数理解析研究所講究録
第166巻 1972年 18-30

von Neumann 代数の自己同型写像群と不変汎函数について

東北大 理　斎藤和之

von Neumann 代数 M の * 自己同型写像群 G を dual pair (M_*, M) (M_* は M の predual) の中で，非可換力学系の変換群としてとらえるべく，G 不変正規正値線形汎函数 (不変測度) の存在条件を M_* の弱 compact 集合を使用して調べ，あわせて M における "G-有限性" (不変測度が充分沢山ある) と Murray-von Neumann の "有限性" の差を浮き彫りにしよう。

M を Hilbert space $\mathfrak{H}$ 上に作用する von Neumann 代数 (v. N. 代数) とし，G を M の unitarily に implement された *-automorphisms の a group とする。すなわち $g \to u_g$ (G の $\mathfrak{H}$ 上の unitary 表現) が $u_g^* M u_g = M_g$ ($\forall g$) を満して存在する。今後 $a^g = u_g^* a u_g$ $\forall a \in M$ とも書く。

Definition 1 (Størmer)。今 e, f を M の射影元とし，$e \overset{G}{\sim} f$ (G-equivalent) であるというのは，各 $g \in G$ に対して，$e = \sum_{g \in G} a_g a_g^*$, $f = \sum_{g \in G} u_g^* a_g^* a_g u_g$ なる $a_g \in M$ が存在するとき

であり，$e \overset{G}{\succ} f$ ($e \overset{G}{\prec} f$) とは，$e(f)$の，$f(e)$と G-equivalentな部分射影元の存在するときである。

◎ MとGの接合積を使用することにより上の$\overset{G}{\sim}$は確かに同値関係になりさらに完全加法的であることがわかる．すなわち $\{e_\alpha\}$, $\{f_\alpha\}$ をMの射影元の直交族とし各αに対して，$e_\alpha \overset{G}{\sim} f_\alpha$ ならば，$\sum e_\alpha \overset{G}{\sim} \sum f_\alpha$ である。

◎ Mが abelian, σ-finite の場合，上の$\overset{G}{\sim}$は，Hopf の確率空間に導入した equivalence (Hopf-equivalence) と同値になり，Mが一般の場合は，Murray，von Neumann の導入した equivalence ($\sim$) を含む (Størmer [6])。

次に$\mathfrak{U}$をMの，Mの unitary元により implement される inner automorphisms 全体のつくる group とし，$\widehat{G}$をGと$\mathfrak{U}$により代数的に生成される automorphism group とする。

その時，equivalence relation $\overset{G}{\sim}$に関して次のような比較定理が成立する。

Proposition 1. Mの射影元の対e, fに対して，Mの$\widehat{G}$による fixed subalgebra $M^{\widehat{G}}$ (MのGによる fixed subalgebraをM^Gとし，Mの center をZとすると，$M^{\widehat{G}} = M^G \cap Z$) の射影元$z$が，$ez \overset{G}{\succ} fz$，　$e(1-z) \overset{G}{\prec} f(1-z)$ なる如く存在する。

◎ abelian case は，Størmerにより示された。[5]

このことを使用すると Murray-von Neumann の equivalence

の場合と同様にして次の命題が成立する。

Proposition 2. M が G~finite (i.e. $1 \overset{G}{\sim} e \Rightarrow e=1$) ならば、もし M の射影元 e, f に対して、$e \overset{G}{\sim} f$ が成立すれば、$1-e \overset{G}{\sim} 1-f$ である。

以上の準備のもとに次のことが成立する。

Theorem 1. M が G~finite であることゝ、M が $\widetilde{G}$-finite (i.e. M に $\widetilde{G}$-不変 normal states (G-invariant normal traces) が充分沢山存在する) であることは、同値である。

以下この証明をしよう。[9] と類似の方法によった。

Lemma 1. (M は G~finite とする。) e, f を M の射影元，$\{e_k\}$ を M の射影元の単調増加列で、$e_k \uparrow e$，$e_k \overset{G}{\precsim} f\ (\forall k)$ とする。その時，$e \overset{G}{\precsim} f$ ($\overset{G}{\precsim}$ の連続性)である。

証明)．$e_1 \overset{G}{\sim} f_1 \leqq f$ とする。

$k \geqq 1$ に対して，$f_1, f_2, \cdots, f_k$ (M の射影元) が，$f_i f_j = 0\ (i \neq j)$ ($1 \leqq i < j \leqq k$) 且つ $\sum_{i=1}^{k} f_i \leqq f$ 且つ，$e_{i+1} - e_i \overset{G}{\sim} f_{i+1}$ $1 \leqq i \leqq k-1$ なる如くとれたとする。$e_{k+1} \overset{G}{\precsim} f$ 且つ M が G~finite であるから Prop. 2 により $1-e_{k+1} \overset{G}{\succsim} 1-f$．従って，$e_k \overset{G}{\sim} \sum_{i=1}^{k} f_i$ によって，

$$1-e_{k+1}+e_k \overset{G}{\succsim} 1-f+\sum_{i=1}^{k} f_i$$

よって Prop. 2 から

$$e_{k+1}-e_k \overset{G}{\precsim} f-\sum_{i=1}^{k} f_i 。$$

すなわち $\exists f_{k+1} \in M$：射影元，$e_{k+1}-e_k \overset{G}{\sim} f_{k+1} \leqq f-\sum_{r=1}^{k} f_r$ 。

この操作をつづけることにより，$\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ を，

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i \leqq f, \qquad e_{i+1} - e_i \overset{G}{\sim} f_{i+1} \ (\forall i)$$

なる如く撰べる。従って，

$$e = e_1 + \sum_{i=1}^{\infty} (e_{i+1} - e_i) \overset{G}{\sim} \sum_{i=1}^{\infty} f_i \leqq f。$$

以上．

Lemma 2. 今 M を Lemma 1 の仮定のもとに M の predual M_* に於いて，$(T_g\varphi)(a) = \varphi(a^g)$ $\varphi \in M_*$, $a \in M$, $g \in \widetilde{G}$ とする（T_g は M_* の linear isometry）。かってな $\varphi \in M_*$ に対して，

$$K \equiv \{T_g\varphi \ ; \ g \in \widetilde{G}\}$$

は，weakly $(\sigma(M_*, M))$ relatively compact である。

証明）もしそうでなければ [1] により M の射影元列 $\{e_n\}$ 及び正の実数列 $\varepsilon (>0)$，$\{\varphi_n\} \subset K$ があって

$$|\varphi_n(e_n)| \geqq \varepsilon \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

である。$\varphi_n = T_{g_n}\varphi$，$f_n = e_n^{g_n}$ として，$f_n \overset{G}{\sim} e_n$ である。

今 $p_n \equiv \sum_{m=n}^{\infty} e_m$，$q_n \equiv \bigvee_{m=n}^{\infty} f_m$ とすれば，$p_n \downarrow$，$q_n \downarrow$ である。

$q \equiv \bigwedge_{n=1}^{\infty} q_n$ とする。n fix をかってにとり，$r_k = \bigvee_{i=n}^{n+k} f_i$ とする。

今 $k \geqq 1$ で $r_{k-1} \overset{G}{\precsim} \sum_{i=n}^{n+k-1} e_i$ を仮定する（$k=1$ なら $r_0 = f_n \overset{G}{\sim} e_n$）。

$$r_k = r_{k-1} + (r_{k-1} \vee f_{n+k} - r_{k-1}),$$

$$r_{k-1} \vee f_{n+k} - r_{k-1} \overset{G}{\sim} (\sim) f_{n+k} - r_{k-1} \wedge f_{n+k} \leqq f_{n+k} \overset{G}{\sim} e_{n+k}$$

から $r_k \overset{G}{\precsim} \sum_{i=n}^{n+k} e_i$ が成立する。よって，$r_k \overset{G}{\precsim} p_n$ $(\forall k)$ から Lemma 1 から $q_n = \bigvee_{k=1}^{\infty} r_k \overset{G}{\precsim} p_n$ $(\forall n)$ である。従って $1 - q_n \overset{G}{\succsim} 1 - p_n$，

$\sup_n (1-f_n) = 1$ から，Lemma 1 により $1-q \overset{G}{\succ} 1$，M の G~finiteness から $q=0$ が成立。$q_n \geq f_n$ より $f_n \to 0\,(\sigma)$ であり，$|\varphi(f_n)| \geq \varepsilon\ (n=1,2,3,\cdots)$ に矛盾する。従って，K は weakly relatively compact である。

以上。

Theorem 1 の証明。M を G~finite として $\psi \in M^{\tilde{G}}{}_*$ ($M^{\tilde{G}}$ の predual) ($\underset{\|\psi\|=1}{\psi \geq 0}$) とすると extension theorem により $\varphi \in M_*$ $\varphi \geq 0$，$\varphi(c) = \psi(c)\ \forall c \in M^{\tilde{G}}$，$\|\varphi\| = \|\psi\| = 1$ なる φ が存在する。今

$$\mathcal{Q}(\varphi) \equiv \overline{co}\{T_g\varphi,\ g \in \tilde{G}\}$$ ($\overline{co}$ は $\{T_g\varphi,\ g \in \tilde{G}\}$ の strong convex closure) とすれば，Krein - Šmulian の Theorem 及び Lemma 2 から $\mathcal{Q}(\varphi)$ は weakly compact である。又 $\{T_g\ ;\ g \in \tilde{G}\}$ なる group は，$\mathcal{Q}(\varphi)$ 上 non-contracting (distal) に，affinely に act している (i.e. $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{Q}(\varphi)$, $\psi_1 \neq \psi_2$ なら $\inf_{g \in \tilde{G}} \|T_g\psi_1 - T_g\psi_2\| \geq \delta > 0$ for some $\delta > 0$)。従って，Ryll-Nardzewski の fixed point theorem ([2]) により $\exists \tilde{\varphi} \in \mathcal{Q}(\varphi)$: $T_g\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}\ \forall g \in \tilde{G}$ である。$\varphi \geq 0$ から $\tilde{\varphi} \geq 0$ であり $\tilde{\varphi}$ は M 上の G-不変 normal state である。今 $t \neq 0$，$t \in M^{\tilde{G}}$ とする ($t \geq 0$) と，$\exists \psi \in (M^{\tilde{G}})_*$ state : $\psi(t) \neq 0$。よってこの ψ に対して，上の $\tilde{\varphi}$ をとると，$\tilde{\varphi}(t) = \psi(t) \neq 0$。従って，Kovács - Szücs の Theorem 1 によって，([3]) M は $\tilde{G}$ - finite である。

逆は明らかである。

以上。

この定理の σ-finite case は，Størmer により automorphism の分解定理（free action に関する Kallman の Theorem）を使用して証明されたが複雑であった。Yeadon [9] は，$G = \mathfrak{N}$ の場合上の方法で，normal trace の存在を，dimension function を全然使用せずに証明した。

今ここで Kovács - Szücs により与えられた G-不変測度の存在条件を述べておこう。

Kovács - Szücs の定理。M を v.N. 代数とし，G を M の *- automorphism group とする。今 M が G-finite（G-invariant normal states が M の正元を分離するぐらい充分沢山ある）ならば，$\forall t \in M$ に対して，

$$\widetilde{Co}(t, M) \cap M^G$$

は one point set である（但し $\widetilde{Co}(t, G)$ は，t の G による orbit の weak convex hull である）。さらにその unique element を $\Phi_G(t)$ とすると，$t \to \Phi_G(t)$ は，M onto M^G の faithful normal G-invariant projection of norm one（G-expectation）で，すべての G-invariant normal state σ に対して，$\sigma = \sigma \circ \Phi_G$ である。逆に M onto M^G の G-(invariant) expectation があれば，M は G-finite で，その G-expectation は $\Phi_G(\cdot)$ である。

次にG〜finitenessの別のcharacterizationを述べよう。

Theorem 2. M が G〜finiteであるための必要充分条件は、M_* のかってなweakly relatively compact subset K に対して

$$\{T_g\varphi\ ;\ \varphi \in K,\ g \in \widetilde{G}\}$$

が又weakly relatively compactとなることである。

実は、Størmerは、M が G-finiteであるための必要充分条件は G に関して（$\widetilde{G}$ ではない！）Lemma 2の命題が成立することであることを示した（[7]）。

abelian caseなら次のように記述できる。

$(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を σ-finite measure spaceとし、G を X 上にleft operateする a discrete group $\xi \longrightarrow s\xi$, $\xi \in X$ とし、μ をquasi-invariant, i.e. $\mu(sE)=0 \rightleftarrows \mu(E)=0$ all $E \in \mathfrak{M}$ とする。

$$d\mu(s\cdot\xi) = r_s(\xi)\, d\mu(\xi) \text{ を Radon-derivative}$$

としよう。$\langle a^s, f\rangle = \langle a, r_{s^{-1}}(\cdot) f(s^{-1}\cdot)\rangle$ に注意して、

Corollary 1. $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ がHopf-finiteであるための必要充分条件は、$L^1(X, \mathfrak{M}, \mu)$ のかってな、weakly relatively compact subset K に対して、

$$\{r_{s^{-1}}(\cdot) f(s^{-1}\cdot),\ f \in K,\ g \in G\}$$

が $L^1(X, \mathfrak{M}, \mu)$ で、weakly relatively compactになることである。

$G=\mathbb{R}$ の case は次の様である。

Corollary 2. M が finite であるための必要充分条件は，$K\subset M_*$ なるかってな weakly relatively compact subset に対して，

$$\{T_g\varphi\ ;\ \varphi\in K\ ,\ g\in\mathbb{R}\}=\{u^*\varphi u\ ;\ \varphi\in K,\ u:\text{unitary of } M\}$$

が又 weakly relatively compact となることである。

Corollary 3. 特に M が finite ならば，M が G-finite であるための必要充分条件は，$\forall K\subset M_*$ weakly relatively compact subset に対して，

$$\{T_g\varphi\ ;\ g\in G,\ \varphi\in K\}$$

が又 weakly relatively compact となることである。

Theorem 2 の証明。以下 M が $G\sim$finite を仮定する。

1段。$\{\varphi_i\}\subset M_*$: $\varphi_i\to\varphi_0$ weakly ($\varphi_0\in M_*$) とし，$\{a_n\}$ を M の unit sphere S の sequence で，0 に strongly に収束するものとする。その時，

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_i(a_n^g)=0 \quad \text{uniformly for } i=1,2,3,\cdots,\ g\in\widetilde{G}$$

である。

証明）$\varphi=\sum\frac{|\varphi_i|}{2^i\|\varphi_i\|}$ とし，φ の M に於ける台を e_φ とし，e_φ の $M^G\cap Z\ (=M^{\widetilde{G}})$ に於ける台を $z^G(e_\varphi)$ とする。その時，$M_{z^G(e_\varphi)}$ 上に $\widetilde{G}$ は natural に act するから $M_{z^G(e_\varphi)}$ は，$G\sim$finite

である。さらに $M_{z^G(e_\varphi)}$ は，σ-finite である。というのは，$M_{z^G(e_\varphi)}$ に於ける $\widetilde{G}$ の fixed subalgebra は，$(M^G \cap Z)_{z^G(e_\varphi)}$ であり，従って Kovács の定理から $M_{z^G(e_\varphi)}$ onto $(M^G \cap Z)_{z^G(e_\varphi)}$ への faithful normal $\widetilde{G}$-invariant projection of norm one が存在するので，$(M^G \cap Z)_{z^G(e_\varphi)}$ が σ-finite を示せば充分である。φ の $M^G \cap Z$ に於ける台を e_φ' とすると $z^G(e_\varphi) \leqq e_\varphi'$ であるからこれは明らかである。又 $\varphi_i(a) = \varphi_i(a z^G(e_\varphi))$ $\forall a \in M, \forall i$ となるから M を σ-finite と仮定して，一般性を失なわぬ。

よって，Theorem 1 から，M には，faithful normal G-invariant trace が存在する。それを τ としよう。

$S \ni x, y$ に対して，

$$d(x,y) \overset{\mathrm{def}}{=} \tau((x-y)^*(x-y))^{1/2}$$

とすると (S, d) は，complete metric space である。

$$H_i \overset{\mathrm{def}}{=} \{ a \ ; a \in S \ |\varphi_j(a) - \varphi_0(a)| \leqq \varepsilon \ \ \forall j \geqq i \}$$

とすれば，H_i は closed で，$S = \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$ となる。

従って Baire の Theorem によって，$\exists a_0 \in S \ ; \exists \beta > 0$ (real)；$\exists j_0 : \quad S \cap \{ a \ ; d(a, a_0) \leqq \beta \} \subset H_{j_0}$ となる。

M が finite algebra であるから命題を示すには，$a_n = a_n^*$ として一般性を失なわぬ。従って M の射影元の列 $\{e_n\}$ が，$e_n \to 1$ (s)，$\|a_n e_n\| \leqq \varepsilon/6$ $n = 1, 2, 3, \cdots$ なる如く存在する。

$\|(a_n e_n)^g\| = \|a_n e_n\|$ $\forall g \in \widetilde{G}$ に注意して，

$$|(\varphi_j-\varphi_0)(a_n^g)|$$

$$\le |(\varphi_j-\varphi_0)(e_n^g a_n^g e_n^g)| + |(\varphi_j-\varphi_0)(e_n^g a_n^g (1-e_n^g))|$$

$$+ |(\varphi_j-\varphi_0)((1-e_n^g)a_n^g e_n^g)| + |(\varphi_j-\varphi_0)((1-e_n^g)a_n^g(1-e_n^g))|$$

$$\le \varepsilon + |(\varphi_j-\varphi_0)((1-e_n^g)a_n^g(1-e_n^g))|$$

となる。

今 $b_n(g) \equiv e_n^g a_0 e_n^g + (1-e_n^g)a_n^g(1-e_n^g) \in S$ とすると,

$$\tau((b_n(g)-a_0)^*(b_n(g)-a_0))^{1/2}$$

$$\le \tau((1-e_n^g)a_n^g(1-e_n^g)a_n^g(1-e_n^g))^{1/2}$$

$$+ \tau((1-e_n^g)a_0^*(1-e_n^g)a_0(1-e_n^g))^{1/2}$$

$$+ \tau((1-e_n^g)a_0^* e_n^g a_0(1-e_n^g))^{1/2}$$

$$+ \tau(e_n^g a_0^*(1-e_n^g)a_0 e_n^g)^{1/2}$$

$$\le 3\tau(1-e_n^g)^{1/2} + \tau((1-e_n^g)a_0 e_n^g a_0^*(1-e_n^g))^{1/2}$$

$$\le 4\tau(1-e_n^g)^{1/2} = 4\tau(1-e_n)^{1/2}。$$

従って $1-e_n \to 0\ (s)$ から g に independent に $n_0(\beta)$ が(自然数)とれて,

$$\tau((b_n(g)-a_0)^*(b_n(g)-a_0))^{1/2} < \beta \quad \forall n \ge n_0(\beta)。$$

又 $e_n^g a_0 e_n^g \in S$ から

$$\tau((e_n^g a_0 e_n^g - a_0)^*(e_n^g a_0 e_n^g - a_0))^{1/2} \le 3\tau(1-e_n)^{1/2}$$

から $\exists\, n_1(\beta)$ (g に independent)(自然数):

$$3\tau(1-e_n)^{1/2} < \beta \quad \forall n \ge n_1(\beta)。$$

今 $n \ge n_0(\beta) \vee n_1(\beta)$ とすると,

$$|(\varphi_j - \varphi_0)((1-e_n^g)a_n^g(1-e_n^g))| \leqq 2\varepsilon$$

$\forall j \geqq j_0$ よって，全体として，

$$|(\varphi_j - \varphi_0)(a_n^g)| \leqq 3\varepsilon \quad \forall j \geqq j_0,\ \forall n \geqq n_0(\beta) \vee n_1(\beta)。$$

残りの $|(\varphi_j - \varphi_0)(a_n^g)|$, $j=1, 2, \cdots, j_0-1$, $(\forall g \in \widehat{G})$ の部分は，次のようである。

$$\{ T_g(\varphi_j - \varphi_0),\ T_g\varphi_0,\ j=1,2,\cdots,j_0-1,\ g \in \widehat{G} \}$$

は，Theorem 1 の証明からわかるように weakly relatively compact である。よって Akemann [1] の定理により，$\exists \psi \in M_*$, $\psi \geqq 0$: $\forall \varepsilon > 0$ に対して，$\exists \delta > 0$:

$$\psi(a^*a + aa^*) < \delta \ (a \in S) \Rightarrow |(T_g(\varphi_j - \varphi_0)(a)| < \varepsilon, \quad |T_g\varphi_0(a)| < \varepsilon$$

$\forall g \in \widehat{G}$, $j=1,2,3,\cdots,j_0-1$

である。今 $a_n \to 0$ (S) から $\exists n_2(\varepsilon)$: $\forall n \geqq n_2(\varepsilon)$ に対して，

$$|(\varphi_j - \varphi_0)(a_n^g)| < \varepsilon, \quad |\varphi_0(a_n^g)| < \varepsilon$$

$\forall g \in \widehat{G}$, $j=1,2,3,\cdots,j_0-1$。 従って，前半とあわせて，

$$\left.\begin{array}{l} |(\varphi_j - \varphi_0)(a_n^g)| \to 0 \quad (n \to \infty) \\ |\varphi_0(a_n^g)| \to 0 \quad (n \to \infty) \end{array}\right\} \text{uniformly for } g \in \widehat{G},\ j=1,2,\cdots。$$

よって $|\varphi_j(a_n^g)| \to 0$ $(n \to \infty)$ uniformly for $g \in \widehat{G}$, $j=1,2,3\cdots$。

今定理の証明をする。$\{T_g\varphi,\ \varphi \in K,\ g \in \widehat{G}\}$ が weakly relatively compact であることをいうには，かってな $\{e_n\}$ M の射影元の直交列に対して，

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(e_n^g) = 0 \quad \text{uniformly for } g \in \widehat{G},\ \varphi \in K$$

をいえばよい。もしそうでなければ，$\exists \{e_n\}$: $\exists \varepsilon_0 > 0$
$\exists\, n_k$ $(n_k \uparrow 1)$ $(k=1,2,\cdots)$ $\exists\, g_k \in \hat{G}$，$\exists\, \varphi_k \in K$ $k=1,2,3,\cdots$:

$$(*) \qquad |\varphi_k(e_{n_k}^{g_k})| \geq \varepsilon_0 \qquad k=1,2,3,\cdots。$$

Eberlein - Šmulian の Theorem から $\exists \{\varphi_{k_p}\} \subset \{\varphi_k\}$: $(k_p \uparrow \infty)$
$\varphi_{k_p} \to \varphi_0$ weakly $(p \to \infty)$，$\exists \varphi_0 \in M_*$ である。$e_{n_{k_p}} \to 0$
(S) から前半により，

$$\varphi_{k_{p'}}(e_{n_{k_p}}^{g}) \to 0 \; (p \to \infty) \text{ uniformly for } p', g \in \hat{G}$$

となり (*) に矛盾する。よって $\{\varphi \circ g \,;\, \varphi \in K, g \in \hat{G}\}$ は，
weakly relatively compact である。
逆は，Theorem 1 及び Kovács - Szücs の Theorem による。

以上。

G-finite でも $\hat{G}$-finite でない例が沢山あるし，Corollary 3 を一般の場合に拡張することが今後の問題となろう。

文　献

[1] C.A. Akemann : The dual space of an operator algebra, Trans. Amer. Math. 126 (1967), 286–302.

[2] F.P. Greenleaf : Invariant means on topological groups, Van Nostrand, New York (1969).

[3] I. Kovács - J. Szücs : Ergodic type theorems in von Neumann algebras, Acta Sci. Math., 27 (1966),

233-246.

[4] S. Sakai: C^*-algebras and W^*-algebras, Springer.

[5] E. Størmer: Large groups of automorphisms of C^*-algebras, Comm. Math. Phys. 5 (1967), 1-22.

[6] ________: Automorphisms and equivalence in von Neumann algebras, To appear.

[7] ________: Invariant states of von Neumann algebras, To appear.

[8] ________; Invariant measures and von Neumann algebras, unpublished.

[9] F. J. Yeadon: A new proof of the existence of a trace in a finite von Neumann algebra, Bull. Amer. Math. Soc. 77 (1971), 257-260.

[10] T. Hamachi: Construction of the finite center-valued relative dimension function of a W^*-algebra, and invariant measures, To appear.

[11] K. Saitô: Automorphism groups of von Neumann algebras and Ergodic type theorems, To appear.