数理解析研究所講究録
第166巻 1972年 31-53

W*-algebraの中心の値をとる相対次元関数の構成と，不変測度

九大 教養 洲之内 敏弘

§0. 序

確率空間$(\Omega, \mathcal{B}, P)$に作用するnon-singular transformation Tに対して，その不変測度の存在の為の必十条件がエルゴード理論の方で研究されてきた。

ところでnon-singular transformation T (invertible)は，可換W*algebra $L^\infty(\Omega, \mathcal{B}, P)$に作用する自己同型写像群$\mathcal{G}$をひきおこし，従ってそれと$L^\infty(\Omega, \mathcal{B}, P)$とによるcross product W*algebra $\mathcal{O}_T$が作られる(尚，ここではnon-singular transformation Tはergode性もfree actionも仮定していないことを注意しておく)。すると

(1) Ω-setがE. Hopf [3]の意味でbounded (§2. Def.　)

$\rightleftarrows$ cross product W*algebra $\mathcal{O}_T$の基礎Hilbert空間$\mathfrak{H}_T$が，

F. J. Murray-J. von Neumannの意味でfinite space

(§2. Theorem II)

(2) 可測集合 A, B に対して A と B が non-singular transformation T のもとで同値（§2. Def. ）（或いは $L^\infty(\Omega, \mathcal{B}, P)$ の projections L_{χ_A}, L_{χ_B} が自己同形写像群 $\mathcal{G}$ の下で同値であるといってもよい）
$\rightleftarrows$ cross product W^*-algebra $\mathfrak{A}_T$ の projections $\hat{L}_{\chi_A}$, $\hat{L}_{\chi_B}$ が Murray-Neumann の意味で同値。

ここで $\hat{L}_{\chi_A}$ は L^∞ の projection L_{χ_A} を cross product に自然に埋めこんだ projection。（§2. Theorem III）

が成り立つことが分かる。この証明は不変測度が与えられているときは容易である。けれども我々は不変測度を介せずに (1), (2) を証明し、次に述べるようにこの対応関係から、E. Hopf の条件（Ω-set が bounded）のもとで不変測度を構成したい。（この研究会での斎藤氏の紹介にあったStørmer の結果はまさに (1) (2) のことだがそれは不変測度を用いての証明であって、Størmer自身も述べているように不変測度を介せずして証明を与えることが問題である）。

我々は同値有限不変測度を構成しかつそれらすべての形を決定する為に、W^* algebra（必ずしも factor ではない）の中心の値をとる有限相対次元関数を導入する（§1. Def. ）。factor のときはそれは Murray-Neumann の有限相対次元関数と考えられる。ところで Murray-Neumann は factor に

対して、もしその基礎Hilbert空間がfiniteならば有限相対次元関数が存在することを示した[4]。我々はMurray-Neumannの方法をnon-factorの場合に拡張することによって基礎Hilbert空間$\mathfrak{H}$がfiniteならば中心の値をとる有限相対次元関数が得られることを示そう(§1. Theorem I)。ところでJ. Dixmier[1]は同じ条件の下でnatural mappingを構成したがその定義域をprojectionsの全体に制限すれば中心の値をとる有限相対次元関数である。けれども我々の構成はJ. Dixmierのそれとは全く異なる。

いわばnatural mappingは確率論における条件付確率に相応し、我々の関数は条件付確率に相応する。

E. Hopf[3]はΩ-setがboundedならば同値有限不変測度が存在することを示したが、§3でこのHopfの条件の下で同値有限不変測度の存在とそのすべての形を、cross product W*algebra $\mathfrak{A}_T$の中心の値をとる有限相対次元関数を用いて示す(§3. Theorem IV, V)

§1. 中心の値をとる有限相対次元関数の構成

1.1. 準備

$\mathfrak{A}$を基礎Hilbert空間$\mathfrak{H}$の上のW*algebraとしそれを対$(\mathfrak{A}, \mathfrak{H})$で表わす。$\mathfrak{A}$の中心を$\mathfrak{Z}$で、$\mathfrak{A}(\mathfrak{Z})$のprojectionsの全体を$\mathfrak{A}^P(\mathfrak{Z}^P)$で、$\mathfrak{A}(\mathfrak{Z})$のpositive operatorsの全体を$\mathfrak{A}^+(\mathfrak{Z}^+)$で表わす。

§1

projectionの間の同値関係を$E \overset{\mathfrak{A}}{\sim} F$ (i.e. $E, F\in\mathfrak{A}^P$に対し$\exists V\in\mathfrak{A}$が存在し$V^*V=E$, $VV^*=F$)で表わす。順序関係を$E \overset{\mathfrak{A}}{\prec} F$ (i.e. $\exists F'\leqq F$, $F'\in\mathfrak{A}^P$が存在し$E\overset{\mathfrak{A}}{\sim}F'$)で表わす。もし$E\overset{\mathfrak{A}}{\sim}F\leqq E$ならば$F=E$であるとき$E$をfinite projection, $E(\mathfrak{H})$をfinite spaceといい、そうでないときinfinite projection, infinite spaceという。

もしあるn個の互いに直交し同値な$\overset{\mathfrak{A}の}{\text{projections}}$ $\{E_i\}_{0\le i\le n-1}$が存在し$\sum_{i=0}^{n-1}E_i = I$ (identity operator)でかつreduced W*-algebra $\mathfrak{A}_{E_i}=\{E_iAE_i \mid A\in\mathfrak{A}\}$が可換ならば、W*-algebra $(\mathfrak{A},\mathfrak{H})$はtype n homogeneousであると云い、$I\sim nE_0$で表わす。$E\in\mathfrak{A}^P$に対しそのcentral supportを$\overline{E}$で表わす。この節では以後特に断わらない限り$\mathfrak{H}$はfinite spaceである。

1.2. 比較定理と、あるpositive operator $\Phi_E\left(\frac{F}{H}\right)$

$E,F\in\mathfrak{A}^P$に対して、$\exists G\in\mathfrak{Z}^P$が存在し$EG\overset{\mathfrak{A}}{\prec}FG$, $F(I-G)\overset{\mathfrak{A}}{\prec}E(I-G)$をみたすことは良く知られている(比較定理)。そこでもし基礎空間$\mathfrak{H}$がfiniteならば、このことから$\mathfrak{A}$のprojectionsの対(E,F)に対し互いに直交する高々可算個の中心のprojections $\{G_n\}_{n\ge0}$が一意に定まり (1) $\sum_{n\ge0}G_n=\overline{E}$ (2) Fに含まれる互いに直交するprojections $\{F_i\}_{i\ge1}$が存在し、$F_iG_n\overset{\mathfrak{A}}{\sim}EG_n$ $(1\le i\le n<\infty)$, $F_n^*G_n\overset{\mathfrak{A}}{\precneqq}EG_n$ $(0\le n<\infty)$ ここで$F_n^*=F-\sum_{i=1}^{n}F_i$ $(n\ge1)$, $F_0^*=F$。

projection G_nを$p(n;E,F)$で表わす。

<u>Lemma 1.1.</u> $(\mathfrak{A}, \mathfrak{Z})$ を type n homogeneous W^*-algebra $(I \sim nE_0 \quad 1 \leq n < \infty)$ とする。各 $F \in \mathfrak{A}^P$ に対し $\{P(i;E_0,F)\}_{i\geq 0}$ は次をみたす。

(1) $P(0;E_0,F)\bar{F} = 0$.　　(2) $P(k;E_0,F) = 0 \quad k > n$.

(3) F に含まれる互いに直交する n 個の projections $\{F_i\}_{1\leq i\leq n}$ が存在し

$$P(k;E_0,F)\Big(F - \sum_{i=1}^{k} F_i\Big) = 0, \qquad F_i P(k;E_0,F) \overset{\mathfrak{A}}{\sim} E_0 P(k;E_0,F) \qquad 1 \leq i \leq k \leq n$$

証明略.

<u>Definition 1.1.</u> $E \overset{\mathfrak{A}}{\prec} H$, $F \overset{\mathfrak{A}}{\prec} H$ をみたす $\mathfrak{A}$ の projections の組 (E,F,H) に対して positive operator $\Phi_E\left(\frac{F}{H}\right)$;

$$\Phi_E\left(\frac{F}{H}\right) = \sum_{1\leq i\leq k<\infty} \frac{i}{k} P(i;E,F)P(k;E,H) \qquad (\text{強収束})$$

を定義する。我々はこの級数の各係数が非負有界であり、各 projection $P(i;E,F)P(k;E,H)$ が互いに直交する中心 $\mathfrak{Z}$ の元であることに注意する。中心は強収束で閉じているから $\Phi_E\left(\frac{F}{H}\right) \in \mathfrak{Z}^+$.

<u>Proposition 1.1.</u> (1) $\Phi_E\left(\frac{E}{H}\right) = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k} P(k;E,H)$

(2) $F \overset{\mathfrak{A}}{\prec} E \quad \rightleftarrows \quad \Phi_E\left(\frac{F}{H}\right) = 0$

(3) $F \overset{\mathfrak{A}}{\sim} F' \quad \Longrightarrow \quad \Phi_E\left(\frac{F}{H}\right) = \Phi_E\left(\frac{F'}{H}\right)$

(4) $F' \in \mathfrak{Z}^P$, $\quad \Phi_E\left(\frac{FF'}{H}\right) = \Phi_E\left(\frac{F}{H}\right)F'$

(5) $E \overset{\mathfrak{A}}{\prec} E' \Rightarrow \quad \Phi_E\left(\frac{F}{H}\right) \leqq \left\{\Phi_{E'}\left(\frac{F}{H}\right) + \Phi_{E'}\left(\frac{E'}{H}\right)\right\}\left\{I + \Phi_E\left(\frac{E}{E'}\right)\right\}$

(6) $E \overset{\mathfrak{A}}{\prec} F \overset{\mathfrak{A}}{\prec} E' \Rightarrow \quad \Phi_E\left(\frac{E}{E'}\right) \leqq \Phi_F\left(\frac{F}{E'}\right)\Phi_E\left(\frac{E}{F}\right)$

(7) $\Phi_F\left(\frac{F}{H}\right) \leqq \left\{\Phi_E\left(\frac{F}{H}\right) + \Phi_E\left(\frac{E}{H}\right)\right\}\left\{I + \Phi_F\left(\frac{E}{H}\right)\right\}$

(8) $F^1F^2=0 \Rightarrow \Phi_E\left(\frac{F^1}{H}\right)+\Phi_E\left(\frac{F^2}{H}\right) \leqq \Phi_E\left(\frac{F^1+F^2}{H}\right) \leqq \Phi_E\left(\frac{F^1}{H}\right)+\Phi_E\left(\frac{F^2}{H}\right)+\Phi_E\left(\frac{E}{H}\right)$

Proof。(1)〜(4)の証明は明らか。(5)の証明。右辺を書き直すと
$$\sum_{\ell=1}^{\infty}\sum_{1\leq i'\leq k'<\infty}\left(\frac{1}{\ell}+1\right)\frac{i'+1}{k'}\,p(i';E',F)p(k';E',H)p(\ell;E,E')$$
$$+\sum_{\ell=1}^{\infty}\sum_{k'=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\ell}+1\right)\frac{1}{k'}\,p(0;E',F)p(k';E',H)p(\ell;E,E')$$
$p(i;E,F)p(k;E,H)p(i';E',F)p(k';E',H)p(\ell;E,E')\neq 0$ をみたす i,k,i',k',ℓ と $p(i;E,F)p(k;E,H)p(0;E',F)p(k';E',H)p(\ell;E,E')\neq 0$ をみたす i,k,k',ℓ とに対し各々不等式 $\left(\frac{1}{\ell}+1\right)\frac{i'+1}{k'} \geqq \frac{i}{k}$，$\left(\frac{1}{\ell}+1\right)\frac{1}{k'} \geqq \frac{i}{k}$ が成り立つことを示せばよい。容易に分かるように前者の場合 $k\geqq \ell k'$ かつ $i<(i'+1)(\ell+1)$　後者の場合 $k\geqq \ell k'$, $i<\ell+1$ が言へる。同様に(6)については $p(\ell;E,E')p(i;F,E')p(j;E,F)\neq 0$ ならば $\ell\geqq ij$ (7)については右辺を書き直すと $\sum_{\ell=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{1\leq i\leq k}\left(\frac{1}{\ell}+1\right)\left\{\frac{i}{k}p(i;E,F)+\frac{1}{k}I\right\}p(k;E,H)p(\ell;F,H)$。$p(\ell;F,H)p(k;E,H)\neq 0$ ならば $p(i;E,F)p(k;E,H)p(\ell;F,H)\neq 0$ をみたす $i\ (1\leq i\leq k)$ に対して $(i+1)(\ell+1)>k$ 。もしすべての $i\ (1\leq i\leq k)$ に対して $p(i;E,F)p(k;E,H)p(\ell;F,H)=0$ ならば $k<\ell+1$。(8)については $p(i;E,F^1+F^2)p(i';E,F^1)p(i'';E,F^2)\neq 0$ ならば $i'+i''\leqq i\leqq i'+i''+1$ 。

<u>Proposition 1.2.</u>　もし $(\mathfrak{A},\xi)$ が type n homogeneous $(I\sim nE_0,\ 1\leq n<\infty)$ ならば (1) $\Phi_{E_0}\left(\frac{F}{I}\right)$ の support $=\bar{F}$ 　(2) 互いに直交する可算個の projections $\{F^\ell\}_{\ell\geq 1}$ に対し $\Phi_{E_0}\left(\frac{\sum F^\ell}{I}\right)=\sum_{\ell\geq 1}\Phi_{E_0}\left(\frac{F^\ell}{I}\right)$

Proof. Lemma 1.1 からでる。

1.3. 構成.

我々の目的は基礎Hilbert空間$\mathfrak{H}$がfiniteならば次で定義する中心の値をとる有限相対次元関数が一意に存在することを示しその構成法を与えることである。

Definition 1.2、$\mathfrak{A}^P$から$\mathfrak{Z}^+$への写像Φが次をみたすときそれを中心の値をとる有限相対次元関数と呼ぶ。

(1) 互いに直交する可算個のprojections $\{E_n\}_{n\ge1}$に対し $\Phi\left(\sum_{n\ge1}E_n\right)=\sum_{n\ge1}\Phi(E_n)$ (強収束)

(2) $\Phi(E)=0 \rightleftarrows E=0$　　(3) $E\overset{\mathfrak{A}}{\sim}F \Rightarrow \Phi(E)=\Phi(F)$

(4) $\Phi(EF)=\Phi(E)F$　$E\in\mathfrak{A}^P,\ F\in\mathfrak{Z}^P$　　(5) $\Phi(I)=I$.

Theorem I 基礎空間$\mathfrak{H}$がfiniteならば中心の値をとる有限相対次元関数が一意に存在する。

定理の証明は続くいくつかのLemmasを経て証明される。

Lemma 1.2. もしW*algebra $\mathfrak{A}$が連続的(continuous)であれば次をみたす$\mathfrak{A}$の無限可算個のprojections $\{E_n\}_{n\ge0}$が存在する。

(1) $E_n > E_{n+1}$　(2) $\overline{E_n}=I$　(3) $p(0;E_{n+1},E_n)=p(1;E_{n+1},E_n)=0$.

Proof. 最初互いに直交するprojection E',F'が存在し,$E'\overset{\mathfrak{A}}{\sim}F'$, $\overline{E'}=I$をみたすことを言う。$\mathfrak{A}$が非可換だから$^\exists E\in\mathfrak{A}^P$, $^\exists$unitary op. $U\in\mathfrak{A}$が存在し$UEU^*\neq E$。従がって$^\exists E_0'\le E$, $^\exists F_0'\le I-E$, が存在し

$E_0' \overset{\mathcal{A}}{\sim} F_0'$。そこで E' を族 $\{E \in \mathcal{A}^P \mid {}^\exists F \in \mathcal{A}^P$ such that $EF=0,\ E \overset{\mathcal{A}}{\sim} F\}$ の極大元とすれば $\overline{E'} = I$。次に $E_0 = I,\ E_1 = E'$ とおけば $p(0; E_1, E_0) = 0$ $p(1; E_1, E_0) = 0$。今 n 個の projections $\{E_i\}_{0 \le i \le n-1}$ が存在し (1) (2) (3) を満している とする。reduced W*-algebra $\mathcal{A}_{E_{n-1}}$ が非可換だから E_{n-1} に含まれ互いに直交する projection E_n, F_n が存在し、この2つの projections は $\mathcal{A}_{E_{n-1}}$ の下で同値 $(E_n \overset{\mathcal{A}_{E_{n-1}}}{\sim} F_n)$ で、E_n の $\mathcal{A}_{E_{n-1}}$ の下での central support が E_{n-1} であるように選べる。reduced W*-algebra $\mathcal{A}_{E_{n-1}}$ の下で同値ならば $\mathcal{A}$ の下でも同値であり、又 E_{n-1} の ($\mathcal{A}$ の下での) central support が I であることから E_n の ($\mathcal{A}$ の下での) central support は I である。このようにして帰納的に (1) (2) (3) をみたす projections $\{E_n\}_{0 \le n < \infty}$ が選べる。

<u>Remark</u> 各 $0 \le n \le m < \infty$ に対し

$$\Phi_{E_m}\left(\frac{E_m}{E_n}\right) \leqq \frac{1}{2^{m-n}} \cdot I$$

∵ Lemma 1.2 の (3) から各 k に対して $\Phi_{E_{k+1}}\left(\frac{E_{k+1}}{E_k}\right) \leqq \frac{1}{2} \cdot I$.

もしある m と $0 \le {}^\forall n \le m$ とに対し $\Phi_{E_m}\left(\frac{E_m}{E_n}\right) \leqq \frac{1}{2^{m-n}} \cdot I$ ならば、Proposition 1.1 の (6) から $\Phi_{E_{m+1}}\left(\frac{E_{m+1}}{E_n}\right) \leqq \Phi_{E_m}\left(\frac{E_m}{E_n}\right) \Phi_{E_{m+1}}\left(\frac{E_{m+1}}{E_m}\right)$

右辺の各要素が可換だから $\leqq \frac{1}{2^{m-n}} \cdot I \cdot \frac{1}{2} \cdot I = \frac{I}{2^{m+1-n}}$。

<u>Lemma 1.3.</u> $\mathcal{A}$ が continuous, $\mathfrak{Z}$ が finite ならば Lemma 1.2 の $\{E_n\}_{n \ge 1}$ に対して極限 $\lim_{n \to \infty} \Phi_{E_n}\left(\frac{F}{I}\right)$, $F \in \mathcal{A}^P$ (一弱収束) が存在する。この極限を $\Phi(F)$ で表わせば $\Phi(F) \in \mathfrak{Z}^+$, $0 \le \Phi(F) \leqq I$.

Proof. Proposition 1.1 の (5) から $n \leq m$ に対し

$$\Phi_{E_m}\left(\frac{F}{I}\right) \leqq \left\{\Phi_{E_n}\left(\frac{F}{I}\right) + \Phi_{E_n}\left(\frac{E_n}{I}\right)\right\}\left\{I + \Phi_{E_n}\left(\frac{E_m}{E_n}\right)\right\}$$

右辺の positive operators は各々可換だから Lemma 1.2. の Remark から.

$$\leqq \left\{\Phi_{E_n}\left(\frac{F}{I}\right) + \frac{1}{2^n}\cdot I\right\}\left\{I + \frac{1}{2^{m-n}}\cdot I\right\}$$

$\forall x \in \mathfrak{H}$, $n \leq m$ に対し

$$\left(\Phi_{E_m}\left(\frac{F}{I}\right)x, x\right) \leqq \left(1+\frac{1}{2^{m-n}}\right)\left(\Phi_{E_n}\left(\frac{F}{I}\right)x, x\right) + \left(1+\frac{1}{2^{m-n}}\right)\cdot\frac{1}{2^n}\cdot(x, x)$$

$m \to \infty$

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\left(\Phi_{E_m}\left(\frac{F}{I}\right)x, x\right) \leqq \left(\Phi_{E_n}\left(\frac{F}{I}\right)x, x\right) + \frac{1}{2^n}(x, x)$$

$n \to \infty$

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\left(\Phi_{E_m}\left(\frac{F}{I}\right)x, x\right) \leqq \underline{\lim_{n\to\infty}}\left(\Phi_{E_n}\left(\frac{F}{I}\right)x, x\right)$$

故に弱収束し，その極限 $\Phi(F)$ は $0 \leq \Phi(F) \leq I$，又中心は弱収束に関して閉じているから $\Phi(F) \in \mathfrak{Z}^+$

<u>Corollary.</u> $\Phi(E_k) \leqq \frac{1}{2^{k-1}}\cdot I$.

<u>Lemma 1.4.</u> Lemma 1.3 の仮定の下で $\Phi(F)$ の support $= \overline{F}$ $(F \in \mathfrak{A}^P)$

Proof. Proposition 1.1 の (7) から

$$\left\{\Phi_{E_n}\left(\frac{F}{I}\right) + \Phi_{E_n}\left(\frac{E_n}{I}\right)\right\}\left\{I + \Phi_F\left(\frac{F}{I}\right)\right\} \geqq \Phi_F\left(\frac{F}{I}\right) \qquad n \geqq 0.$$

$P(k; F, I)$ は上の両辺の positive operators と可換だから

$$\left\{\Phi_{E_n}\left(\frac{F}{I}\right) + \Phi_{E_n}\left(\frac{E_n}{I}\right)\right\}\left\{I + \Phi_F\left(\frac{F}{I}\right)\right\}P(k; F, I) \geqq \frac{1}{k}P(k; F, I)$$

$\Phi_{E_n}\left(\frac{E_n}{I}\right) \leqq \frac{1}{2^n}\cdot I$ であることから n を十分大きくとると.

$$\Phi_{E_n}\left(\frac{F}{I}\right)P(k; F, I) \geqq \frac{1}{2k}\cdot P(k; F, I)$$

$n \to \infty$

$$\Phi(F)P(k; F, I) \geqq \frac{1}{2k}\cdot P(k; F, I).$$

従がって $\Phi(F)\bar{F}$ の support は $\bar{F}$ に含まれる。一方 $\Phi(F)$ の support は $\bar{F}$ に含まれるから $\Phi(F)$ の support $= \bar{F}$。

<u>Lemma 1.5.</u> Lemma 1.3 の仮定の下で Φ は次をみたす。

(1) $E \overset{\mathfrak{A}}{\sim} F \Rightarrow \Phi(E)=\Phi(F)$. (2) $\Phi(EF)=\Phi(E)F \quad E\in\mathfrak{A}^P,\ F\in\mathfrak{S}^P$

(3) Φ は有限加法的 i.e. 直交する projections F_1, F_2 に対し $\Phi(F_1+F_2)=\Phi(F_1)+\Phi(F_2)$

Proof. (1) (2) は明らか。Proposition 1.1 の (8) から

$$\Phi_{E_n}\left(\frac{F_1}{I}\right)+\Phi_{E_n}\left(\frac{F_2}{I}\right) \leqq \Phi_{E_n}\left(\frac{F_1+F_2}{I}\right) \leqq \Phi_{E_n}\left(\frac{F_1}{I}\right)+\Phi_{E_n}\left(\frac{F_2}{I}\right)+\Phi_{E_n}\left(\frac{E_n}{I}\right)$$

$$n\to\infty \quad \Phi(F_1)+\Phi(F_2) \leqq \Phi(F_1+F_2) \leqq \Phi(F_1)+\Phi(F_2).$$

<u>Lemma 1.6</u> Lemma 1.3 の仮定の下で, $\Phi(E)=\Phi(F) \Rightarrow E \overset{\mathfrak{A}}{\sim} F$

Proof. もし $k>1$ に対して $P(k;E,F)\neq 0$ ならば互いに直交する projections $\{F_i\}_{1\leqq i\leqq k}$ が存在し $EP(k;E,F) \overset{\mathfrak{A}}{\sim} F_i \quad FP(k;E,F) > F_i \quad 1\leqq i\leqq k$.

Lemma 1.5 から

$$\begin{aligned}\Phi(FP(k;E,F)) &\geqq \Phi\left(\sum_{i=1}^{k} F_i\right)\\ &= \sum_{i=1}^{k}\Phi(F_i)\\ &= \sum_{i=1}^{k}\Phi(EP(k;E,F))\\ &= k\Phi(EP(k;E,F))\end{aligned}$$

一方 $\Phi(EP(k;E,F))=\Phi(FP(k;E,F))$ だから $\Phi(EP(k;E,F))=0$。これは Lemma 1.4 に矛盾する。故に $P(k;E,F)=0 \quad k>1$. 同様にして $P(k;F,E)=0 \quad k\geqq 1$. 従がって $E \overset{\mathfrak{A}}{\sim} F$。

<u>Lemma 1.7.</u> Lemma 1.3 の仮定の下で Φ は可算加法的、i.e. 互いに直交する可算個の projections $\{F_i\}_{i\geq 1}$ に対し $\Phi(\sum_{i=1}^{\infty} F_i) = \sum_{i=1}^{\infty}\Phi(F_i)$ (強収束)

Proof. $\Phi(F_i)$ は positive operator で、$\sum_{i=1}^{n}\Phi(F_i)$ は一様有界 (実際 $\sum_{i=1}^{n}\Phi(F_i) = \Phi(\sum_{i=1}^{n}F_i) \leq I$) だから級数 $\sum_{i=1}^{\infty}\Phi(F_i)$ は強収束する。明らかに $\Phi(\sum_{i=1}^{\infty}F_i) \geq \sum_{i=1}^{\infty}\Phi(F_i)$ だから逆の不等式を証明しよう。 A を $\Phi(\sum_{i=1}^{\infty}F_i) - \sum_{i=1}^{\infty}\Phi(F_i)$ の support とする。 $\varepsilon > 0$ に対し $\Phi(E_k) \leq \varepsilon I$ をみたすように k を選ぶ。 D_n を $(\Phi(E_k) - \sum_{i=n+1}^{\infty}\Phi(F_i))^+ A$ の support とする。 $D_n \in \mathfrak{S}^P$, $D_n \leq D_{n+1}$, $\lim_{n\to\infty} D_n = A$ (強収束)。 各 $n \geq 1$ に対し

$$\begin{aligned}\Phi(F_{n+1}D_n) &= \Phi(F_{n+1})D_n \\ &\leq \Phi(E_k)D_n \\ &= \Phi(E_k D_n)\end{aligned}$$

Lemma 1.6 から $\exists$ projection $F'_{n+1} \leq E_k$ が存在し $F_{n+1}D_n \overset{\mathfrak{A}}{\sim} F'_{n+1}D_n$。 更に D_n は $(\Phi(E_k - F'_{n+1}) - \sum_{i=n+2}^{\infty}\Phi(F_i))^+ A$ の support でもあるから同様にして projection $F'_{n+2} \leq E_k - F'_{n+1}$ such that $F_{n+2}D_n \overset{\mathfrak{A}}{\sim} F'_{n+2}D_n$ をうる。 このようにして帰納的に互いに直交する projection $\{F'_m\}_{m\geq n}$;

$$F'_m \leq E_k \quad , \quad F_m D_n \overset{\mathfrak{A}}{\sim} F'_m D_n \quad m \geq n$$

をうる。

$$\begin{aligned}\{\Phi(\sum_{i=1}^{\infty}F_i) - \sum_{i=1}^{\infty}\Phi(F_i)\}D_n &= \{\Phi(\sum_{i=n+1}^{\infty}F_i) - \sum_{i=n+1}^{\infty}\Phi(F_i)\}D_n \\ &\leq \Phi(\sum_{i=n+1}^{\infty}F_i)D_n \\ &= \Phi(\sum_{i=n+1}^{\infty}F_iD_n) \\ &= \Phi(\sum_{i=n+1}^{\infty}F'_iD_n) \\ &= \Phi(\sum_{i=n+1}^{\infty}F'_i)D_n\end{aligned}$$

$$\leqq \Phi(E_k) D_n$$
$$\leqq \varepsilon D_n .$$

$n \to \infty$,
$$\Phi\left(\sum_{i=1}^{\infty} F_i\right) - \sum_{i=1}^{\infty} \Phi(F_i) \leqq \varepsilon A .$$

εは任意だから $\Phi\left(\sum_{i=1}^{\infty} F_i\right) \leqq \sum_{i=1}^{\infty} \Phi(F_i)$ 。

Proof of Theorem I. $\mathfrak{A}_C$, $\mathfrak{A}_D$ を各々$\mathfrak{A}$の continuous, discrete reduced W*algebra; $C, D \in \mathfrak{Z}^P$, $CD=0$, $C+D=I$, とする。$\mathfrak{Z}$がfinite だからC, Dもfinite。discrete W*algebraの構造定理から互いに直交する中心のprojections $\{G_n\}_{\infty \geqq n \geqq 1}$が存在し, $\sum_{\infty \geqq n \geqq 1} G_n = D$, $\mathfrak{A}_{G_n}$: type n homogeneous W*algebra ($G_n \sim nE_0^{(n)}$)。そこで$\mathfrak{A}^P$から$\mathfrak{Z}^+$へのmap Φ;
$$\Phi(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{E_0^{(n)}}\left(\frac{EG_n}{G_n}\right) + \Phi(EC)$$
を定義する。ここで右辺のΦはLemma 1.3のΦ。Φが中心の値をとる有限相対次元関数であることが今迄の諸Lemmasから分かる。次に一意性を証明する。Ψを別の,中心の値をとる有限相対次元関数とする。$\mathfrak{A}$のprojection $E \leqq G_n$に対し, Eに含まれ互いに直交する有限個のprojections $\{F_1, \cdots, F_k\}$ ($k \leqq n$)が存在し $E = \sum_{i=1}^{k} F_i$, $E_0^{(n)} E \overset{\mathfrak{A}}{\sim} F_i$
$$\Psi(E) = \sum_{i=1}^{k} \Psi(F_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \Psi(E_0^{(n)} E)$$
$$= k \Psi(E_0^{(n)}) \overline{E}$$
ところで可換W*algebra $\mathfrak{A}_{E_0^{(n)}}$上では$\Psi = \Phi$だから $\Psi = \Phi$ on G_n。
次にEをCに含まれる$\mathfrak{A}$のprojectionとする。

$i \leq k,\ n \geq 1,\quad \Phi(EP(i;E_n,E)P(k;E_n,C)) < (i+1)\Phi(E_n P(i;E_n,E)P(k;E_n,C))$

$$k\Phi(E_n P(i;E_n,E)P(k;E_n,C)) < \Phi(P(i;E_n,E)P(k;E_n,C))$$

$$\begin{aligned}\Phi(E) - \Phi(EP(0;E_n,E)) &= \sum_{1\leq i\leq k<\infty} \Phi(EP(i;E_n,E)P(k;E_n,C)) \\ &< \sum_{1\leq i\leq k<\infty} \frac{i}{k}\Phi(P(i;E_n,E)P(k;E_n,C)) \\ &\quad + \sum_{1\leq k<\infty}\Phi(E_n P(i;E_n,E)P(k;E_n,C)) \\ &\leqq \sum_{1\leq i\leq k<\infty} \frac{i}{k}P(i;E_n,E)P(k;E_n,C) \\ &\quad + \Phi(E_n)\end{aligned}$$

一方 $\Phi(EP(0;E_n,E)) \leqq \Phi(E_n)$, $\Phi(E_n) \leqq \frac{1}{2^n}\cdot I$ だから, $n\to\infty$

$\Phi(E) \leqq \Psi(E)$. $(E \in \mathfrak{A}^P,\ E \leq C)$。$\Phi(C) = \Psi(C) = C$ だから $\Phi = \Psi$ on C.

よって $\Phi = \Psi$。

§2. Non-singular transformation T と cross product W^*algebra $(\mathfrak{A}_T, \mathfrak{H}_T)$

2.1. 準備

$(\Omega, \mathcal{B}, P)$ を抽象ルベーグ空間で $P(\Omega)=1$ とする。T を Ω 上の non-singular transformation (i.e. Ω から Ω への 1 対 1, onto な可測変換で逆も可測, かつ non-singular condition $P(A) = 0$ iff $P(T^{-1}A)=0$ をみたす) とする。invariant sub σ-field i.e. invariant set $(T^{-1}A = A)$ の全体から成る sub σ-field を $\mathfrak{F}$ で表わす。$\mathcal{B} \ni A$ に対し A を含む最小の invariant set $\bigcup_{-\infty<n<\infty} T^n A$ を $\bar{A} \in \mathfrak{F}$ で表わす。

可測集合の間の同値関係を次で定義する。A と $B \in \mathcal{B}$ が T の下で同値であるとは, A と B の可算分割 $\{A_n\}_{-\infty<n<\infty}, \{B_n\}_{-\infty<n<\infty}$ が存在し

$T^n A_n = B_n$ をみたすことで、これを $A \overset{T}{\sim} B$ で表わす。順序関係 $A \overset{T}{\prec} B$ は、$\exists B' \subset B$ が存在し $A \overset{T}{\sim} B'$ をみたすことをいう。$A \overset{T}{\sim} B \subset A$ ならば $B = A$ のとき A を bounded set、そうでないとき unbounded set という。同値関係 $\overset{T}{\sim}$ は同値律をみたし $A \overset{T}{\prec} B$、$B \overset{T}{\prec} A$ ならば $A \overset{T}{\sim} B$。

ところで T から $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上の unitary operator U^n;

$$U^n f(\omega) = f(T^n \omega)(\chi_{-n}(\omega))^{1/2}, \quad \chi_{-n}(\omega) = \frac{dT^{-n}P}{dP} \quad T^{-n}P(A) = P(T^n A)$$

が定まる。unitary group $\{U^n\}_{-\infty<n<\infty}$ は可換 W^* algebra $L^\infty(\Omega, \mathcal{B}, P)$ (i.e. bounded operator L_h の全体、ここで h は bounded ft. $L_h f = h(\omega) f(\omega)$, $f \in L^2$) に作用する自己同型写像群 $\mathcal{G} = \{U^n \cdot U^{-n}\}_{-\infty<n<\infty}$, i.e. $L^\infty \ni L_h \to U^n L_h U^{-n} \in L^\infty$, を定める。集合の間の同値関係とは自己同型写像群 $\mathcal{G}$ の下での L^∞ の projections の間の同値関係、$L_{\chi_A} = \sum_{-\infty<n<\infty} L_{\chi_{A_n}}$, $L_{\chi_B} = \sum_{-\infty<n<\infty} U^n L_{\chi_{A_n}} U^{-n}$ のことである。

<u>Lemma (M. Osikawa [6])</u> $A, B \in \mathcal{B}$ に対し、$\exists G \in \mathcal{F}$ が存在して

(1) $A \cap G \overset{T}{\prec} B \cap G$ (2) $B \cap G^c \overset{T}{\prec} A \cap G^c$

2.2. Cross product W^* algebra $(\mathfrak{A}_T, \mathfrak{H}_T)$.

Murray-Neumann [5] に従がって自己同型写像群 $\mathcal{G}$ と可換 W^* algebra L^∞ の cross product W^* algebra $(\mathfrak{A}_T, \mathfrak{H}_T)$ を構成する。[5] では non-singular transformation group が ergodic で、かつ free action を仮

定しているが、ここでは少し複雑になるがそれらを仮定せずに構成する（但し変換群は1生成えではあるけれど）。

各 n $(1\leq n<\infty)$ に対し Ω_n を周期 n の集合 $\{T^n\omega=\omega,\ T^k\omega\neq\omega,\ 0<k<n\}$, Ω_a を非周期的集合 $\{T^k\omega\neq\omega,\ {}^\forall k\neq 0\}$ とする。確率空間 $(\Omega,\mathcal{B},P)$ がルベーグ空間だからこれらは可測（P−可測）集合になる。確率空間 $(\Omega,\mathcal{B},P)$ の Ω_n $(n=1,2,\cdots,a)$ への制限を $(\Omega_n,\mathcal{B}_n,P_n)$ で表わす。

$0\leq i<n<\infty$ に対し 2変数関数 $F(\omega,k)$; $0\leq k\leq n-1$, $F(\cdot,k)\in L^2(\Omega_n,\mathcal{B}_n,P_n)$ $F(\omega,k)=0$ a.s. $k\neq i$, の全体から成る Hilbert 空間を $\mathfrak{H}_{n,i}$,

$-\infty<i<\infty$ に対し 2変数関数 $F(\omega,k)$; $-\infty<k<\infty$ $F(\cdot,k)\in L^2(\Omega_a,\mathcal{B}_a,P_a)$ $F(\omega,k)=0$. a.s. $k\neq i$, の全体から成る Hilbert 空間を $\mathfrak{H}_{a,i}$ とする。

Hilbert sum. $\mathfrak{H}_n=\sum_{i=0}^{n-1}\oplus\,\mathfrak{H}_{n,i}$, $\mathfrak{H}_a=\sum_{-\infty<i<\infty}\oplus\,\mathfrak{H}_{a,i}$, $\mathfrak{H}_T=\sum_{n\geq 1}\oplus\,\mathfrak{H}_n\oplus\mathfrak{H}_a$ とおく。

$J_{n,i}$ を $L^2(\Omega_n,\mathcal{B}_n,P_n)$ から $\mathfrak{H}_{n,i}$ への自然な埋め込み（それは isometry）とする $n=1,2,\cdots,a$. 各 $\underbrace{\mathfrak{H}_n}_{n=1,2,\cdots,a}$ 上の bounded operator E は $L^2(\Omega_n,\mathcal{B}_n,P_n)$ 上の bounded operator による行列表示 $E\sim\langle E_{k,\ell}\rangle$ $E_{k,\ell}=J_{n,k}^{*}EJ_{n,\ell}$ で一意に表わされる。

各 $n=1,2,\cdots,a$ に対し $\mathfrak{H}_n$ 上の bounded operators $\hat{L}_h$; $h\in L^\infty$

$$\hat{L}_h\sim\langle E_{k,\ell}\rangle \qquad E_{k,\ell}=\begin{cases} L_h & \text{if } k=\ell\\ 0 & \text{if } k\neq\ell.\end{cases}$$

と unitary operators $\hat{U}^n$;

$$\hat{U}^n\sim\langle E_{k,\ell}\rangle \qquad E_{k,\ell}=\begin{cases} U^n & \text{if } k-\ell=n\\ 0 & \text{if } k-\ell\neq n\end{cases}$$

から生成される W^* algebra を $(\mathfrak{A}_n,\mathfrak{H}_n)$ で表わし、それらの product W^* algebra $\prod_{n\geq 1}\mathfrak{A}_n\times\mathfrak{A}_a$ を $\mathfrak{A}_T$ で表わす。$(\mathfrak{A}_T,\mathfrak{H}_T)$ を cross product.

W*-algebra という。Ω 上の bounded ft. h を各 Ω_n へ制限した関数を h_n $(n=1,2,\dots,a)$ で表わしたとき $\mathfrak{A}_T$ の bounded operator $(\hat{L}_{h_n})_{n=1,2,\dots,a}$ を $\hat{L}_h$ で表わす。

Lemma (Neumann [5]) (1) $E=(E^n)_{n=1,2,\dots,a}\in\mathfrak{A}_T$ $E^n\sim\langle E^n_{k,l}\rangle$

$\Rightarrow \exists\{\varphi^n_k\}_{-\infty<k<\infty}\subset L^\infty(\Omega_n,\mathcal{B}_n,P_n)$ such that $E^n_{k,l}=L_{\varphi^n_{k-l}}U^{k-l}$ $n=1,2,\dots,a$

(2) $\mathfrak{A}_T$ の center $\mathfrak{Z}_T=\{\hat{L}_h \mid h$ は T-可測有界可測関数$\}$

エルゴード性と free action は仮定していないが証明は[5]と同様。(1)の場合簡単に $E\sim\langle L_{\varphi_{k-l}}U^{k-l}\rangle\in\mathfrak{A}_T$ $(\varphi_{k-l}|_{\Omega_n}=\varphi^n_{k-l})$ で表わす。

2.3. bounded set と finite projection

我々の目的は

(1) Ω-set が bounded $\rightleftarrows$ 基礎Hilbert空間 $\mathfrak{h}_T$ が finite.

(2) $A\overset{T}{\sim}B \quad\rightleftarrows\quad \hat{L}_{\chi_A}\overset{\mathfrak{A}_T}{\sim}\hat{L}_{\chi_B}$

を示すことである。

Lemma 2.1. $E\sim\langle L_{\varphi_{k-l}}U^{k-l}\rangle\in\mathfrak{A}_T$ に対し、

(1) E が Hermitian ならば $\varphi_{-k}(\omega)=\overline{\varphi_k(T^{-k}\omega)}$ a.s. ω.

(2) E が positive operator $\neq 0$ $\Rightarrow$ $\varphi_0(\omega)\geq 0$ a.s., $P(\varphi_0(\omega)>0)>0$.

Proof. (1)は明らか。$\mathfrak{A}_T$ に属す positive op. E の root を

$E^{\frac{1}{2}} \sim \langle L_{h_{k-l}} U^{k-l} \rangle$ とすれば $E^{\frac{1}{2}}$ は hermitian だから $h_{-k}(\omega) = h_k(T^{-k}\omega)$ a.s.

$E^{\frac{1}{2}}E^{\frac{1}{2}} = E$ より $\varphi_0(\omega) = \sum_{-\infty<k<\infty} h_{-k}(\omega)\, h_k(T^{-k}\omega) = \sum_{-\infty<k<\infty} |h_{-k}(\omega)|^2 \geq 0$.

もし $\varphi_0(\omega) = 0$ a.s. ならば $h_k(\omega) = 0$ a.s. 即ち $E^{\frac{1}{2}} = 0$。

Lemma 2.2. $A \overset{T}{\sim} B \Rightarrow \hat{L}_{\chi_A} \overset{\mathfrak{R}_T}{\sim} \hat{L}_{\chi_B}$

Proof。 $\{A_n\}_{-\infty<n<\infty}$, $\{B_n\}_{-\infty<n<\infty}$ を A、B の分割で $T^{-n}A_n = B_n$ をみたしているとする。 $V \sim \langle L_{\chi_{A_{k-l}}} U^{k-l} \rangle \in \mathfrak{R}_T$ は partially isometry で $V^*V = \hat{L}_{\chi_A}$, $VV^* = \hat{L}_{\chi_B}$ 。

Theorem II Ω : bounded $\rightleftarrows$ $\mathfrak{F}_T$; finite.

Proof. 十分性は Lemma 2.2. からまるから必要性を証明する。もし基礎空間 $\mathfrak{F}_T$ が infinite ならば無限可算個の互いに直交する同値な projections $\{E_n\}_{n\geq 0}$ が存在する。 E_0 を initial set, E_n を final set とする $\mathfrak{R}_T$ の partially isometry を $V^{(n)}$ とする。 $V^{(n)} \sim \langle L_{\varphi^{(n)}_{k-l}} U^{k-l} \rangle$, $E_n \sim \langle L_{h^{(n)}_{k-l}} U^{k-l} \rangle$ とおく。

$$h_0^{(0)}(\omega) = \sum_{-\infty<k<\infty} |\varphi_k^{(n)}(\omega)|^2 \quad \text{a.s.} \quad \forall n.$$

$$h_0^{(n)}(\omega) = \sum_{-\infty<k<\infty} |\varphi_k^{(n)}(T^{-k}\omega)|^2 \quad \text{a.s.} \quad \forall n.$$

Lemma 2.1 から $\delta > 0$ を可測集合 $A_\delta = \{h_0^{(0)}(\omega) > \delta\}$ に対し $P(A_\delta) > 0$ をみたすように選べる。

$$g_N^{(n)}(\omega) = \sum_{-N\leq k\leq N} |\varphi_k^{(n)}(\omega)|^2 \quad , \quad f_N^{(n)}(\omega) = \sum_{-N\leq k\leq N} |\varphi_k^{(n)}(T^{-k}\omega)|^2$$

とおく。 $\forall n$ と $0 < \forall\varepsilon < \frac{P(A_\delta)}{2}$ とに対して、 $\exists N_n > 1$ such that

$$A_\delta^{(n)} = \{\omega \in A_\delta \mid g_{N_n}^{(n)}(\omega) > h_0^{(0)}(\omega) - \frac{\delta}{2}\}$$
$$P(A_\delta^{(n)}) > P(A_\delta) - \frac{\varepsilon}{2^n}$$

$g(\omega) = \inf_{-\infty<n<\infty} g_{N_n}^{(n)}(\omega)$ とおけば　$0 \le g(\omega) \le h_0^{(0)}(\omega)$，$P(g(\omega)>0)>0$。
そこで今 $L^\infty(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上の sub additive functional $\overline{\sigma}$ を次で定義する。
$$\overline{\sigma}(h) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\int h(T^i\omega)\,dP(\omega) \qquad h \in L^\infty$$
$\overline{\sigma}$ は次の性質を満すことが容易に分かる。

(1) $\overline{\sigma}(1)=1$　(2) $\overline{\sigma}(ah) = a\overline{\sigma}(h)$　a:定数　(3) $h_1 \leqq h_2 \Rightarrow \overline{\sigma}(h_1) \leqq \overline{\sigma}(h_2)$

(4) 有限個の有界可測関数 $h_1, h_2, \cdots, h_k$ と有限個の整数 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ に対し　$\overline{\sigma}\left(\sum_{i=1}^k h_i(T^{n_i}\omega)\right) = \overline{\sigma}\left(\sum_{i=1}^k h_i(\omega)\right)$

ところで $\sum_{n\ge0} E_n \leqq I$ だから Lemma 2.1 から $\sum_{n\ge0} h_0^{(n)}(\omega) \leqq 1$ a.s.
従って $\overline{\sigma}$ の性質から $\forall k \geqq 1$ に対して，
$$\overline{\sigma}\left(\sum_{i=0}^k f_{N_i}^{(i)}\right) \leqq \overline{\sigma}\left(\sum_{i=0}^k h_0^{(i)}\right)$$
$$\leqq \overline{\sigma}(1) = 1.$$
$$\overline{\sigma}\left(\sum_{i=0}^k f_{N_i}^{(i)}\right) = \overline{\sigma}\left(\sum_{i=0}^k g_{N_i}^{(i)}\right)$$
$$\geqq (k+1)\,\overline{\sigma}(g)$$

故に $\overline{\sigma}(g) \leqq \frac{1}{k+1}$。$k$ は任意だから $\overline{\sigma}(g) = 0$。従って，
$\inf_{0\le n}\int g(T^n\omega)\,dP(\omega) = 0$。　$P(g(\omega)>0)>0$，$g(\omega) \geqq 0$ a.s. だから
$\exists A \subset \{g(\omega) \neq 0\}$，such that $P(A) > 0$，$\inf_{n\ge0} P(T^{-n}A) = 0$。
従って $\exists n_1 > 1$ such that，$P(T^{-n_1}A) < \frac{\alpha}{2^2}$；$\alpha = P(A)$。
測度 $P(T^{n_1}\cdot)$ は P に関して絶対連続だから $\exists n_2 > n_1$ such that
$$P(T^{-n_2}A) < \frac{\alpha}{2^3}\times 2 \quad , \quad P(T^{n_1-n_2}A) < \frac{\alpha}{2^3}\times 2$$

以下帰納的に増大数列$\{n_k\}_{k\geq 1}$がとれて $P(T^{n_j-n_k}A)<\frac{\alpha}{2^{k+1}}\times k$, $j=0,1,\dots,k-1$, $k\geq 1$
$W=A-\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=0}^{k-1}T^{n_j-n_k}A$ とおけば，Wは$P(W)>0$, $T^{n_i}W\cap T^{n_j}W=\phi$ $(i\neq j)$
をみたす。（このような性質をもつ集合をweakly wandering setと，Hajian-Kakutaniは名付けた。）。従ってΩはunbounded set。

全空間Ωは次の3つの$\mathfrak{F}$-可測集合に一意に分割される。
$\Omega_b, \Omega_{\sigma-b}, \Omega_\infty \in \mathfrak{F}$ (1) $\Omega=\Omega_b+\Omega_{\sigma-b}+\Omega_\infty$ (disjoint).
(2) Ω_b ; bounded set (3) $\Omega_{\sigma-b}$; unbounded set かつ $\exists A$; bounded set such that $\overline{A}=\Omega_{\sigma-b}$ (4) Ω_∞ の任意の可測部分集合$(\neq\phi)$ は unbounded.

<u>Lemma 2.3.</u> (1) $\Omega_\infty\supset{}^\forall B$, $B\overset{T}{\sim}\overline{B}$ (2) $\Omega_{\sigma-b}\supset{}^\forall C$ に対し$\exists G\in\mathfrak{F}$ such that $C\cap G\overset{T}{\sim}\overline{C}\cap G$, $C\cap(\Omega-G)$; bounded
証明は略す。

<u>Theorem III.</u> $A\overset{T}{\sim}B \rightleftarrows \hat{L}_{\chi_A}\overset{\mathcal{O}_T}{\sim}\hat{L}_{\chi_B}$

Proof. 必要性はLemma 2.2で証明されている。十分性を4段階に分けて証明する。1段；$\Omega=\Omega_b$. もし$\exists G\in\mathfrak{F}$ such that $A\cap G\overset{T}{\prec}B\cap G$ かつ Bの真部分集合B'に対し$A\cap G\overset{T}{\sim}B'\cap G$ ならば$\hat{L}_{\chi_{B\cap G}}\overset{\mathcal{O}_T}{\sim}\hat{L}_{\chi_{B'\cap G}}$ 従って$\hat{L}_{\chi_{B\cap G}}$はinfinite projection i.e. $\mathfrak{H}_T$はinfinite space. Theorem IIからΩはunbounded set. これ

§2.21

は仮定に矛盾する。よって M. Oshikawa の比較定理から $A \overset{T}{\succ} B$ をうる。同様にして $A \overset{T}{\prec} B$ だから $A \overset{T}{\sim} B$。

2段; $\Omega = \Omega_\infty$. $\hat{L}\chi_A \overset{\Omega_T}{\sim} \hat{L}\chi_B$ だから $\overline{\hat{L}\chi_A} = \overline{\hat{L}\chi_B}$。ところで $\overline{\hat{L}\chi_A} = \hat{L}\chi_{\bar{A}}$ だから $\bar{A} = \bar{B}$。Lemma 2.3 から $A \overset{T}{\sim} B$。

3段; $\Omega = \Omega_{\sigma\text{-}b}$. Lemma 2.3 から $^{\exists}G \in \mathfrak{F}$ such that.

$A \cap (\Omega - G)$, $B \cap (\Omega - G)$; bounded, $A \cap G \overset{T}{\sim} \bar{A} \cap G = \bar{B} \cap G \overset{T}{\sim} B \cap G$

1段の場合と同様にして $A \cap (\Omega - G) \overset{T}{\sim} B \cap (\Omega - G)$。故に $A \overset{T}{\sim} B$.

4段; 一般。各不変集合上で A, B が同値だから $A \overset{T}{\sim} B$.

§3. 不変密度関数と不変測度

3.1. 不変密度関数の存在

もし同値,有限,不変測度 μ ($\mu(A) = 0$ if and only if $p(A) = 0$ をみたす測度 μ は p に関して同値であるという。$\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$ ならば μ を不変測度という) が存在すれば G. D. Birkhoff の個別エルゴード定理から

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \chi_A(T^i\omega) \longrightarrow \mu(A \mid \mathfrak{F}) \quad \text{a.s.} \qquad (\mu(\Omega) = 1 \text{ とする})$$

このことは 同値有限不変測度は必ずしも一意ではないけれど, それらの, invariant sub σ-field $\mathfrak{F}$ に関する条件付確率は一致することを示している。

ところで E. Hopf [3] は Ω-set が bounded ならば同値有限不変測度が存在することを示したけれど, 我々は同じ条件の下に

先験的に不変測度を与えることなく上記の極限関数を, cross product W*algebra $\mathfrak{A}_T$ の中心の値をとる有限相対次元関数を用いて定め, このことから同値有限不変測度を構成し, かつそのすべての形を決めよう。

Definition 3.1. $\mathcal{B}$ から $L^\infty_+(\Omega,\mathcal{B},p)$ への map $\psi(\omega,A)$ $(A\in\mathcal{B},\ \omega\in\Omega)$ が次をみたすとき不変密度関数という。

(1) 可算加法性 i.e. $\psi(\omega,\sum_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi(\omega,A_n)$ a.s. $\{A_n\}_{n\geq 1}$: disjoint.

(2) $\psi(\omega,A)=0$ a.s. $\rightleftarrows A=\phi$

(3) $A\overset{T}{\sim}B \Rightarrow \psi(\omega,A)=\psi(\omega,B)$ a.s.

(4) $\psi(\omega,A\cap B)=\psi(\omega,A)\chi_B(\omega)$ $B\in\mathcal{F}_I$.

(5) $\psi(\omega,\Omega)=1$. a.s.

Theorem IV Ω が bounded ならば一意に不変密度関数が存在する。

Proof. Ω が bounded ならば $\mathfrak{Z}_T$ が finite (Theorem II). 従がって中心の値をとる有限相対次元関数 Φ_T が存在する (Theorem III) Neumann の $\overbrace{\text{Lemma}}^{\S 2.22}$ から各 $A\in\mathcal{B}$ に対し $\mathcal{F}_I$-可測な有界関数 $\psi(\omega,A)$ が存在し $\Phi_T(\hat{L}_{\chi_A})=\hat{L}_{\psi(\omega,A)}$ 。 $\psi(\omega,A)$ は Def. 3.1 の (1)~(5) をみたす。もし別に不変密度関数 $\psi'(\omega,A)$ が存在すれば $E\sim\langle L_{\varphi_{k-\ell}}U^{k-\ell}\rangle\in\mathfrak{A}_T$ に対し $\Phi(E)=\hat{L}_{\int h_0(\omega')\psi'(\omega,d\omega')}$ とおく。

$$F \sim \langle L f_{k-l} U^{k-l} \rangle \in \mathfrak{A}_T$$

$$\begin{aligned}\Phi(F^*F) &= \hat{L} \int \sum_k f_k(T^k\omega') \overline{f_k(T^k\omega')} \psi'(\omega, d\omega') \\ &= \hat{L} \int \sum_k f_k(\omega') f_{-k}(\omega') \psi'(\omega, d\omega') \\ &= \Phi(FF^*)\end{aligned}$$

をみたすからΦは中心の値をとる有限相対次元関数。それは一意だから$\Phi=\Psi$、従がって$\psi'=\psi$。

3.7. 同値,有限,不変測度の存在.

Theorem V Ω-set が bounded ならば同値有限不変測度が存在し、それらはすべて次の形で与えられる.

$$\int \psi(\omega, A)\, d\mu(\omega) \qquad A \in \mathcal{B}$$

ここで$\psi(\omega, A)$は不変密度関数, μは$\mathfrak{F}$上の任意の有限測度で、$\mathfrak{F}$の上でPと同値($\mu(A)=0$ iff $P(A)=0$, $A \in \mathfrak{F}$)。

Proof. Theorem IV から $\int \psi(\omega, A)\, d\mu(\omega)$ が同値有限不変測度であることが分かる。一方νを任意の同値,有限,不変測度とすれば,νの$\mathfrak{F}$に関する条件付確率(但しνは normalized しておく)は Definition 3.1の(1)〜(5)をみたすから一意性によりそれは不変密度関数に他ならない。$\nu_{\mathfrak{F}}$をνの$\mathfrak{F}$への制限とすれば

$$\nu(A) = \int \psi(\omega, A)\, d\nu_{\mathfrak{F}}(\omega) \quad A \in \mathcal{B}.$$

文献

[1] J. Dixmier, Les algebres d'operateurs dans l'espace hilbertien, Gauthier-Villars (1957).

[2] A. Hajian – Y. Ito, Cesaro sums and measurable transformations, J. Combinatorial Theory 7 (1969), 239-254.

[3] E. Hopf, Theory of measures and invariant integrals, Trans. Amer. Math. Soc., 34 (1932), 373-393

[4] F. J. Murray – J. von Neumann, On rings of operators, Ann. Math., 37 (1936), 116-229.

[5] J. von Neumann, On rings of operators III, Ann. Math., 41 (1940) 94-161.

[6] M. Osikawa, Construction of invariant measures, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., 25 (1971), 182-189.

[7] O. Takenouchi, 関数解析, 朝倉書店 (1968).

附記. Theorem II, III は次のことを示している。

$L^\infty(\Omega,\mathcal{B},P)$ の2つの projection $L\chi_A$, $L\chi_B$ が $L^\infty(\Omega,\mathcal{B},P)$ のある bounded operators $\{L\varphi_n\}_{-\infty<n<\infty}$ に対し、

$$(*)\begin{cases} L\chi_A = \sum_{-\infty<n<\infty} L\varphi_n L\varphi_n^* \\ L\chi_B = \sum_{-\infty<n<\infty} U^n L\varphi_n L\varphi_n^* U^{-n} \end{cases}$$

をみたしているならば、実は bounded operators $\{L\varphi_n\}$ として互いに直交する projections $\{L\chi_{A_n}\}$ を選ぶことが出来る。つまり A のある可算分割 $\{A_n\}_{-\infty<n<\infty}$ が存在し、$\{B_n=T^{-n}A_n\}_{-\infty<n<\infty}$ が B の可算分割になるように出来ることを示している。従って(*)の関係が同値律をみたしていることも分かる。