数理解析研究所講究録
第166巻 1972年 101-108

Derivation and Automorphisms of operator algebras II

奈良高専　北川誠之助

§1 序

本講演は

Kadison, Lance and Ringrose

Derivation and Automorphisms of operator algebras II

Journal of functional analysis 1967, II

を紹介する

Kadison Ringrose による同名の論文 I においては automorphism group を norm による topology を入れ, connected component, etc が論じられているが. 本論文においては, C^*-algebra における derivation ~~の~~ が inner ~~である~~ になる条件を論じている.

§2 記号及び定義

$\mathfrak{A}$ = $\mathfrak{H}$ 上に働く C^*-algebra.

$\bar{\mathfrak{A}}$: $\mathfrak{A}$ の weak closure

δ : $\mathfrak{A}$ の derivation.

$\bar{\delta}$: δ の $\bar{\mathfrak{A}}$ への拡張 ~~時~~ とする. $\|\delta\| = \|\bar{\delta}\|$ は知られている [ ]

ここで δ が derivation であるとは,

$\delta : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}$: linear mapping.

$\mathfrak{A} \ni {}^\forall A, B$. $\delta(AB) = A\delta(B) + \delta(A)B$

特に δ が $*$-derivation とは $\delta(A^*) = \delta(A)^*$

δ = inner-derivation とは. $\exists A \in \mathfrak{A}$ s.t $\delta(B) = ad(A)(B) = AB - BA$ for ${}^\forall B$

§3 derivation.

[1] [2] により $\bar{\delta}$ は $\bar{\mathfrak{A}}$ において inner-derivation となることが示されているが、次の定理はその精密化である。

定理1 δ = $\mathfrak{A}$ の $*$-derivation.

$\Rightarrow$ 次のような性質をみたす self-adjoint operator H が $\bar{\mathfrak{A}}$ に一意的に存在する

i) Q : 任意の central projection.

$$\frac{1}{2}\|\bar{\delta}|\bar{\mathfrak{A}}_Q\| = \|H|_{Q\mathfrak{H}}\|$$

$$\|H|_{Q\mathfrak{H}}\| = \sup_{\|Qx\|=\|x\|=1} (Hx, x) = -\inf_{\|Qx\|=\|x\|=1} (Hx, x)$$

ii) $\bar{\delta} = i\,ad\,H$

《proof》

$\alpha_t = e^{t\bar{\delta}}$ は $\bar{\delta}$ が inner $*$-derivation だから、α_t は $\bar{\mathfrak{A}}$ の inner automorphism となる $\{\alpha_t : -\infty < t < \infty\}$ は norm-conti inner automorphism だから. 十分小さな t に対して.

$\|\alpha_t - I\| < 2$ を満足する.

[1] Lemma 5 より、α_t を implement する、unitary operator U_t を次の性質を満たすように取れる

$$Sp(U_t) \subset \{z : \operatorname{Re} z \geq \tfrac{1}{2}\sqrt{4-\|\alpha_t - I\|^2}\}$$

従って $U_t = e^{iB_t}$ とする B_t = self-adjoint in $\mathfrak{R}$

$$\|B_t\| \leq \operatorname{Tan}^{-1} \frac{\|\alpha_t - I\|^2}{\sqrt{4-\|\alpha_t - I\|^2}}$$ を満足する

$\alpha_t = e^{i\,\mathrm{ad}B_t} = e^{t\bar\delta}$ より　　$i\,\mathrm{ad}\frac{B_t}{t} = \bar\delta$

$$\left\|\frac{B_t}{t}\right\| \leq \frac{1}{t}\operatorname{Tan}^{-1}\frac{\|\alpha_t - I\|^2}{\sqrt{4-\|\alpha_t - I\|^2}} \leq \frac{1}{t}\frac{\|\alpha_t - I\|}{\sqrt{4-\|\alpha_t - I\|^2}} \leq \frac{1}{t}\frac{(e^{t\|\bar\delta\|}-I)}{\sqrt{4-\|\alpha_t - I\|^2}}$$

$\therefore t \to 0$　　$\|\frac{1}{t}B_t\| \longrightarrow \frac{1}{2}\|\bar\delta\|$

$\frac{1}{2}\|\bar\delta\| < {}^\forall k$　　${}^\exists B_k$ = self-adjoint s.t. $i\,\mathrm{ad}B_k = \bar\delta$, $\|B_k\| \leq k$

$\therefore \mathbb{B}_k = \{B : i\,\mathrm{ad}B = \bar\delta,\ \|B\| \leq k\} \neq \phi$: weakly-~~closed~~ compact.

$\therefore \bigcap_{\frac{1}{2}\|\bar\delta\| < k} \mathbb{B}_k \neq \phi$　よって ${}^\exists B$: self-adjoint s.t. $i\,\mathrm{ad}B = \bar\delta$　$\|B\| \leq \frac{1}{2}\|\bar\delta\|$

又 $\|B\| \geq \frac{1}{2}\|\bar\delta\|$ は容易にわかる. 以上により.

${}^\exists B$: self-adjoint operator, s.t. $i\,\mathrm{ad}B = \bar\delta$　$\|B\| = \frac{1}{2}\|\bar\delta\|$

がわかる。

次に $\{P_i\}$: finite central projections s.t. $\sum P_i = I$　$P_i \perp P_j$　$i \neq j$

$\{P_i\} \prec \{Q_j\} \Longleftrightarrow$ 任意の Q_j はある P_i の sub projection

$\{H(\{Q_j\}) : \|HQ_j\| = \frac{1}{2}\|\bar\delta|\mathfrak{R}_{Q_j}\|,\ i\,\mathrm{ad}HQ_j = \bar\delta|\mathfrak{R}_{Q_j},\ H(\{Q_j\})$: self-adjoint$\}$

前の議論より空ではなく, weakly compact だから.

$\therefore \bigcap_{\{Q_j\}} \{H(\{Q_j\})\} \neq \phi$.

よって $\bigcap_{\{Q_j\}}\{H(\{Q_j\})\} \ni H$ が定理の性質を満たすことは容易にわかる　　　q.e.d.

次に $*$-derivation δ が inner になるための十分条件を与える。
以下証明は容易なので省略する

反例において $\mathfrak{h}$ = separable Hilbert space

$\mathcal{C}(\mathfrak{h})$ = $\mathfrak{h}$ 上の compact operator の全体

i) $\exists t \neq 0$ s.t. $\|t\delta\| < \pi$ 且つ $\alpha_t = e^{t\delta}$ は inner で α_t を implement する unitary operator U を $\mathrm{sp}\, U \subset \{z : \mathrm{Im}\, z > 0\}$ と取れるならば，δ は inner.

ii) $\|\delta\| < 2\pi$ で $\mathfrak{A}$ の faithful representation π が $\pi(\mathfrak{A}) \supset \overline{\pi(\mathfrak{A})}$ の center を満足するものが存在し e^{δ} が inner automorphism ならば δ は inner

ここで $\|\delta\| = \pi$ ならば成立しない

[例1] $\mathfrak{A} = \{\lambda I + \mathcal{C}(\mathfrak{h}) : \lambda = \text{scalar}\}$ とすると．$\mathfrak{A} \cap \overline{\mathfrak{A}} = \{\lambda I\}$

E, $1-E$ は infinite dimensional projection とする．

$\delta = i\, \mathrm{ad}\pi(1-2E)$ は outer derivation で，

$$\|\delta\| \leq \pi\|1-2E\| \leq 2\pi.$$

$V : x \longrightarrow Vx \quad Ex = x. \quad (1-E)Vx = Vx$ なる one-dimensional projection とする

$$\|\pi\, \mathrm{ad}(1-2E)V\| \geq \pi\|(1-2E)Vx - V(1-2E)x\| = 2\pi.$$

$$\therefore \|\delta\| = 2\pi.$$

$$e^{\delta}(A) = e^{\pi i\, \mathrm{ad}(1-2E)}(A) = e^{\pi(1-2E)} A e^{-\pi(1-2E)} = A.$$

$\therefore e^{\delta}$ = inner automorphism.

iii) $\mathfrak{A}$ が separable で
$\{t : \alpha_t = e^{t\delta}$ が inner automorphism$\}$ が uncountable ならば
δ は inner.

ここで $\mathfrak{A}$ が non separable の場合は成立しない。又、$\mathfrak{A}$ が separable で
$\{t : \alpha_t = e^{t\delta}$ が inner automorphism$\}$ が countable ならば成立しない。

例2] $\mathfrak{H}_n = \mathfrak{H}$ $(n=1 \cdots)$, $\{E_n = E_1,\ 1-E_n = 1-E_1\}$: infinite dimensional proj. $(n=1 \cdots)$

$\mathfrak{A} = \{\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \{\lambda_n E_n + \lambda_{n+1}(1-E_n) + C_n\} : C_n \in \mathfrak{C}(\mathfrak{H}_n),\ \lambda_n = \text{scalar}\}$: non separable.

$\mathfrak{A}' = \{\sum \oplus \lambda_n I_n :\ \lambda_n : \text{scalar}\}$

$\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}' = \{\lambda \sum \oplus I_n :\ \lambda : \text{scalar}\}$ がわかる。

$H = \sum \oplus (1-E_n)$ とすると、$\delta = i\,\mathrm{ad}\,H$ は outer derivation なことは容易にわかる。

$$e^{t\delta}A = e^{it\,\mathrm{ad}H}A = e^{itH} A e^{-itH}$$

$$e^{itH} = \sum \oplus \{\cancel{e^{it}} E_n + e^{it}(I_n - E_n)\}$$

$Z = \sum \oplus \{e^{int} I_n\} \in \mathfrak{A}'$. 且つ $Ze^{itH} = \sum \oplus \{e^{int}E_n + e^{i(n+1)t}(1-E_n)\}$
となるから $Ze^{itH} \in \mathfrak{A}$. よって、$e^{t\delta}$ は任意の t に対して
inner automorphism を定義する。
以上により、$\mathfrak{A}$ が non separable ならば、iii) は成立しない。

例3]

$\mathfrak{A}_1 = \{\sum \oplus C_n : \|C_n\| \to 0,\ C_n \in \mathfrak{C}(\mathfrak{H}_n)\}$ と $\{\sum \oplus (E_n + e^{it}(1-E_n)) : t = \text{rational}\}$ から
生成される C^*-algebra とする。$\mathfrak{A}_1$ は separable C^*-algebra.

$\delta = i\,\mathrm{ad}\,H = i\,\mathrm{ad}\{\sum \oplus (1-E_n)\}$ は outer となる。

なぜなら　$\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}$　但し $\mathfrak{A}$は[例2]の$\mathfrak{A}$，$\mathfrak{A}_1' = \mathfrak{A}' = \{\sum \oplus \lambda_n I_n\}$

もし　δがinnerならば　$H \in \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_1' \subset \mathfrak{A} + \mathfrak{A}'$で　δは$\mathfrak{A}$においてinnerになり[例2]の結果に反する.

$\{t: e^{t\delta}: \text{inner}\}$は仮定によりcountable.

以上により$\{t: e^{t\delta}: \text{inner}\}$がcountableならばII)は成立しない.

§4.

ここでは、$I_0(\mathfrak{A}) = \{\mathfrak{A}$のinner automorphism$\}$　$\Delta_0(\mathfrak{A}) = \{\mathfrak{A}$のinner-derivation$\}$がnormに関してclosedなるための条件を論じる.

$\Delta(\bar{\mathfrak{A}}) = \{\bar{\mathfrak{A}}$のderivation$\}$ normに関してBanach spaceをなすことを注意する.

定理2.　I) 次の三条件は同値.

i) $\Delta_0(\mathfrak{A})$はclosed

ii) $\mathfrak{Z}$: $\mathfrak{A}$のcenter

$\mathfrak{Z}_1$: $\bar{\mathfrak{A}}$のcenter

$\exists k>0$ s.t. $d(A,\mathfrak{Z}) \le k\, d(A,\mathfrak{Z}_1)$ for $\forall A\in\mathfrak{A}$

但し $d(A,\mathfrak{Z})$はAから$\mathfrak{Z}$へのdistance

iii) $\exists m>0$ s.t. $d(U, U(\mathfrak{Z})) \le m\, d(U, U(\mathfrak{Z}_1))$ for $\forall U\in U(\mathfrak{A})$

但し $U(\mathfrak{A}), U(\mathfrak{Z}), U(\mathfrak{Z}_1)$はそれぞれ$\mathfrak{A}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}_1$のunitary operatorの全体.

II) i)とiii)より次のiv)が出る. $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{A}$がseparableならば、

i)〜iv)は同値.

iv) $I_0(\mathfrak{A})$はclosed.

《proof》 証明は i)⇒ii) のみを示す.

[1]より $\bar{\mathfrak{A}}$ の derivation が inner になるから

$\bar{\mathfrak{A}}/\mathfrak{z}_1 \longrightarrow \Delta(\bar{\mathfrak{A}})$: conti onto, 従って closed graph theorem より

$$\bar{\mathfrak{A}}/\mathfrak{z}_1 \cong \Delta(\bar{\mathfrak{A}})$$

$\mathfrak{A}$ の derivation は $\bar{\mathfrak{A}}$ へ unique isometry に拡張されるから

$$\begin{tikzcd}
\Delta_0(\mathfrak{A}) \arrow[r] & \bar{\mathfrak{A}}/\mathfrak{z}_1 \cong \Delta(\bar{\mathfrak{A}}) \\
\mathfrak{A}/\mathfrak{z} \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

それぞれ conti になる

条件より $\Delta_0(\mathfrak{A})$は closed だから. $\mathfrak{A}/\mathfrak{z} \cong \Delta_0(\mathfrak{A})$, 上の mapping で $\mathfrak{A}/\mathfrak{z}$ は $\bar{\mathfrak{A}}/\mathfrak{z}_1$ の closed set に移るから closed graph theorem より 逆も conti. よって ii) が成立する

ここで $\mathfrak{A}$ が non separable ならば iv)⇒iii) が成立しないことを示す.

例4] 記号は 例2] と同じ.

例2] において注意したように $\mathfrak{A}$ の center $= \{\lambda \sum\oplus I_n : \lambda : \text{scalar}\}$

$\bar{\mathfrak{A}}$ の center $= \{\sum\oplus \lambda_n I_n : \lambda_n : \text{scalar}\}$

$$U_k = \sum\oplus \left\{\exp\frac{in\pi}{k} E_n + \exp\frac{i(n+1)\pi}{k}(1-E_n)\right\} \in \mathfrak{A} \quad \text{とすると}$$

$$d(U_k, \mathfrak{z}) \geq 1 \qquad (k=1,2,\ldots)$$

$$d(U_k, \mathfrak{z}_1) \leq \left|\exp\frac{i\pi}{k} - 1\right| \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

従って iii) を満足しない.

今 $U = \sum\oplus\{\lambda_n E_n + \lambda_n'(1-E_n) + C_n\} = \sum\oplus U_n$. $|\lambda_n| = |\lambda_n'| = 1$. $C_n \in C(\mathfrak{H}_n)$ の

unitary operator により induce される $\mathfrak{A}$ の automorphism α を考えると. $C_n = \prod_{r=1}^{n} \lambda'_{r-1} \lambda_r^{-1}$ $V_n = C_n U_n$ $V = \sum \oplus V_n \in \mathfrak{A}$ ということより α は inner になる.

$\mathfrak{A}_n = \{ \lambda E_n + \lambda'(1 - E_n) + C_n$, λ, λ' : scalar $C_n \in C(\mathfrak{H}_n) \}$, 上に述べたことより $\mathfrak{A}$ の automorphism α が inner $\Longleftrightarrow$ $\alpha = \sum \oplus \alpha_n$. α_n が $\mathfrak{A}_n$ の inner automorphism.

$\mathfrak{A}_n$ は separable より iv) と iii) は同値. 又 $\mathfrak{A}_n$ の center $= \overline{\mathfrak{A}}_n$ の center $= \{ \lambda I : \lambda$: scalar$\}$ より. $\mathfrak{A}_n$ は iv) を満たす. 従って 上に述べた事より. $\mathfrak{A}$ は iv) を満たす.

non separable ならば, iv) $\Rightarrow$ iii) は成立しない. q.e.d.

Reference

[1] Kadison and Ringrose ; Derivations and automorphisms of operator algebras I Communication Math. ph. 4 (1967)

[2] Sakai. Derivations of W^*- algebras, Ann Math 83 (1966)

[3] Dixmier : "Les C^*-algebras et leurs representation" Gauthier-Villars.

[4] Dunford and Schwarts " Linear operator I" New-York.