = \frac{1}{\Omega_{n-1}\Gamma(-c)} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} {}^t(|\eta - \eta'|^{-2c-(n-1)} \times$$

$$m({}^t[\eta-\eta'])\varphi(\eta))\varphi'(\eta')\,d\eta\,d\eta' \quad (4.8)$$

Ω_{n-1} は $\mathbb{R}^{n-1}$ の単位球の容積，右辺の積分は c について正則

化された意味での積分である。(以上)

§5. 超関数 $\mathbb{T}(g)dg$ (その2)

前§では(G)を満す超関数$\mathbb{T}$から,BNw上で$\mathbb{T}$と一致し,また(G)を満す$\mathbb{T}_1$を求めた。$\mathbb{T}-\mathbb{T}_1=\mathbb{T}_2$とすれば$\mathbb{T}_2$も(G)を満し,Gより低い次元の多様体Bを台とする。

$$\mathbb{T}_2 \big|_{B\hat{N}} = \mathbb{T}_2'(b, \hat{n}) \tag{5.1}$$

を求めよう。この場合$B\hat{N}$の上で形が分れば$\mathrm{supp}(f)\cap B=\phi$のとき,つねに$\mathbb{T}_2(f)=0$とすればよいのだから,その拡張は容易である。

(1) 多重層ポテンシャルの理論と,条件(G)の

$$\mathbb{T}_2'(b_1^{-1}b, \hat{n})\,dg = \mathbb{T}_2'(b, \hat{n})\,\chi\beta^{\frac{1}{2}}(b_1)\,dg$$

より

$$\mathbb{T}_2(f) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathbb{D}(\eta)\,\chi\beta^{-\frac{1}{2}}(b^{-1})\,f(b\hat{n}(\eta))\,d\eta$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathbb{D}(\eta)\ \varphi(\eta)\,d\eta \tag{5.2}$$

こゝに$\mathbb{D}(\eta)$は$p'\times p$行列でその各要素はδ-関数の微分の一次結合である。

条件(G)に$b_2=a_2\gamma_2 n_2$のa_2を使えば前§と同じ理由

から，あるきまった正整数kがあって $k=c+c'$ ，かつ$\mathbb{D}(\eta)$の各要素はδ－関数のk次斉次微分の一次結合であることがわかる。

(ロ)

$$\mathbb{I}_2(\gamma^{-1}\hat{n}\gamma)\,dg={}^t\chi'\beta^{\frac{1}{2}}(\gamma)\,\mathbb{I}_2(\hat{n})\chi\beta^{\frac{1}{2}}(\gamma)\,dg$$

より

$$ {}^t\chi'(\gamma)\mathbb{D}(\gamma^{-1}\eta)\chi(\gamma)=\mathbb{D}(\eta) \qquad (5.3)$$

を得る。

今$\mathbb{D}(\eta)$のように$p'\times p$行列で，その各要素がδ－関数のk次斉次微分の一次結合であるものの全体で作る有限次元線型空間を考えると，それはMの表現$m\otimes m'\otimes S$の表現空間である。こゝでSはk次斉次微分作用素の作る対称テンソル上で，$\eta\longmapsto\gamma^{-1}\eta$によってひき起される表現である。(5.3)は$\mathbb{I}_2$から求められる$\mathbb{D}(\eta)$が，この表現によって不変であることを示している。

(5.3)を満す$\mathbb{D}(\eta)$を求めるについて，簡単のため$G=SO_0(4,1)$ $M=SO(3)$としよう。この時Mの既約表現mは正整数lを最高weightとして一意的にきまる。だから$m=m^l$，$\chi=(c,l)$と書くことが出来る。またそのと

き $\dim V = 2l+1$ 。 二つの表現 m^l と $m^{l'}$ の Kronecker 積は次の様に既約成分に分解出来る。

$$m^l \otimes m^{l'} = m^{l+l'} \oplus m^{l+l'-1} \oplus \cdots\cdots \oplus m^{|l-l'|} \quad (5.4)$$

この各既約表現の空間の weight vector の正規直交基底は Clebsch-Gordan の係数より求まり，その基底を

$$\begin{array}{llll} T^{l+l'}_{l+l'} & T^{l+l'}_{l+l'-1} & \cdots\cdots & \cdots T^{l+l'}_{-(l+l')} \\ & T^{l+l'-1}_{l+l'-1} & \cdots\cdots & \cdots T^{l+l'-1}_{-(l+l'-1)} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ & & T^{|l-l'|}_{|l-l'|} \cdots & T^{|l-l'|}_{-|l-l'|} \end{array} \quad (5.5)$$

としよう。 ただし T^i_j は $(2l'+1)\times(2l+1)$ 行列である。

また一方

$$S = \begin{cases} m^k \oplus m^{k-2} \oplus \cdots\cdots \cdots \oplus m^1 & k:\text{odd} \\ m^k \oplus \cdots \cdots \oplus m^2 \oplus m^0 & k:\text{even} \end{cases}$$

で，その各既約表現の空間の weight vector の正規直交基底を与える微分作用素を

$$\begin{array}{llll} D^k_k & D^k_{k-1} \cdots & \cdots & D^k_{-k} \\ & D^{k-2}_{k-2} \cdots & \cdots D^{k-2}_{-(k-2)} & \\ & \cdots\cdots & & \end{array} \quad (5.7)$$

とする。 また二つの数列

$l+l' \quad l+l'-1 \quad \cdots\cdots \qquad |l-l'|$

$k \quad k-2 \quad \cdots\cdots$

の間で一致する整数を $p \quad p-2 \quad \cdots\cdots \quad q$ とする。

$$\begin{cases} \mathbb{D}^p(\eta) = (D^p_p T^p_{-p} - D^p_{p-1} T^p_{-p+1} + \cdots \cdots + D^p_{-p} T^p_p)\,\delta(\eta) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbb{D}^q(\eta) = (D^q_q T^q_{-q} - D^q_{q-1} T^q_{-q+1} + \cdots + D^q_{-q} T^q_q)\,\delta(\eta) \end{cases} \tag{5.8}$$

とおくとき，$\mathbb{D}^p(\eta) \quad \mathbb{D}^{p-2}(\eta) \quad \cdots\cdots \quad \mathbb{D}^q(\eta)$ は (5.3) を満足し，一般の $\mathbb{D}(\eta)$ はこれらの一次結合として与えられる。

(ハ) 次に n_2 を条件 (G) に使おう。

$$\int \mathbb{T}_2(g)\,\mathbb{f}(g n_2)\,dg = \int \mathbb{T}_2(g)\,\mathbb{f}(g)\,dg$$

$$\text{右辺} = \int \mathbb{D}(\eta)\,\chi\beta^{-\frac{1}{2}}(b^{-1})\,\mathbb{f}(b\,\hat{n}(\eta))\,db\,d\eta$$

$$\text{左辺} = \int \mathbb{D}(\eta)\,\chi\beta^{-\frac{1}{2}}(b^{-1})\,\mathbb{f}(b\,\hat{n}(\eta)\,n(\xi))\,db\,d\eta \tag{5.9}$$

$\hat{n}(\eta)\,n(\xi) = b(\eta,\xi)\,\hat{n}((\eta_w + \xi')_w) \qquad \xi' = \begin{bmatrix} -\xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix}$ だから (5.9) を整理すると，

$$\int \mathbb{D}((\eta_w - \xi)_w)\,\chi(b(\eta,-\xi)^{-1})\,\chi\beta^{-\frac{1}{2}}(b^{-1})\,\mathbb{f}(b\,\hat{n}(\eta))\,\widehat{d\eta\,db}$$

したがって

$$\mathbb{D}((\eta w-\xi)w)\,\chi(b(\eta,-\xi)^{-1})\,d\eta=\mathbb{D}(\eta)\,d\eta \qquad (5.10)$$

この等式を成立させる条件として，kの値や c が整数であること，$\mathbb{D}(\eta)$ の $\mathbb{D}^p(\eta)\cdots\cdots\mathbb{D}^q(\eta)$ の一次結合の係数などが求まることが期待される。事実 $G=SL(2,\mathbb{C})$, $SL(2,\mathbb{R})$, $SL(3,\mathbb{C})$ などはこれによって最終的に求まっている。しかし今の場合具体的な計算が複雑で，まだ最後まで成功していない。

見通しとしては次の様になっている。

(4.7) を Γ－因子で修正した式

$$\frac{1}{\Omega_3\Gamma(-c)}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|\eta|^{-2c-(n-1)}\,m({}^t[\eta])\,\varphi(\eta)\,d\eta$$

において，cを正整数とおいて見ると $\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\mathbb{D}(\eta)\varphi(\eta)d\eta$ の形となり，この $\mathbb{D}(\eta)$ はこの§の(5.3), (5.10) を勿論満しているはずである。これを $\mathbb{D}_I(\eta)$ と書く。

$\mathbb{I}_2$ から求められる不変双一次形式は次の様なものである：

<u>定理 2</u>（予想）次の各場合不変双一次形式が存在する。

(i) cが正整数のとき，$\mathcal{R}^{c,m}$ と $\mathcal{R}^{c,m^w}$ の間で存在し，その形は，

$$B(\varphi,\varphi')=\int_{\mathbb{R}^{n-1}}{}^t(\mathbb{D}_I(\eta-\eta')\varphi(\eta))\,\varphi'(\eta')\,d\eta\,d\eta'$$

(ii) $G=SO_0(4.1)$, c が正整数 $>\ell$ のとき，$\mathcal{R}^{c,\ell}$ と $\mathcal{R}^{-\ell,c}$ の間で存在し，その形は

$$B(\varphi,\varphi')=\int_{\mathbb{R}^{n-1}} {}^t(\mathbb{D}_{\mathrm{II}}(\eta-\eta')\varphi(\eta))\,\varphi'(\eta')\,d\eta\,d\eta'$$

$$\mathbb{D}_{\mathrm{II}}(\eta)=(D^{c-\ell}_{c-\ell}\,T^{c-\ell}_{-(c-\ell)}-D^{c-\ell}_{c-\ell-1}\,T^{c-\ell}_{-(c-\ell)+1}+\cdots$$
$$\cdots+D^{c-\ell}_{-(c-\ell)}\,T^{c-\ell}_{c-\ell})\,\delta(\eta)$$

(iii) G は同じく，c が負の整数で $-c<\ell$ のとき，$\mathcal{R}^{c-\ell}$ と $\mathcal{R}^{\ell,-c}$ の間で存在し，その形は

$$B(\varphi,\varphi')=\int_{\mathbb{R}^{n-1}} {}^t(\mathbb{D}_{\mathrm{III}}(\eta-\eta')\varphi(\eta))\,\varphi'(\eta')\,d\eta\,d\eta'$$

$$\mathbb{D}_{\mathrm{III}}(\eta)=(D^{c+\ell}_{c+\ell}\,T^{c+\ell}_{-(c+\ell)}-D^{c+\ell}_{c+\ell-1}\,T^{c+\ell}_{-(c+\ell)+1}+\cdots$$
$$\cdots+D^{c+\ell}_{-(c+\ell)}\,T^{c+\ell}_{c+\ell})\,\delta(\eta)$$

(iv) 任意の $\chi=(c,m)$ に対して，$\mathcal{R}^{c,m}$ と $\mathcal{R}^{-c,m}$ の間で存在し，その形は

$$B(\varphi,\varphi')=\int_{\mathbb{R}^{n-1}} {}^t(\varphi(\eta))\,\varphi'(\eta)\,d\eta$$

(以上)

I_1 から求められた不変双一次形式と，I_2 から求められるそれとは成立の条件が異なっている。だから I は I_1

が II_2 のどれかに等しいのであって，それらの一次結合で書かれることはない（II_1, II_2 は定数倍を除いてきまっている）。定理1，2で挙げた不変双一次形式は $G = SO_0(4.1)$ の場合はこれですべてであり，$SO_0(n.1)$ の場合もほゞ類似していると思われる。

§6. Intertwining operators

$\mathcal{R}^{\chi}$ から $\mathcal{R}^{\chi'}$ への intertwining operator A とは，$T_g^{\chi'}A = AT_g^{\chi}$ を満足する $\mathcal{D}_{\chi}$ から $\mathcal{D}_{\chi'}$ への連続作用素である。$\mathcal{R}^{c.m}$ と $\mathcal{R}^{c',m'}$ の間に不変双一次形式が存在したとき，

$$B(\varphi, \varphi') = \int {}^t(A(\eta-\eta')\varphi(\eta))\varphi(\eta')\,d\eta\,d\eta'$$

とおくことによって，$\mathcal{R}^{c,m}$ から $\mathcal{R}^{-c',m'}$ への intertwining operator

$$A : \varphi(\eta) \longmapsto \varphi(\eta') = \int A(\eta-\eta')\varphi(\eta)\,d\eta \qquad (6.1)$$

を得る。定理1，2の諸結果より次の定理が得られる。（定理2が予想だから次の定理も予想である。）

<u>定理 3</u> 表現 $\mathcal{R}^{c.m}$ に対して与えられる intertwining operator は次の通りである。

(1) 任意の複素数 c（正整数を含む）と，任意の表現 m に対して，

$$A_{\mathrm{I}}\varphi(\eta')=\frac{1}{\Omega_{n-1}\Gamma(-c)}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|\eta-\eta'|^{-2c-(n-1)}m({}^{t}[\eta-\eta'])\,\varphi(\eta)\,d\eta$$

は $\mathcal{R}^{c,m}$ を $\mathcal{R}^{-c,m^w}$ に移す作用素である。

(2) $G=SO_0(4.1)$ の場合，c を正整数 $>l$ とするとき，

$$A_{\mathrm{II}}\varphi(\eta')=\int_{\mathbb{R}^3}\mathbb{D}_{\mathrm{II}}(\eta-\eta')\,\varphi(\eta)\,d\eta$$

は $\mathcal{R}^{c,l}$ を $\mathcal{R}^{l,c}$ に移す作用素である。

(3) G は同じく，c が負の整数で $-c<l$ のとき，

$$A_{\mathrm{III}}\varphi(\eta')=\int_{\mathbb{R}^3}\mathbb{D}_{\mathrm{III}}(\eta-\eta')\,\varphi(\eta)\,d\eta$$

は $\mathcal{R}^{c,l}$ を $\mathcal{R}^{-l,-c}$ に移す作用素である。　　　　（以上）

Intertwining operator A によって得られる関係を図で描けば：

c が整数でないとき

$$\mathcal{R}^{c,m}\ \overset{A_{\mathrm{I}}}{\Longleftrightarrow}\ \mathcal{R}^{-c,m^w}\qquad(\Leftrightarrow\ は同値)$$

$G = SO_0(4, 1)$，cを整数 $> l$ として

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{R}^{c,l} \arrow[r, shift left, "A_{\mathrm{I}}"] \arrow[d, "A_{\mathrm{II}}"'] & \mathcal{R}^{-c,l} \arrow[l, shift left] \\
\mathcal{R}^{l,c} \arrow[r, shift left, "A_{\mathrm{I}}"] & \mathcal{R}^{-l,c} \arrow[l, shift left] \arrow[u, "A_{\mathrm{III}}"']
\end{tikzcd}
$$

（$\rightleftarrows$ は部分同値）

なおこの図は平井武氏より，より一般的な形のものを教えて頂いた，その一部である。