数理解析研究所講究録
第166巻 1972年 54-76

作用素環の接合積における或る結果について

大阪教育大　高 井 博 司

§1. 序

作用素環の接合積に関する研究は、1950年代の後半に東北大の研究者によるグループが、種々の議論を展開して、今日のこの方面での基礎を築いたけれども、元来はMurrayとvon Neumannによるfactorのexampleに起因している。そして今日では、接合積の理論は、多方面に於いて用いられるに至った。例えばChingによるII_1-factorの存在と([5])、non-hyperfiniteなIII-factorが非可算無限有ることの証明や([6])、最近では、Nakamura-TakedaによるGaloisの理論([18])の一般化をHenleがやっている。([14])

一方C^*-algebraの接合積についてはTurumaru([25])により始めて導入されその後この理論が[redacted]硬になりcontinuous groupによるC^*-接合積の議論がGlimm([11])、Effros([10])、Guichardet([12],[13])、などによりなされ、Zeller-Meier([26])がそれらを体

系的にまとめ議論を展開した。 この*paper*では最近得た2、3の結果について述べてみることにする。

§2. 作用素環の接合積の構成

先ず、*von Neumann algebra* から話をする。$\mathcal{M}$ を *Hilbert space* $\mathfrak{H}$ 上の *von Neumann algebra* とする。 $\|\sum_{g\in G} g\otimes\xi_g\| \equiv \sum_g \|\xi_g\|^2 < +\infty$ なる $\sum_{g\in G} g\otimes\xi_g$ の全体を $G\otimes\mathfrak{H}$ で表わすことにする。ただし G は $\mathcal{M}$ 上の *countable (discrete) automorphism group* である。今 $G\otimes\mathfrak{H}$ に *Hilbert space* の構造を次の様にして入れる：

$\sum g\otimes\xi_g,\ \sum h\otimes\eta_h \in G\otimes\mathfrak{H}$ に対して

$$\left(\sum g\otimes\xi_g\right)+\left(\sum h\otimes\eta_h\right) = \sum k\otimes(\xi_k+\eta_k)$$

$$\lambda\left(\sum g\otimes\xi_g\right) = \sum g\otimes(\lambda\xi_g) \qquad (\lambda\in\mathbb{C})$$

$$\left\langle \sum g\otimes\xi_g \middle| \sum h\otimes\eta_h \right\rangle = \sum_g \langle \xi_g | \eta_g \rangle$$

そしてこの *Hilbert space* $G\otimes\mathfrak{H}$ 上の *bounded linear operator* を次の様に定義する：

$g\in G,\ x\in\mathcal{M}$ に対して

$$(g\otimes x)\left(\sum_h h\otimes\xi_h\right) = \sum_h hg^{-1}\otimes h(x)\xi_h$$

$$\left(\sum h\otimes\xi_h \in G\otimes\mathfrak{H}\right)$$

この時、($\mathcal{M}$ の G による接合積) $G\otimes\mathcal{M}$ を $g\otimes x$ $(g\in G,\ x\in\mathcal{M})$ で生成される *von Neumann algebra* とおくと、 $g\otimes x,\ h\otimes y \in G\otimes\mathcal{M}$ に対してこれらの積と **operation* それから *automorphism* の関係は次の式で表わされ

る：

$$(g\otimes x)(h\otimes y) = gh\otimes h^{-1}(x)y$$
$$(g\otimes x)^* = g^{-1}\otimes g(x^*)$$
$$(g\otimes 1)(1\otimes x)(g\otimes 1)^* = 1\otimes g(x) \qquad (g,h\in G,\ x,y\in M)$$

今 $G\otimes M$ から $1\otimes M$ への mapping を次の様に定義する：

$$e(T) = \sum_{g\in G} P_g T P_g \qquad (T\in G\otimes M)$$

ただし P_g は $G\otimes \mathfrak{H}$ から $g\otimes \mathfrak{H}$ への projection である．　その時 e は $G\otimes M$ から $1\otimes M$ への faithful normal expectation になる．以下これを canonical expectation と呼ぶことにする。　さて今 f を M 上の faithful normal state とし $\tilde{f} = f\cdot e$ とおくと $\tilde{f}$ は $G\otimes M$ 上の faithful normal state となりよく知られているように $G\otimes M$ の任意の element T は uniquely に Fourier 展開されて次の様に書ける。

$$T = \sum_g g\otimes x_g \quad (\text{w.r.t } \tilde{f}\text{-norm}) \quad (x_g\in M)$$

実際は $x_g = e((g\otimes 1)^* T)$ となる．([14])

次に C^* 接合積の話を少し述べよう．　$\mathfrak{A}$ を C^*-algebra とし G をその上の countable discrete automorphism group とする。$l^1(G;\mathfrak{A})$ で G から $\mathfrak{A}$ への mapping F で $\sum_g \|F_g\| < +\infty$ なる条件を満足するもの全体を表わす．$l^1(G;\mathfrak{A}) \ni F, G$ に対して積と *operation 及び norm を次の様に定義する：

$$(FG)_g = \sum_h F_h\, h(G_{h^{-1}g})$$

$$(F^*)_g = g(F^*_{g^{-1}})$$
$$\|F\|_1 = \textstyle\sum_g \|F_g\|,$$

その時 $l^1(G;A)$ は Banach *algebra となり、これは group algebra $l^1(G)$ の拡張になっていると考えられる。さらに $l^1(G;A)\ni F$ に対して

$$\|F\|_\nu = \sup_{\pi\in \mathrm{Rep}\, l^1(G;A)} \|\pi(F)\|$$

とおくと $\|\cdot\|_\nu$ は $l^1(G;A)$ 上の C^*norm になり

$$G\otimes_\nu A = \overline{(l^1(G;A), \|\cdot\|_\nu)}$$

とおき A の G による C^*接合積と呼ぶことにする。 $A=\mathbb{C}$ の場合は G の enveloping C^*algebra $C^*(G)$ である。([26])
さらに $l^1(G;A)\ni F$ に対して

$$\|F\|_\alpha = \sup_{\rho\in \mathrm{Rep}\, A}\|(\mathrm{Ind}\,\rho)(F)\|$$

とおく。 ただし $\mathrm{Ind}\,\rho$ は $(\mathrm{Ind}\,\rho)(F)$ の matrix 表示が $(\mathrm{Ind}\,\rho)(F)_{s,t} = \rho[s^{-1}(F_{st^{-1}})]$ なる $l^1(G;A)$ から $G\otimes\mathfrak{H}_\rho$ 上への表現を意味する。
その時 $\|\cdot\|_\alpha$ も同様にして $l^1(G;A)$ 上の C^*norm になり

$$G\otimes_\alpha A = \overline{(l^1(G;A), \|\cdot\|_\alpha)}$$

とおきこの C^*algebra を reduced な接合積と呼ぶことにする。
([26]) これは Turumaru による C^*接合積に一致する。([26])
しかも $(G\otimes_\alpha \mathbb{C})^\wedge = \hat{G}_r$ となる。([26])

§3. Extension property と property T

先ず Tomiyama([24]) による extension property (略して(E.P)と書く)を接合積の中に持ち込んだ話をしよう。 $\mathcal{A}$ を unital C^*-algebra とする。今 $\mathcal{A}$ が(E.P)を持つ(略して $\mathcal{A}\in$(E.P)と書く)と云うのを $\mathcal{A}$ を含む任意の unital C^*-algebra $\mathcal{B}$ に対して $\mathcal{B}$ から $\mathcal{A}$ への expectation $\mathcal{E}$ が存在する時を云う。 $\mathcal{A}$ が $\mathfrak{H}$ 上の von Neumann algebra の時は $\mathcal{A}\in$(E.P) なる必要かつ十分な条件は $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ から $\mathcal{A}$ への expectation $\mathcal{E}$ が存在することである。([24]) これを使って次の定理を証明する

定理 1. $\mathcal{M}$ を $\mathfrak{H}$ 上の finite von Neumann algebra とし G を $\mathcal{M}$ 上の countable discrete group とする。そして τ を normalized な normal G-invariant trace (on $\mathcal{M}$) とする。その時 $G\otimes\mathcal{M}\in$(E.P) なる為の必要十分条件は $\mathcal{M}\in$(E.P) かつ G が amenable であることである。

証明：

もし $G\otimes\mathcal{M}\in$(E.P) なら $\mathcal{L}(G\otimes\mathfrak{H})$ から $G\otimes\mathcal{M}$ への expectation $\tilde{\pi}$ が存在する。 $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ から $\mathcal{M}$ への expectation π としては

$$\pi = \Phi^{-1}\circ e\circ\tilde{\pi}\circ\Phi$$

とおけばよい。ただし Φ は $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ から $\mathcal{L}(G\otimes\mathfrak{H})$ への ampliation であり、e は $G\otimes\mathcal{M}$ から $1\otimes\mathcal{M}$ への canonical expectation である。よって $\mathcal{M}\in$(E.P) である。次に G が amenable を云う為に次の補題

をおく.

補題2.([8]) $\ell^\infty(G)$ から $\mathcal{L}(G\otimes\mathcal{H})$ への positive linear map で次の性質を満たすものが存在する。
$f\mapsto A_f$ を求めるものとすると $A_1=I$, $(g\otimes 1)A_f(g\otimes 1)^*=A_{f_g}$ ただし $f_g(h)=f(hg)$ なる $\ell^\infty(G)$ の element である。

証明:

$$A_f(\Sigma g\otimes x_g)=\Sigma_g f(g)g\otimes x_g$$ とおけばよい。

さて本論に戻って

$$\tilde{\tau}[\Sigma g\otimes x_g]=\Sigma_g \delta_{g,e}\tau(x_g)$$

とおくと、$\tilde{\tau}$ は $G\otimes\mathcal{M}$ 上の normalized normal trace となる。そこで $\ell^\infty(G)$ 上の函数 μ を

$$\mu(f)=\langle A_f,\ {}^t\tilde{\pi}(\tilde{\tau})\rangle \qquad (f\in\ell^\infty(G))$$

とおく. ただし A_f は補題2に於ける $G\otimes\mathcal{H}$ 上の operator である。${}^t\tilde{\pi}$ は $\tilde{\pi}$ の transpose map である。 その時 μ は $\ell^\infty(G)$ 上の mean になることは明らかである. さらに

$$\begin{aligned}\mu(f_g)&=\langle A_{f_g},\ {}^t\tilde{\pi}(\tilde{\tau})\rangle=\langle (g\otimes 1)A_f(g\otimes 1)^*,\ {}^t\tilde{\pi}(\tilde{\tau})\rangle\\&=\langle (g\otimes 1)\tilde{\pi}(A_f)(g\otimes 1)^*,\ \tilde{\tau}\rangle=\langle \tilde{\pi}(A_f),\tilde{\tau}\rangle\\&=\mu(f) \qquad (g\in G)\end{aligned}$$

よって μ は $\ell^\infty(G)$ 上の right invariant mean となり G は amenable になる。

逆に $\mathcal{M}\in(E.P)$ とし G を amenable とすると、Tomiyama([24])により

$\mathcal{M}'\in(E.P)$ より $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ から $\mathcal{M}'$ への expectation π' が存在する。さらに $\mathcal{L}(G\otimes\mathcal{H})$ から $\mathcal{L}(\ell^2(G))\otimes\mathcal{M}'$ への expectation $1\otimes\pi'$ で $(1\otimes\pi')(x\otimes y)=x\otimes\pi'(y)$ なる条件を満たすものが存在する。 $\mathcal{L}(\ell^2(G))\otimes\mathcal{M}'=(1\otimes\mathcal{M})'$ より任意の $X\in\mathcal{L}(G\otimes\mathcal{H})$ に対して $(1\otimes\pi')(X)\in(1\otimes\mathcal{M})'$ よって

(1) $$(g\otimes 1)(1\otimes\pi')(X)(g\otimes 1)\in(1\otimes\mathcal{M})'$$

G は amenable より invariant measure μ が G 上に存在する。ゆえに(1)より

(2) $$\int_G (g\otimes 1)(1\otimes\pi')(X)(g\otimes 1)^* d\mu(g)\in(1\otimes\mathcal{M})'$$

又 $h\otimes 1\in G\otimes 1$ に対して

$$\begin{aligned}&(h\otimes 1)\left\{\int_G (g\otimes 1)(1\otimes\pi')(X)(g\otimes 1)^* d\mu(g)\right\}(h\otimes 1)^*\\ &=\int (hg\otimes 1)(1\otimes\pi')(X)(hg\otimes 1)^* d\mu(g)\\ &=\int (g\otimes 1)(1\otimes\pi')(X)(g\otimes 1)^* d\mu(g)\end{aligned}$$

よって(2)より

(3) $$\int_G (g\otimes 1)(1\otimes\pi')(X)(g\otimes 1)^* d\mu(g)\in(G\otimes\mathcal{M})'$$

よって

(4) $$\overline{co}^w\{U(1\otimes\pi')(X)U^*\,;\ U \text{ は } G\otimes\mathcal{M} \text{ の unitary}\}\cap(G\otimes\mathcal{M})'\neq\phi$$

Tomiyama ([24]) により (4) から $(1\otimes\mathcal{M})'$ より $(G\otimes\mathcal{M})'$ への expectation ρ が存在する.

$$\tilde{\pi}'=\rho\circ(1\otimes\pi')$$

とおくと $\tilde{\pi}'$ は $\mathcal{L}(G\otimes\mathcal{H})$ から $(G\otimes\mathcal{M})'$ への expectation である。ゆえに $(G\otimes\mathcal{M})'\in(E.P)$ よって $G\otimes\mathcal{M}\in(E.P)$ となり証明が終る。

これは次の系の拡張になっていると考えられる。

> <u>系3.</u>([24]) Gを countable discrete group とする。その時Gによる group von Neumann algebra $U(G)$が(EP)を持つ為の必要十分な条件はGが amenable となることである。

この系に関連して極最近 Lance は $C^*(G)$が Property T を持つ為の必十条件はGが amenable である、という結果を出したが、これはC^*接合積の中に話を持ち込むことが出来ることを以下に述べよう。ただしここでいう Property T と云うのは$\mathcal{A}$をC^*algebraとした時に$\mathcal{A}$が<u>Property T を持つ</u>と云うのを(以下$\mathcal{A}\in(T)$と書く)任意のC^* algebra $\mathcal{B}$に対して$\mathcal{A}\hat{\otimes}_\alpha\mathcal{B}=\mathcal{A}\hat{\otimes}_\nu\mathcal{B}$が成り立つことをそういうのである。([22])

さて次のことを示そう。(証明は Takesaki によるところが多い)

> <u>定理4.</u> $\mathcal{A}$を separable C^*algebra としGをその上の discrete automorphism group とする。その時$G\otimes_\alpha\mathcal{A}\in(T)$なる為の必要十条件は$\mathcal{A}\in(T)$で$G$が amenable となることである。

証明:

もし$G\otimes_\alpha\mathcal{A}\in(T)$ならば任意の$C^*$algebra $\mathcal{B}$に対して

$$\mathcal{A}\odot\mathcal{B}\subset(G\otimes_\alpha\mathcal{A})\odot\mathcal{B},$$

ただし$\odot$は代数的な tensor product を意味する。$(G\otimes_\alpha\mathcal{A})\odot\mathcal{B}$上で$\alpha=\nu$より$\mathcal{A}\odot\mathcal{B}$上で$\alpha=\nu$、よって$\mathcal{A}\in(T)$となる。次に$G$が amenable になることを示す。$\pi$を$\mathcal{A}$の$\mathfrak{H}$上への standard 表現とし、

J_πを$\mathfrak{H}_\pi$上の involution とする．$(\mathcal{G},\mathcal{A})$の covariant 表現を次の様に定義する：

$$(\tilde{\ell}(s)\xi)(t)=\xi(ts)\ ,\quad (\tilde{\pi}(x)\xi)(t)=\pi\circ t(x)\xi(t)$$

$$(\tilde{r}(s)\xi)(t)=\xi(s^{-1}t)\ ,\quad (\tilde{\pi}'(x)\xi)(t)=J_\pi\pi\circ t^{-1}(x)J_\pi\xi(t^{-1})\qquad ([20])$$

$$\begin{pmatrix} t,s\in\mathcal{G}\ ,\ x\in\mathcal{A} \\ \xi\in\ell^2(\mathcal{G})\otimes\mathfrak{H}_\pi \end{pmatrix}$$

さらに$\mathcal{G}\otimes_\nu\mathcal{A}\ni F$に対して

$$\pi(F)=\sum_{g\in\mathcal{G}}\tilde{\pi}(F_g)\tilde{\ell}(g)$$

$$\pi'(F)=\sum_{g\in\mathcal{G}}\tilde{\pi}'(F_g)\tilde{r}(g)$$

とおくと、π,π'は$\mathcal{G}\otimes_\nu\mathcal{A}$の$\ell^2(\mathcal{G})\otimes\mathfrak{H}_\pi$上の表現となる．明らかに$\pi,\pi'$は可換より$(\mathcal{G}\otimes_\nu\mathcal{A})\hat{\otimes}_\nu(\mathcal{G}\otimes_\nu\mathcal{A})$の$\ell^2(\mathcal{G})\otimes\mathfrak{H}_\pi$上への表現$\pi_0$で次の条件を満たすものが存在する：

$$\pi_0(F\otimes G)=\pi(F)\pi'(G)\qquad (F,G\in\mathcal{G}\otimes_\nu\mathcal{A})$$

π_0の作り方より$\pi_0|_{\mathcal{G}\times\mathcal{G}}=\tilde{\ell}\times\tilde{r}$より$\ell\times r$に *quasi-equivalent* である。ただしℓ, rはそれぞれ$\mathcal{G}$から$\ell^2(\mathcal{G})$上の *left regular*, *right regular* 表現である．今仮定より$\mathcal{G}\otimes_\nu\mathcal{A}\in(T)$だから次のことが成立する：

$$(\mathcal{G}\otimes_\nu\mathcal{A})\hat{\otimes}_\nu(\mathcal{G}\otimes_\nu\mathcal{A})=(\mathcal{G}\otimes_\nu\mathcal{A})\hat{\otimes}_\alpha(\mathcal{G}\otimes_\nu\mathcal{A}),$$

だからπ_0はα-*norm*に関して *continuous* である。よって$\ell\times r$はα-*norm*に関して *continuous* である．だから Lanceによって$\mathcal{G}$は *amenable* である。逆に$\mathcal{A}\in(T)$で$\mathcal{G}$が *amenable* とすると、

Zeller-Meier によって $G\otimes_\alpha\mathcal{A}=G\hat{\otimes}_\alpha\mathcal{A}$ である。$\mathcal{A}\in(T)$だから、任意の C^*-algebra $\mathcal{B}$に対して

$$
\begin{aligned}
(G\otimes_\alpha\mathcal{A})\hat{\otimes}_\alpha\mathcal{B} &= G\otimes_\alpha(\mathcal{A}\hat{\otimes}_\alpha\mathcal{B}) = G\otimes_\alpha(\mathcal{A}\otimes_\alpha\mathcal{B}) \\
&= G\otimes_\alpha(\mathcal{A}\hat{\otimes}_\alpha\mathcal{B}) = (G\otimes_\alpha\mathcal{A})\hat{\otimes}_\alpha\mathcal{B} \\
&= (G\otimes_\alpha\mathcal{A})\hat{\otimes}_\alpha\mathcal{B},
\end{aligned}
$$

よって $G\otimes_\alpha\mathcal{A}\in(T)$となる。　　　　　　　　　　証明終.

注：　C^*-algebra の type(E)の話も同様に出来るように思われる。

§4. Inequivalent non approximately finite groups

Krieger は([15])の中で inequivalent な nonapproximately finite な2つの group を与えたが、ここでは Choda の結果を用いて3つの inequivalent な non approximately finite group の example を与える。　先ず Dye と Haga ([9],[27]) による full group の話を少ししておく。　$\mathcal{M}$を von Neumann algebra とし Gをその上の countable automorphism group とする。今$[G]$を次の様に定義する：

$$[G]=\{\alpha\in Aut(\mathcal{M})\,;\ \sup_{\beta\in G}F(\alpha,\beta)=1\},$$

ただし

$$F(\alpha,\beta)=\text{largest}\,\{P\in(\mathcal{M}\cap\mathcal{M}')^P \mid \alpha^{-1}\beta\,;\ \text{inner on } \mathcal{M}_P\}$$

と定義する。 $[\mathfrak{G}]$は$\mathfrak{G}$を含む*group*になり$[[\mathfrak{G}]]=[\mathfrak{G}]$を満たす。このgroupを$\mathfrak{G}$による***full group***という。さて今M_iを*von Neumann algebra* $(i=1,2)$としα, βをそれぞれM_1, M_2上の*automorphism*とする。ΦをM_1からM_2上への*isomorphism*とした時$\Phi(\alpha)$, $\Phi^{-1}(\beta)$を次の様に定義する：

$$\Phi(\alpha)=\Phi\circ\alpha\circ\Phi^{-1}, \quad \Phi^{-1}(\beta)=\Phi^{-1}\circ\beta\circ\Phi$$

その時$\Phi(\alpha)$, $\Phi^{-1}(\beta)$はそれぞれM_2, M_1上の*automorphism*となる。この*notation*を使ってDyeによる*weak equivalence*の*notion*を導入する。 $\mathfrak{G}_i$をM_i上の*countable automorphism group*とする。$(i=1,2)$ $\mathfrak{G}_1$と$\mathfrak{G}_2$が***equivalent***(Dyeによる*weakly equivalent*)であると云うのをM_1からM_2上への*isomorphism* Φで次の条件を満たす時を云う：

$$[\Phi^{-1}(\mathfrak{G}_2)]=[\mathfrak{G}_1] \quad .$$

*equivalence*の特徴付けとしてChodaによる次の定理がある：

> **定理5.** [Z] M_iを*abelian von Neumann algebra*とし、τ_iをM_i上の*normalized faithful normal trace*とし、$\mathfrak{G}_i$をτ_i-*preserving*なM_i上の*countable freely acting automorphism group*とする。その時、$\mathfrak{G}_1$と$\mathfrak{G}_2$が*equivalent*である為の必要十分条件は$\mathfrak{G}_1\otimes M_1$から$\mathfrak{G}_2\otimes M_2$上への*isomorphism* Φが存在して次の条件を満足することである：
>
> $$\Phi(M_1)=M_2 \quad .$$

これによりもし $G_1\otimes\mathcal{M}_1$ から $G_2\otimes\mathcal{M}_2$ への isomorphism が存在しないならば G_1 と G_2 は inequivalent である. 一方 Dye による group の approximate finiteness について少し述べる. ([9]) (X,Σ,μ) を standard normalized measure space とし G をその上の countable freely acting automorphism group とする. G が approximately finite であると云うのを任意の $\varepsilon>0$ と G の元 $(g_i)_{i=1}^n$ に対して G の finite subgroup G_0 と G_0 の元 $(h_i)_{i=1}^n$ で次の条件を満たすものが存在することである:

$$\sup_{E\in\Sigma}\mu(Eg_i\,\Delta\, Eh_i)\le\varepsilon \qquad (1\le i\le n).$$

Dye により G が non approximately finite である為の十分条件は G の subset A と元 $(g_i)_{i=1}^3$ で

(*) $$A\cup g_1A=G,\quad g_2A\cap g_3A=\phi,\quad g_2A\cup g_3A\subset g_1A$$

なるものが存在することである. 例えば Φ_2 を2元 u,v から生成される free group とすると $A=\{u^n\cdots\mid n\neq0\}$, $g_1=u$, $g_2=v$, $g_3=v^{-1}$ とおくと(*)を満たすから Φ_2 は non approximately finite group である. ([9]) Π を finite permutation group とする. その時, Murray-von Neumann により Φ_2,Π はそれぞれ或る maximal abelian von Neumann algebra 上の trace preserving な freely acting, ergodic automorphism group として表現される. その algebra を $\mathcal{A},\mathcal{B}$ とすると、よく知られているように $\Pi\otimes\mathcal{B}$ は Property Γ を持ち $\Phi_2\otimes\mathcal{A}$ は持たない. ([17]) 一方 Saito により $(\Phi_2\times\Pi)\otimes(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})$ は

$(\Phi_2\otimes\mathcal{A})\otimes(\Pi\otimes\mathcal{B})$ に isomorphic より([19])、Misonou の結果より、$(\Phi_2\times\Pi)\otimes(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})$ は Property Γ を持つ。([16]) よって定理5を使うと次の Krieger の結果を得る：

> **定理6.**([15]) Φ_2 と $\Phi_2\times\Pi$ は互いに inequivalent な non approximately finite な countable freely acting ergodic group である。

さて3つ目の group を作る為に次に一連の補助定理を証明なしに述べる：

先ず Bures によるものとして

> **補助定理7.**([1]) $\mathcal{A}_n$ を maximal abelian von Neumann algebra とし、G_n をその上の freely acting ergodic automorphism group とする。さらに x_n を $\mathcal{A}_n$ に対する separating かつ generating unit vector とすると、($n\geq 1$)
>
> (i) G_n の restricted direct product $\coprod_n G_n$ は (x_n)-adic tensor product $\bigotimes_n^{(x_n)}\mathcal{A}_n$ 上の freely acting ergodic group となる。
>
> (ii) $\left(\coprod_n G_n\right)\otimes\left(\bigotimes_n^{(x_n)}\mathcal{A}_n\right)$ は $\bigotimes_n^{(\delta_{e_n}\otimes x_n)}(G_n\otimes\mathcal{A}_n)$ に同型になる。ただし e_n は G_n の unit element である。

次に Sakai によるものとして

> **補助定理8.**([20]) $\mathcal{M}$ を finite factor とすると $\mathcal{M}$ の C-adic tensor product $\bigotimes_n^{C}\mathcal{M}_n$ ($\mathcal{M}_n=\mathcal{M}$) は asymptotically abelian である。(略して $\bigotimes_n^{C}\mathcal{M}_n\in(A.A)$ と書く。)

Φ_2, $(\Phi_2\times\Pi)$ をそれぞれ $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ 上で作用しているとすると

補助定理9. $\Phi_2\otimes\mathcal{A}$, $(\Phi_2\times\Pi)\otimes\mathcal{B} \notin (A.A)$

これだけの準備をして主結果を述べると

定理10. Φ_2による *restricted direct product* $\coprod_n \Phi_2$ は Φ_2, $\Phi_2\times\Pi$ に *inequivalent* な *non approximately finite countable freely acting ergodic group* である。

証明：

xを$\mathcal{A}$に対する *generating* でかつ *separating unit vector* とする。補助定理7(ii)により

$$\Big(\coprod_n\Phi_2\Big)\otimes \bigotimes_n^{(x)}\mathcal{A} \text{ は } \bigotimes_n^{(\delta_e\otimes x)}(\Phi_2\otimes\mathcal{A}) \text{ に同型で}$$

$\Phi_2\otimes\mathcal{A}$ は *finite factor* より補助定理8により $(\coprod_n\Phi_2)\otimes(\bigotimes_n^{(x)}\mathcal{A})$ は (A.A) を持つ。一方補助定理9により $\Phi_2\otimes\mathcal{A}$, $(\Phi_2\times\Pi)\otimes\mathcal{B}$ は (A.A) を持たない。よって定理5により $\coprod_n\Phi_2$ は Φ_2, $\Phi_2\times\Pi$ に *inequivalent* である。*non approximately finite* は明らかである。証明終。

注： Ching により *inequivalent* な *non approximately finite group* の個数は連続濃度程有るらしいように思われる。[6]

§5. *Modular automorphism and algebraic invariant* T.

最後に Connes の導入した *algebraic invariant* T について、これを接合積に持ち込んだ話をして話を終ります。

極最近Connesはfaithful normal stateにdependするmodular automorphismはinnerを除いて決まることを示した。([7]) さらに彼はalgebraic invariant Tを導入して種々の性質を求めた.([8]) 今$\mathcal{M}$をσ-finite G-finite von Neumann algebraとする. これはfaithful normal G-invariant state φが存在することと同値である. ただしGは$\mathcal{M}$上のcountable automorphism groupとする. σ_t^φをφにdependして決まるmodular automorphismとすると、TakesakiによりφはG-invariantだからσ_t^φとGは互いにelementwiseに可換である.([21]) だから次のautomorphismが$G\otimes\mathcal{M}$上に定義される：

(1) $$(\iota\otimes\sigma_t^\varphi)(\sum g\otimes x_g)=\sum g\otimes\sigma_t^\varphi(x_g).$$

今Gelfand-Segal表現により$\varphi=\omega_\xi$と仮定できる. ただしω_ξはseparatingかつgenerating unit vector ξに対するvector stateである。

さてmodular automorphismについて、$e\otimes\xi$は$G\otimes\mathcal{M}$に対するseparatingかつgenerating unit vectorより$e\otimes\xi$に対するmodular automorphism $\sigma_t^{e\otimes\xi}$は次の様になる。 ただしeはGのunit elementである.

補助定理11.

$$\sigma_t^{e\otimes\xi}=\iota\otimes\sigma_t^\xi\quad(t\in R^1)$$

証明：

$\omega_{e\otimes\xi}$が$\iota\otimes\sigma_t^\varphi$に対してKMS条件を満たすことを示す。

$$\omega_{e\otimes\xi}[(\iota\otimes\sigma_t^\xi)(\Sigma_g g\otimes x_g)(\Sigma_h h\otimes y_h)] = \Sigma_g \langle g\cdot\sigma_t^\xi(x_g)y_{g^{-1}}\xi|\xi\rangle$$
$$= \Sigma_g \varphi[\sigma_t^\xi\cdot g(x_g)y_{g^{-1}}],$$

同様にして

$$\omega_{e\otimes\xi}[(\Sigma_h h\otimes y_h)(\iota\otimes\sigma_t^\xi)(\Sigma_g g\otimes x_g)] = \Sigma_g \langle g^{-1}(y_{g^{-1}})\sigma_t^\xi(x_g)\xi|\xi\rangle$$
$$= \Sigma_g \varphi[y_{g^{-1}}\sigma_t^\xi(g^\circ(x_g))] .$$

φはσ_t^ξに対するKMS stateより、$(g(x_g), y_{g^{-1}})$に対して$B=\{0\leq \mathrm{Im}\, z\leq 1\}$上でbounded continuous function F_gでBの中でholomorphicであり次の条件を満たすものが存在する：

$$F_g(t)=\varphi[\sigma_t^\xi\cdot g(x_g)y_{g^{-1}}] ,\quad F_g(t+i)=\varphi[y_{g^{-1}}\sigma_t^\xi\cdot g(x_g)] \quad (t\in R^1).$$

そこでGはcountableより$(g_i)_{i=1}^\infty$としてよい。

$$\widetilde{F}_n(z)=\Sigma_{i=1}^n F_{g_i}(z)$$

とおくと$\widetilde{F}_n$はB上でbounded continuousでBの中でholomorphicとなる。又$\{\widetilde{F}_n(t)\}_n$と$\{\widetilde{F}_n(t+i)\}_n$はそれぞれuniformly boundedで$R^1, R^1+i$上でuniformly convergeする。よってmaximum-modulus theoremにより$\{\widetilde{F}_n\}_n$は或るbounded function $F(z)$にuniformly convergeする。ゆえにFはB上でcontinuousであり、Bの中でholomorphicである。さらに

$$F(t)=\Sigma_g F_g(t)=\omega_{e\otimes\xi}[(\iota\otimes\sigma_t^\xi)(\Sigma g\otimes x_g)(\Sigma h\otimes y_h)]$$
$$F(t+i)=\Sigma_g F_g(t+i)=\omega_{e\otimes\xi}[(\Sigma h\otimes y_h)(\iota\otimes\sigma_t^\xi)(\Sigma g\otimes x_g)] .$$

φはσ_t^ξ-invariantより$\omega_{e\otimes\xi}$は$\iota\otimes\sigma_t^\xi$-invariantになる。よって

uniquenessにより $\sigma_t^{\varphi\otimes\xi}=\iota\otimes\sigma_t^{\xi}$ となる。　　証明終。

さて次にConnesにより導入されたTの話を少ししよう。$\mathcal{M}$を任意のvon Neumann algebraとする。

$$T(\mathcal{M})=\{T\in R^1 \mid \text{或る faithful normal state } \varphi \text{ に対して } \sigma_T^{\varphi}=\iota_{\mathcal{M}}\}$$

として$T(\mathcal{M})$を定義するとこれはR^1のsub(additive) groupとなる。([7]) さらに$T\in T(\mathcal{M})$である為の必要十分条件はσ_T^{φ}をinnerにするようなfaithful normal state φが存在することである。([7]) 話を接合積にもどすと$T(G\otimes\mathcal{M})$は次のように特徴付けることができる：

補助定理12. $\mathcal{M}$をσ-finite G-finite von Neumann algebraとしξを$\mathcal{M}$に対するseparatingかつgenerating unit vectorとし、ω_ξをG-invariantとすると、$T_0\in T(G\otimes\mathcal{M})$である為の必要かつ十分な条件は次の条件を満たすfamily $(a_g)_{g\in G}$が$\mathcal{M}$の中に存在することである：

(i) $\sum_g a_g^* a_g=1=\sum_g a_g a_g^*$, (ii) $g(a_h)=a_{ghg^{-1}}$ (iii) $\sigma_{T_0}^{\xi}(x)a_g=a_g\, g(x)$ $(g,h\in G,\ x\in\mathcal{M})$

証明：

$T_0\in T(G\otimes\mathcal{M})$ ならば $\sigma_{T_0}^{\psi}=\iota_{G\otimes\mathcal{M}}$ なる $G\otimes\mathcal{M}$上のfaithful normal state ψが存在する。Connesにより

$$(2)\qquad \sigma_t^{\varphi\otimes\xi}(x)=u_t\,\sigma_t^{\psi}(x)\,u_t^* \quad (t\in R^1,\ x\in G\otimes\mathcal{M})$$

なる$G\otimes\mathcal{M}$のunitary operator u_t $(t\in R^1)$が存在する。補助定理11

と(2)によって

(3) $$(\iota\otimes\alpha^{\xi}_{T_0})(x) = u_{T_0}\,x\,u^*_{T_0} \qquad (x\in G\otimes M)$$

u_{T_0}は unitary operator より

$$u_{T_0} = \Sigma\, g\otimes a_g \qquad (\text{w.r.t } \widetilde{\omega}_{\xi}\text{-norm})$$

とすると $\Sigma_g a_g^* a_g = 1 = \Sigma a_g a_g^*$ は明らかである。又(3)によって

$$g\otimes 1 = (\iota\otimes\alpha^{\xi}_{T_0})(g\otimes 1) = u_{T_0}(g\otimes 1)\,u^*_{T_0} \qquad (g\in G)$$

よって $g(a_h) = a_{ghg^{-1}}$ を得る。さらに

$$1\otimes\alpha^{\xi}_{T_0}(x) = u_{T_0}(1\otimes x)\,u^*_{T_0} \qquad (x\in M)$$

よって $\alpha^{\xi}_{T_0}(x)a_g = a_g\, g(x)$ を得る。 逆は $u = \Sigma_g g\otimes a_g$ とおくと $\Sigma a_g^* a_g = 1 = \Sigma a_g a_g^*$ より u は $G\otimes M$ 上の unitary operator となる。又(i)(iii)により $\alpha^{\varphi\otimes\xi}_{T_0}(x) = u\,x\,u^*$ $(x\in G\otimes M)$ となり Connes より T_0 は $T(G\otimes M)$ に属する。 証明終。

この補助定理により次の主結果を証明する：

定理13. M を σ-finite G-finite von Neumann algebra とする。ただし G は M 上の countable automorphism group とする。H を G の subgroup として次の条件を満たすとする：

$G\backslash H \ni g$ に対して

$$C_g = \{hgh^{-1} \mid h\in G\} \text{ は infinite である.}$$

その時

$$T(G\otimes M) \subset T(H\otimes M)$$

証明：

$T(G\otimes\mathcal{M})\ni T_0$ に対して、補助定理12より

$$^{(i)}\ \sum a_g^* a_g = 1 = \sum a_g a_g^*,\quad ^{(ii)}\ h(a_g) = a_{hgh^{-1}},\quad ^{(iii)}\ \sigma_{T_0}^{\xi}(x)a_g = a_g\, g(x)$$
$$(g, h\in G,\ x\in\mathcal{M})$$

なる $\mathcal{M}$ の family $(a_g)_{g\in G}$ がとれる。 ただし ξ は $\mathcal{M}$ に対する cyclic かつ separating unit vector で $\varphi=\omega_\xi$ は G-invariant である.

今もし $G\backslash H$ の或る element g_0 に対して $a_{g_0}\neq 0$ とすると、φ は G-invariant より, (iii) の条件から

$$(4)\qquad 0\neq\varphi(a_{g_0}^* a_{g_0}) = \varphi[h(a_{g_0})^* h(a_{g_0})] = \varphi(a_{hg_0h^{-1}}^* a_{hg_0h^{-1}})\quad (h\in G),$$

仮定より C_{g_0} は infinite より, (4) から

$$+\infty = \sum_{h\in G}\varphi(a_{g_0}^* a_{g_0}) = \sum_{h\in G}\varphi(a_{hg_0h^{-1}}^* a_{hg_0h^{-1}})$$
$$\leq \sum_{g\in G}\varphi(a_g^* a_g) = \varphi[\textstyle\sum_g a_g^* a_g] = \varphi(1) = 1$$

これは矛盾。 よって $G\backslash H\ni g$ に対して $a_g = 0$ となる。 だから補助定理12により $T_0\in T(H\otimes\mathcal{M})$ となる。 証明終

$H=\{e\}$ とした時上の定理より次の系を得る：

系14. G を ICC-group とした時

$$T(G\otimes\mathcal{M})\subset T(\mathcal{M})$$

が成り立つ。

注： 補助定理11より $\Delta_{e\otimes\xi}^{it} = 1\otimes\Delta_\xi^{it}$ を得られると思われるので $S(G\otimes\mathcal{M})\subset S(\mathcal{M})$ が十分多くの faithful normal G-invariant state が $\mathcal{M}$ 上に存在する時成り立つように思われる。 ただし

$$S(\mathcal{M}) = \bigcap_{\substack{\varphi;\ \text{faithful normal} \\ \text{state of } \mathcal{M}}} \sigma(\Delta_\varphi)$$

である。([8])

最近の情報によればConnesはG-invariantでない場合、$\mathcal{M}$をabelianにして$T(G \otimes \mathcal{M})$, $S(G \otimes \mathcal{M})$について解析しているそうです。

参考文献

[1] D.J.C. Bures : Certain factors constructed as infinite tensor products, Comp math., 15, 169−191 (1963).

[2] H. Choda : On the crossed product of abelian von Neumann algebras II, Proc. Japan Acad., 43, 198−201 (1967).

[3] H. Choda and M. Echigo : Some Remarks on von Neumann algebras with the Property Q, memoirs of Osaka Gakugei University., 13, 13−21 (1964).

[4] M. Choda and H. Choda : A remark on a construction of finite factors I, II, Proc. Japan. Acad., 40, 471−478 (1964), 479−481 (1964).

[5] W. Ching: Non-isomorphic non-hyperfinite factors, Canad. J. Math., 21, 1293–1308 (1969).

[6] ________: A continuum of non-isomorphic non-hyperfinite factors, Comm on pure and applied. Math., XXIII, 921–937 (1970).

[7] A. Connes: Groupe modulaire d'une algebre de genre denombrable, to appear.

[8] ________: Un nouvel invariant pour les algebres de von Neumann, C.R. Acad. Paris, Ser. A 273, 900–903 (1971).

[9] H.A. Dye: On groups of measure preserving transformations I, Amer. J. Math., 81, 119–159 (1959).

[10] E.G. Effros and F. Hahn: Locally compact transformation groups and C*-algebras., Memoirs of the Amer. Math. Soc, 75 (1967).

[11] J. Glimm: ~~Type~~ Families of induced representations, Pacific J. Math., 12 (1962) 885–911.

[12] A. Guichardet: Caractères des algèbres de Banach involutives, Ann. Inst. Fourier., 13, (1963) 1–81.

[13] ________: Produits tensoriels infinis et représentations des relations d'anticommutation. Ann. Soc. École Norm. Sup.,

[14] M. Henle : Galois theory of W*-algebras, to appear in Trans. Amer. Math. Soc.

[15] W. Krieger : On the isomorphy problem for ergodic equivalence relations, Math. Z., 103, (1968) 78-84.

[16] Y. Misonou : On divisors of factors, Tohoku Math. J., 3, (1951) 132-135.

[17] F. J. Murray and J. von Neumann : On rings of operators III, IV, Ann. Math., 41, (1940) 94-161, 44, (1943) 716-808.

[18] M. Nakamura and Z. Takeda : A Galois theory for finite factors, Proc. Japan Acad., 36 (1960) 258-260.

[19] T. Saitô : The direct product and crossed product of rings of operators, Tohoku Math J., 11, (1959) 229-304.

[20] S. Sakai : Asymptotically abelian II_1-factors, Publ. Res. Inst. Soc., 4, (1968) 299-307.

[21] M. Takesaki : Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications, Lecture notes in Mathematics 128, Springer-Verlag (1970).

[22] ―――――― : On the cross-norm of the direct product of C*-algebras, Tohoku Math. J., 16, 111-122 (1964).

[23] ―――――― : Covariant representations of C*-algebras and their locally compact automorphism groups,

Acta. Math., 119, (1967) 273-303.

[24] J. Tomiyama: Tensor products and projections of norm one in von Neumann algebras, Lecture note, Univ of Copenhagen., (1970).

[25] T. Turumaru: On the crossed product of operator algebras., Tohoku Math. J., 10, (1958) 355-365.

[26] G. Zeller-Meier: Produits croisés d'une C*-algèbre par un groupe d'automorphismes, J. Math. pures et appl., 47, [redacted] (1968) 101-239.

[27] Y. Haga and Z. Takeda: Correspondence between subgroups and subalgebras in a cross product von Neumann algebra, Tohoku Math. J., 24 (1972) 167-190.