数理解析研究所講究録
第 166 巻 1972 年 109-131

Cohomology of Operator Algebras

東工大 理　中神祥臣

こゝでの内容は R. V. Kadison and J. R. Ringrose により発展させられている作用素環の Cohomology の論文：

Cohomology of operator algebras,

I. Type I von Neumann algebras.
Acta Math. 126 (1971), 227-243.

II. Extended cobounding and the hyperfinite case
Arkiv för Mate. 9 (1971), 55-63.

の主要な結果の紹介である．これらに引き続き Johnson, Kadison and Ringrose は第III番目の論文を最近発表しているので，もし原稿が入手できればそれについても最後に簡単に触れたいと思っている．なお，これら3編の論文をもとにした講義が昨年 Ringrose 自身により行われており，その様子は

Lecture on Operator Algebra.
Springer Verlag, 247 (1972), 359-434.

に収められている．

§1．術語と定義

Aを複素数体$\mathbb{C}$上で定義され単位元1をもつ単位代数とする．$\mathfrak{M}$がA-左加群（またはA-右加群）であるとは，$\mathfrak{M}$が加群であるとともに $x \in A$，$m \in \mathfrak{M}$ に対して $xm \in \mathfrak{M}$（または $mx \in \mathfrak{M}$）が定義され次の(i)，(ii)，(iii)，(iv)（または(i')，(ii')，(iii')，(iv')）が成り立つことである．

(i) $x(m_1+m_2) = xm_1 + xm_2$，　(i') $(m_1+m_2)x = m_1x + m_2x$

(ii) $(x+y)m = xm + ym$，　(ii') $m(x+y) = mx + my$

(iii) $(xy)m = x(ym)$，　(iii') $m(xy) = (mx)y$

(iv) $1 \cdot m = m$　(iv') $m \cdot 1 = m$

$\mathfrak{M}$がA-両側加群であるとは$\mathfrak{M}$はA-左加群かつA-右加群であって $x, y \in A$ と $m \in \mathfrak{M}$ に対し

(v) $(xm)y = x(my)$

が成り立つことである．以後現われるAはすべて単位代数である．

$A = (A, \| \ \|)$ をBanach代数とする．$\mathfrak{M}$がA-両側Banach加群であるとは，$\mathfrak{M} = (\mathfrak{M}, | \ |)$ がBanach代数でありかつ

A-両側加群であるとともに，或る数 $\lambda>0$ が存在して

$$\|xm\| \leqq \lambda \|x\| \|m\| \quad (\text{または } \|mx\| \leqq \lambda \|x\| \|m\|)$$

が成りたつことである．$\mathfrak{M}$ が A－両側双対加群であるとは，$\mathfrak{M}$ がある Banach 空間 $\mathfrak{M}_*$ の双対空間と同型であるような A－両側 Banach 加群であるとともに $x\in A$，$m\in\mathfrak{M}$ に対し $m \rightsquigarrow xm$ と $m \rightsquigarrow mx$ が弱*連続となっていることである．

$\mathfrak{M}$ を A－両側 Banach 加群とする．n を任意な自然数とする．A 上で定義された $\mathfrak{M}$ に値を持つ有界な n 重線形写像全体の集合を $C^n(A,\mathfrak{M})$ と表わす．$C^0(A,\mathfrak{M})$ を $\mathfrak{M}$ 自身で定義する．各 n に対して $C^n(A,\mathfrak{M})$ から $C^{n+1}(A,\mathfrak{M})$ への写像 δ を各 $f\in C^n(A,\mathfrak{M})$ に対し

$$\begin{aligned}(\delta f)(x_0,x_1,\cdots,x_n) &= x_0 f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\ &+\textstyle\sum_{j=1}^{n}(-1)^j f(x_0,\cdots,x_{j-2},x_{j-1}x_j,x_{j+1},\cdots,x_n)\\ &+(-1)^{n+1} f(x_0,x_1,\cdots,x_{n-1})x_n\end{aligned}$$

で定義し，$C^0(A,\mathfrak{M})$ から $C^1(A,\mathfrak{M})$ への写像 δ を各 $m\in C^0(A,\mathfrak{M})$ に対し

$$(\delta m)(x) = xm - mx$$

で定義する．この δ を Coboundary operator という．直接計算により $\delta^2=0$ が確かめられる．$\delta C^{n-1}(A,\mathfrak{M})$ を $B^n(A,\mathfrak{M})$

で表わし，$f \in C^n(A, \mathfrak{M})$ のうち $\delta f = 0$ となるものの集まりを $Z^n(A, \mathfrak{M})$ とする．$\delta^2 = 0$ であるから $B^n(A, \mathfrak{M}) \subset Z^n(A, \mathfrak{M})$．このとき剰余類の集合 $Z^n(A, \mathfrak{M}) / B^n(A, \mathfrak{M})$ を $H^n(A, \mathfrak{M})$ と表わし，A の n 次元 <u>Cohomology 群</u> という．Banach 代数 A の中心を Z とする．$C^n(A, \mathfrak{M})$，$n \geqq 1$ の元の内，任意な j と $z \in Z$ に対し

$$f(x_1, \cdots, x_{j-1}, z x_j, x_{j+1}, \cdots, x_n)$$
$$= z f(x_1, \cdots, x_n) = f(x_1, \cdots, x_n) z$$

となるような f の集まりを $NC^n(A, \mathfrak{M})$ で表わし，$C^0(A, \mathfrak{M})$ の元の内，任意な $z \in Z$ に対し

$$zm = mz$$

となるような m の集まりを $NC^0(A, \mathfrak{M})$ で表わす．$NZ^n(A, \mathfrak{M}) = Z^n(A, \mathfrak{M}) \cap NC^n(A, \mathfrak{M})$ とする．もし $f \in Z^1(A, \mathfrak{M})$ とすれば

$$0 = (\delta f)(x, y) = x f(y) - f(xy) + f(x) y$$

すなわち，$f(xy) = x f(y) + f(x) y$．したがって f は A から $\mathfrak{M}$ への微分である．もし $f \in B^1(A, \mathfrak{M})$ ならば，$f = \delta m$, $m \in \mathfrak{M}$ であるから，$f(x) = xm - mx$，したがって $\mathfrak{M} = A$ ならば f は内微分である．このことから von Neumann 代数または単純な単位代数 M の微分は内微分であるという境の結果は $H^1(M, M) = 0$ と云い換えることができる．

例. $\mathfrak{M}=B(\mathcal{H})$, AをそのC^*-部分代数とすると

$$C^0(A,\mathfrak{M})=B(\mathcal{H}),\quad Z^0(A,\mathfrak{M})=A'$$

$$C^0(A,A)=A,\quad Z^0(A,A)=A\cap A'$$

$$Z^1(A,A)=\{A\text{の微分}\}$$

$$B^1(A,A)=\{A\text{の内微分}\}.$$

なお, $Z^2(A,\mathfrak{M})$の元はAから$\mathfrak{M}$への因子団であり$B^2(A,\mathfrak{M})$の元はsplitな因子団である.

§2. Cocycleの正規化.

$Z^n(A,\mathfrak{M})$の元をn-<u>cocycle</u>という

補助定理 2.1. AをBanach代数, Zをその中心, $\mathfrak{M}$をA-両側Banach加群とする. $f\in Z^n(A,\mathfrak{M})$をどこかのargumentがZの元である場合に0となっているようなn-cocycleとすると, $f\in NZ^n(A,\mathfrak{M})$.

証明. $f\in Z^n(A,\mathfrak{M})$とすれば$\delta f=0$. したがって

$$\begin{aligned}0&=(\delta f)(z,x_1,\cdots,x_n)\\&=zf(x_1,\cdots,x_n)-f(zx_1,x_2,\cdots,x_n)+f(z,x_1x_2,x_3,\cdots,x_n)-\\&\quad\cdots+(-1)^nf(z,x_1,\cdots,x_{n-2},x_{n-1}x_n)+(-1)^{n+1}f(z,x_1,\cdots,x_{n-1})x_n\end{aligned}$$

$$= z f(x_1, \cdots, x_n) - f(zx_1, x_2, \cdots, x_n).$$

したがって　$f(zx_1, x_2, \cdots, x_n) = z f(x_1, \cdots, x_n)$.　再び $\delta f = 0$ より

$$0 = (\delta f)(x_1, \cdots, x_{j-1}, z, x_j, x_{j+1}, \cdots, x_n)$$
$$= x_1 f(x_2, \cdots, x_{j-1}, z, x_j, \cdots, x_n) - f(x_1x_2, x_3, \cdots, x_{j-1}, z, x_j, \cdots, x_n)$$
$$+ \cdots + (-1)^j f(x_1, \cdots, x_{j-2}, x_{j-1}z, x_j, \cdots, x_n)$$
$$+ (-1)^{j+1} f(x_1, \cdots, x_{j-1}, zx_j, x_{j+1}, \cdots, x_n) + \cdots$$
$$+ (-1)^{n+1} f(x_1, \cdots, x_{j-1}, z, x_j, \cdots, x_{n-1}) x_n$$
$$= (-1)^j \{f(x_1, \cdots, x_{j-2}, x_{j-1}z, x_j, \cdots, x_n) - f(x_1, \cdots, x_{j-1}, zx_j, x_{j+1}, \cdots, x_n)\}.$$

したがって　$f(x_1, \cdots, x_{j-1}, zx_j, x_{j+1}, \cdots, x_n) = f(x_1, \cdots, x_{j-2}, zx_{j-1}, x_j, \cdots, x_n)$, $2 \leqq j \leqq n$.　再び $\delta f = 0$ より

$$0 = (\delta f)(x_1, \cdots, x_n, z)$$
$$= x_1 f(x_2, \cdots, x_n, z) - f(x_1x_2, x_3, \cdots, x_n, z) +$$
$$\cdots + (-1)^n f(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n z) + (-1)^{n+1} f(x_1, \cdots, x_n) z.$$

したがって　$f(x_1, \cdots, zx_n) = z f(x_1, \cdots, x_n)$.

補助定理 2.2.　A を Banach 代数，$\mathfrak{M}$ を A－両側双対加群とし，G を invariant mean μ をもつ A の正則元から成る或る群とすれば，次の (i)，(ii)，(iii) が成りたつ $L^\infty_{\mathfrak{M}}(G)$ から $\mathfrak{M}$ への有界な写像 $\bar{\mu}$ が存在する.

(i)　$f \in L^\infty_{\mathfrak{M}}(G)$ に対し，$f_1(v) = x f(v) y$; $x, y \in A$ とす

れば $\bar{\mu}(f_z) = x\bar{\mu}(f)y$.

(ii) $f \in L^\infty_{\mathcal{M}}(G)$ に対し $f_w(v) = f(vw)$ とすれば $\bar{\mu}(f) = \bar{\mu}(f_w)$.

(iii) $f \in L^\infty_{\mathcal{M}}(G)$ が定値 m ならば $\bar{\mu}(f) = m$.

証明. $f \in L^\infty_{\mathcal{M}}(G)$ と $m_* \in \mathcal{M}_*$ に対し

$$\langle \bar{\mu}(f), m_* \rangle = \mu \langle f(\cdot), m_* \rangle$$

により $\bar{\mu}(f) \in \mathcal{M}$ を決めればよい.

定理 2.3. A を C^*-代数, Z をその中心, $\mathcal{M}$ を A-両側双対加群とする. $f \in Z^n(A, \mathcal{M})$, $n \geq 1$ ならば, $g \in C^{n-1}(A, \mathcal{M})$ が存在して $f - \delta g$ はどこかの arguments が Z の元であるときに 0 となるような n-cocycle である. 特に, $Z^n(A, \mathcal{M}) = B^n(A, \mathcal{M}) + NZ^n(A, \mathcal{M})$, $n \geq 1$ である.

証明. G を Z の unitary な元全体とすれば, G は可換群となり invariant mean μ を持つ. $f \in Z^n(A, \mathcal{M})$ に対し $h^{(1)}_{x_1, \cdots, x_{n-1}}(v) = v^* f(v, x_1, \cdots, x_{n-1})$ とし $g_1(x_1, \cdots, x_n) = \bar{\mu}(h^{(1)}_{x_1, \cdots, x_{n-1}})$ とする. このとき

$$(\delta g_1)(x_1, \cdots, x_n) = x_1 g_1(x_2, \cdots, x_n) + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j g_1(x_1, \cdots, x_j x_{j+1}, \cdots, x_n) + (-1)^n g_1(x_1, \cdots, x_{n-1}) x_n .$$

この右辺は次のような $L^\infty_{\mathcal{M}}(G)$ の元

$$v \rightsquigarrow x_1 v^* f(v, x_2, \cdots, x_n) + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j v^* f(v, x_1, \cdots, x_j x_{j+1}, \cdots, x_n) \\ + v^* f(v, x_1, \cdots, x_{n-1}) x_n$$

に μ を作用させた結果である．ここで $x_1 \in G$ とすれば

$$v \rightsquigarrow x_1 v^* f(v, x_2, \cdots, x_n) - v^* f(v x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

に μ を作用させた結果は 0 となり，$x_1 \in G$ の場合には

$$\delta g_1 - f = 0$$

である．$f_1 \equiv f - \delta g_1$ とすれば $f_1 \in Z^n(A, \mathcal{M})$ である．$h^{(2)}_{x_1, \cdots, x_{n-1}}(v) \equiv v^* f_1(x_1, v, x_2, \cdots, x_{n-1})$ かつ $g_2(x_1, \cdots, x_{n-1}) \equiv \bar{\mu}(h^{(2)}_{x_1, \cdots, x_{n-1}})$ として，上と同様の計算を行うと，$x_2 \in G$ の場合には

$$\delta g_2 + f_1 = 0$$

となることがわかる．$x_2 \in G$ の代りに $x_1 \in G$ でも $f_1 = 0$ であるから $\delta g_2 + f_1 = 0$ が得られる．以下帰納的に上の論法を繰り返して $x_1, \cdots, x_n$ のどれかが G の元ならば

$$f - \delta(g_1 - g_2 + \cdots + (-1)^{n+1} g_n) = 0.$$

したがって $g \equiv g_1 - g_2 + \cdots + (-1)^{n+1} g_n$ とすればよい．後半は補助定理 2.1 より明らか．

§3. I 型 von Neumann 代数の Cohomology．

補助定理 3.1. M を I_ℓ ($\ell = 1, 2, \cdots, \infty$) 型 von Neumann 代

数，Zをその中心，$\{e_{\iota\kappa} : \iota, \kappa \in I\}$ をMの行列単位の集合で $\{e_{\iota\iota} : \iota \in I\}$ が abelian で equivalent な射影への単位分割となっているようなものとする．もし $f \in C^n(M, M)$ が任意な $z \in Z$ に対し $f(zx_1, x_2, \cdots, x_n) = zf(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を満たしていれば次の (i)，(ii)，(iii) が成りたつ．

(i) 各 $\kappa \in I$ とMの各元 $x_1, \cdots, x_n$ に対し

$$\{\textstyle\sum_J e_{\iota\kappa} f(e_{\kappa\iota} x_1, x_2, \cdots, x_n) : J \text{ は有限}\}$$

はMの或る元 $h(x_1, \cdots, x_n)$ へ σ-弱収束し $h \in C^n(M, M)$．

(ii) $\|h\| \leq \|f\|$

(iii) $h(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1 h(1, x_2, \cdots, x_n)$．

証明．Mは discrete であるから，M'は abelian に選べる．そのときMが作用している Hilbert 空間を$\mathcal{H}$とする．単位ベクトル $\xi \in \mathcal{H}$ に対し，$\xi_\iota = e_{\kappa\kappa} f(e_{\kappa\iota} x_1, x_2, \cdots, x_n)$ とおく．各有限集合 $J \subset I$ に対し $\sum_J \omega_{\xi_\iota}$ は $M_{e_{\kappa\kappa}}$ 上の正値形式である．$M_{e_{\kappa\kappa}}$ は極大可換であるから，$\omega_\eta = \sum_J \omega_{\xi_\iota}$ となるような $\eta \in \mathcal{H}$ が存在して $M_{e_{\kappa\kappa}}$ 上で $\omega_{\xi_\iota} \leq \omega_\eta$ である．$M_{e_{\kappa\kappa}}$ の中心はMの中心と同型であるから，各 $\iota \in J$ 毎に $h_\iota \in Z$ が決まって $\xi_\iota = h_\iota \eta$ となる．ここで $k = \sum_J h_\iota^* e_{\kappa\iota}$ とすると

$$kk^* = (\sum h_\iota e_{\kappa\iota})(\sum h_\iota e_{\kappa\iota})^* = (\sum h_\iota h_\iota^*) e_{\kappa\kappa}$$

であるから，kの極分解 $k = he_{\kappa\kappa} v$，$h = (\sum h_\iota h_\iota^*)^{1/2}$ が得

られる．

$$\Sigma_J \|\xi_\iota\|^2 = \Sigma_J (e_{\kappa\kappa} f(e_{\kappa\iota} x_1, x_2, \cdots, x_n)\xi \,|\, h_\iota \eta)$$
$$= \Sigma_J (e_{\kappa\kappa} f(h_\iota^* e_{\kappa\iota} x)\xi \,|\, \eta)$$
$$= (e_{\kappa\kappa} f(h x)\xi \,|\, \eta)$$
$$= (e_{\kappa\kappa} f(h e_{\kappa\kappa} v)\xi \,|\, \eta)$$
$$\leq \|f\| \cdot \|x\| \cdot \|\xi\| \cdot \|\eta\| .$$

ところで $\|h\eta\|^2 = \Sigma \|h_\iota \eta\|^2 = \Sigma \|\xi_\iota\|^2$ であるから，(i) と (ii) が得られる．

$\Sigma e_{\iota\iota} = 1$ であるから，すべての有限集合 $K \subset I$ とすべてのベクトル $\xi \in \mathcal{H}$ に対し，$\Sigma_K e_{\iota\iota}\xi$ として得られるベクトルの集合 $\mathcal{H}_0$ は $\mathcal{H}$ で稠密である．$x_1 \in M$ に対し $e_{\kappa\iota} x_1 e_{\iota'\kappa} \in M_{e_{\kappa\kappa}}$ で然も $M_{e_{\kappa\kappa}} = Z_{e_{\kappa\kappa}}$ であるから，$z_{\iota\iota'} e_{\kappa\kappa} = e_{\kappa\iota} x_1 e_{\iota'\kappa}$ となるような Z の元 $z_{\iota\iota'}$ が存在する．このとき

$$e_{\kappa\iota} x_1 = \sum_{\iota'} e_{\kappa\iota} x_1 e_{\iota'\kappa} e_{\kappa\iota'} = \sum_{\iota'} z_{\iota\iota'} e_{\kappa\iota'}$$
$$x_1 e_{\iota'\kappa} = \sum_{\iota} e_{\iota\kappa} e_{\kappa\iota} x_1 e_{\iota'\kappa} = \sum_{\iota} e_{\iota\kappa} z_{\iota\iota'}$$

である．任意な $\mathcal{H}_0$ の元 ξ と η に対し

$$(h(x_1, \cdots, x_n)\xi \,|\, \eta) = (\sum_\iota e_{\iota\kappa} f(e_{\kappa\iota} x_1, x_2, \cdots, x_n)\xi \,|\, \eta)$$
$$= \sum_\iota (e_{\iota\kappa} f(e_{\kappa\iota} x_1, x_2, \cdots, x_n)\xi \,|\, \eta)$$
$$= \sum_\iota (e_{\iota\kappa} f(\sum_{\iota'} z_{\iota\iota'} e_{\kappa\iota'}, x_2, \cdots, x_n)\xi \,|\, \eta) \tag{1}$$
$$(x_1 h(1, x_2, \cdots, x_n)\xi \,|\, \eta)$$
$$= (x_1 \sum_{\iota'} e_{\iota'\kappa} f(e_{\kappa\iota'}, x_2, \cdots, x_n)\xi \,|\, \eta)$$

$$= \sum_{\iota'} (x_1 e_{\iota'\kappa} f(e_{\kappa\iota'}, x_2, \cdots, x_n)\xi | \eta)$$

$$= \sum_{\iota'} (\sum_{\iota} e_{\iota\kappa} z_{\iota\iota'} f(e_{\kappa\iota'}, x_2, \cdots, x_n)\xi | \eta)$$

$$= \sum_{\iota'} \sum_{\iota} (e_{\iota\kappa} f(z_{\iota\iota'} e_{\kappa\iota'}, x_2, \cdots, x_n)\xi | \eta)$$

$$= \sum_{\iota} \sum_{\iota'} (e_{\iota\kappa} f(z_{\iota\iota'} e_{\kappa\iota'}, x_2, \cdots, x_n)\xi | \eta) \qquad (2)$$

最後の Σ の交換は $\eta \in \mathcal{H}_0$ であるから $\sum_{\iota}$ が有限和であることに依る．(1)式＝(2)式を示せば(iii)が得られる．$(e_{\kappa\iota}x_1)(e_{\kappa\iota}x_1)^*$ $= \sum_{\iota'} z_{\iota\iota'} z_{\iota\iota'}^* e_{\kappa\kappa}$ で Z と $Z_{e_{\kappa\kappa}}$ は同型だから $z = \sum_{\iota'} z_{\iota\iota'} z_{\iota\iota'}^* \in Z$ が存在する．任意な $\varepsilon > 0$ と有限集合 $J \subset I$ に対して $\sum_{I\setminus J} z_{\iota\iota'} z_{\iota\iota'}^*$ の $[\varepsilon, \infty)$ に対応するスペクトル射影を e_J とすれば，$e_J \in Z$,

$$\| \sum_{I\setminus J} z_{\iota\iota'} e_{\kappa\iota'} (1 - e_J) \| \leqq \varepsilon$$

かつ $J \to I$ のとき $e_J \downarrow 0$．したがって

$$|(e_{\iota\kappa} f(\sum_{\iota'} z_{\iota\iota'} e_{\kappa\iota'}, x_2, \cdots, x_n)\xi | \eta) - \sum_{\iota'} (e_{\iota\kappa} f(z_{\iota\iota'} e_{\kappa\iota'}, x_2, \cdots, x_n)\xi | \eta)|$$

$$\leqq |(e_{\iota\kappa} f(\sum_{\iota' \in I\setminus J} z_{\iota\iota'} e_{\kappa\iota'}, x_2, \cdots, x_n)\xi | \eta)|$$

$$\leqq (\varepsilon \|\eta\| + \|x_1\| \|e_J \eta\|) \|f\| \cdot \|x_2\| \cdots \|x_n\| \cdot \|\xi\| .$$

これから直ちに (1)式＝(2)式． 証明終り．

定理 3.2. M が I 型 von Neumann 代数ならば，$H^n(M, M) = 0$, $n \geqq 1$.

証明．$f \in Z^n(M, M)$ とする．このとき $f \in B^n(M, M)$ を示せばよい．定理 2.3 により $f \in NZ^n(M, M)$ と仮定できるから，

M は I_l ($l=1,2,\cdots,\infty$) 型の場合についてだけ考えればよい．この場合には補助定理 3.1 のような行列単位 $\{e_{\iota\kappa} : \iota,\kappa\in I\}$ が存在して，その結果を使うと $h(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_\iota e_{\iota\kappa}f(e_{\kappa\iota}x_1,x_2,\cdots,x_n)$ が定義できる．ここで

$$g(x_2,\cdots,x_n)=h(1,x_2,\cdots,x_n)$$

とすれば，

$$\begin{aligned}(\delta g)(x_1,\cdots,x_n) &= x_1\, g(x_2,\cdots,x_n)\\ &\quad+\textstyle\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j\, g(x_1,\cdots,x_{j-1},x_jx_{j+1},x_{j+2},\cdots,x_n)\\ &\quad+(-1)^n g(x_1,\cdots,x_{n-1})x_n\\ &=\sum_\iota\{x_1e_{\iota\kappa}f(e_{\kappa\iota},x_2,\cdots,x_n)-e_{\iota\kappa}f(e_{\kappa\iota},x_1x_2,x_3,\cdots,x_n)\\ &\qquad+\cdots+(-1)^{n-1}e_{\iota\kappa}f(e_{\kappa\iota},x_1,\cdots,x_{n-2},x_{n-1}x_n)\\ &\qquad+(-1)^n e_{\iota\kappa}f(e_{\kappa\iota},x_1,\cdots,x_{n-1})x_n\}\\ &=\sum_\iota\{x_1\,e_{\iota\kappa}f(e_{\kappa\iota},x_2,\cdots,x_n)-e_{\iota\kappa}(\delta f)(e_{\kappa\iota},x_1,\cdots,x_n)\\ &\qquad+e_{\iota\iota}f(x_1,\cdots,x_n)-e_{\iota\kappa}f(e_{\kappa\iota}x_1,x_2,\cdots,x_n)\}\\ &=x_1\,h(1,x_2,\cdots,x_n)+f(x_1,\cdots,x_n)-h(x_1,\cdots,x_n)\\ &=f(x_1,\cdots,x_n).\end{aligned}$$

したがって，$f\in B^n(M,M)$．

§4. $B(\mathcal{H})$ での Cobounding．

定理 4.1．A を単位 C*-代数，π を A の忠実な表現とする．

$f \in Z^n(\pi(A), \overline{\pi(A)})$ に対し，$g|_{\pi(A)} - f \in B^n(\pi(A), \overline{\pi(A)})$ を満たすような $g \in Z^n(\overline{\pi(A)}, \overline{\pi(A)})$ が在る．ここで $\overline{\pi(A)}$ は $\pi(A)$ の弱閉包である．

証明．$\tilde{\pi}$ を A の universal な表現とすれば，A^{**} の中心に或る射影 e が存在して $\pi(A)$ と $\overline{\pi(A)}$ はそれぞれ $\tilde{\pi}(A)e$ と $\overline{\tilde{\pi}(A)}e = (A^{**})e$ で同一視できるので，これからは $\pi(x)$ と $\tilde{\pi}(x)e$ とを同一視する．$\tilde{\pi}(A)$ から $\tilde{\pi}(A)e$ への同型写像 ρ を使って導かれる cochain ($C^n(A, \mathfrak{M})$ の元を n-cochain という) の間の同型写像を ρ_* とすれば，例えば

$$(\rho_*^{-1}f)(y_1, \cdots, y_n) = f(\rho(y_1), \cdots, \rho(y_n)) \quad , \quad y_i \in \tilde{\pi}(A)$$

などと表わせる．この $\rho_*^{-1}f$ を f_1 とおけば，$f_1 \in Z^n(\tilde{\pi}(A), (A^{**})_e)$．

f_1 の有界性と $\tilde{\pi}$ が universal であることから，写像 $x \longrightarrow f(x, x_2, \cdots, x_n)$ は $\tilde{\pi}(A)$ から A^{**} への σ-弱位相で連続的な拡張 f_{11} を持つ．以下順次各 argument の定義域を $\tilde{\pi}(A)$ から A^{**} へ拡張して $f_{12}, \cdots, f_{1n}$ を得る．$f_{1n} \in C^n((A^{**})e, (A^{**})e)$ かつ $\|f_{1n}\| = \|f_1\|$．f_{1n} を $\overline{f}_1$ とする．

$f_1 \in Z^n(\tilde{\pi}(A), (A^{**})e)$ であるから，$x_0 \in A^{**}$; $x_1, \cdots, x_n \in \tilde{\pi}(A)$ に対して

$$(\delta f_{11})(x_0, x_1, \cdots, x_n) = x_0 f_{11}(x_1, \cdots, x_n)$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} (-1)^j f_{11}(x_0, \cdots, x_{j-2}, x_{j-1}x_j, x_{j+1}, \cdots, x_n)$$

$$+(-1)^{n+1} f_{11}(x_0, \cdots, x_{n-1}) x_n,$$

となるが，$\bar{\pi}(A)$ は A^{**} で σ-弱位相で稠密であるから x_0 を $\bar{\pi}(A)$ の元で近似して $\delta f_{11} = 0$ を得る．以下順次各 argument 毎に同様の考え方を適用して $\delta \bar{f}_1 = \delta f_{11} = 0$ を得る．つまり $\bar{f}_1 \in Z^n(A^{**}, (A^{**})_e)$ であるから，定理 2.3 により

$$\bar{g}_1 \equiv \bar{f}_1 - \delta \bar{h} \in NZ^n(A^{**}, (A^{**})_e)$$

となる $\bar{h} \in C^{n-1}(A^{**}, (A^{**})_e)$ が存在する．$g \equiv \bar{g}_1 \restriction (A^{**})_e$ かつ $h \equiv \rho_*(\bar{h} \restriction \bar{\pi}(A))$ とすれば $h \in C^{n-1}(\bar{\pi}(A)_e, (A^{**})_e)$ でしかも

$$f - \delta h = f - \delta \rho_*(h \restriction \bar{\pi}(A)) = \rho_*(f_1 - \delta(h \restriction \bar{\pi}(A)))$$
$$= \rho_*((\bar{f}_1 - \delta h) \restriction \bar{\pi}(A)) = \bar{g}_1 \restriction \bar{\pi}(A)_e = g \restriction \bar{\pi}(A)_e .$$

補助定理 4.2. M を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上に作用する von Neumann 代数，Z を M' の極大可換な $*$-部分代数，N を M と Z から生成される C^*-代数とする．$f \in NC^n(M, M)$ に対し，一意な拡張 $\bar{f} \in NC^n(N, N)$ が存在して，写像 $f \longrightarrow \bar{f}$ は線形かつ等距離で $\overline{\delta f} = \delta \bar{f}$ を満たしている．特に $f \in NZ^n(M, M)$ ならば $\bar{f} \in NZ^n(N, N)$ である．

証明. Z の射影全体の集合を Z^p とする．

$$N_0 \equiv \{ \textstyle\sum_{j=1}^m e_j x_j : e_j \in Z^p, x_j \in M \}$$

とすれば，N_0 は N の稠密な $*$-部分代数である．$y_k \in N_0$ $(k=1, \cdots, n)$ は

$$y_k = \sum_{j_k=1}^{m_k} e_{j_k}^{(k)} x_{j_k}^{(k)} \quad , \quad e_{j_k}^{(k)} \in Z^P \ , \ x_{j_k}^{(k)} \in M$$

なる形をしている．$f \in NC^n(M, M)$ に対して

$$f_0(y_1, \cdots, y_n) = \sum_{j_1=1, \cdots, j_n=1}^{m_1 \cdots m_n} e_{j_1}^{(1)} e_{j_2}^{(2)} \cdots e_{j_n}^{(n)} f(x_{j_1}^{(1)}, x_{j_2}^{(2)}, \cdots, x_{j_n}^{(n)})$$

とすれば，f_0 は well defined であってしかも $\underbrace{N_0 \times \cdots \times N_0}_{n}$ $\to N_0$ なる n 重線形写像になっていることがわかる．実際に，或る k で $y_k = 0$ とすると，M の中心の元 z_{ij}，$1 \le i, j \le j_k$ が存在して

$$\sum_{j=1}^{m_k} z_{ij} e_j^{(k)} = e_i^{(k)} \quad , \quad \sum_{j=1}^{m_k} x_j^{(k)} z_{ji} = 0$$

となるから，

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{m_k} e_j^{(k)} f(x_{j_1}^{(1)}, \cdots, x_j^{(k)}, \cdots, x_{j_n}^{(n)}) \\
&= \sum_{j=1}^{m_k} \sum_{\ell=1}^{m_k} z_{j\ell} e_\ell^{(k)} f(x_{j_1}^{(1)}, \cdots, x_j^{(k)}, \cdots, x_{j_n}^{n}) \\
&= \sum_{j=1}^{m_k} e_\ell^{(k)} f(x_{j_1}^{(1)}, \cdots, \sum_{\ell=1}^{m_k} x_j^{(k)} z_{j\ell}, \cdots, x_{j_n}^{(n)}) = 0 ,
\end{aligned}$$

したがって $f_0(y_1, \cdots, y_n) = 0$．次に $\|f_0\| = \|f\|$ を示す．そのために $\{e_j^{(k)} : j=1, \cdots, m_k, k=1, \cdots, n\}$ の細分割を $\{p_1, \cdots, p_m\} \subset Z^P$ とする．各 y_k は

$$y_k = \sum_{j=1}^{m} p_j w_j^{(k)} \quad , \quad w_j^{(k)} \in M$$

と表わせるから，f_j の M' での中心の台 $s(p_j)$ を使って

$$f_0(y_1, \cdots, y_n) = \sum_{j=1}^{m} p_j f(s(p_j) w_j^{(1)}, \cdots, s(p_j) w_j^{(n)}) ,$$

したがって

$$\|f_0(y_1,\cdots,y_n)\| = \max_{1\le j\le m}\|p_j f(s(p_j)w_j^{(1)},\cdots,s(p_j)w_j^{(n)})\|$$
$$\le \max_{1\le j\le m}\|f\|\cdot\|s(p_j)w_j^{(1)}\|\cdots\cdots\|s(p_j)w_j^{(n)}\|$$
$$= \max_{1\le j\le m}\|f\|\cdot\|p_j w_j^{(1)}\|\cdots\cdots\|p_j w_j^{(n)}\|$$
$$= \max_{1\le j\le m}\|f\|\cdot\|p_j y_1\|\cdots\cdots\|p_j y_n\|$$
$$\le \|f\|\cdot\|y_1\|\cdots\cdots\|y_n\|$$

となる．f_0の作り方より$\|f\|\leqq\|f_0\|$は明らかであるから，$\|f_0\|=\|f\|$となる．N_0がNで稠密なことからf_0の拡張$\bar{f}$が存在して$\bar{f}\in C^n(N,N)$かつ$\|f\|=\|\bar{f}\|$である．fのNへの任意な拡張をgとすればN_0上で$g=\bar{f}$となるから拡張は一意である．Nの中心はZであるから$\bar{f}$の決めかたから$\bar{f}\in NC^n(N,N)$である．最後に$\delta\bar{f}=\overline{\delta f}$を示そう．$N_0$の元に対し$\delta\bar{f}=\overline{\delta f}$は直接計算により確められるので，$\delta\bar{f}$と$\overline{\delta f}$の連続性を使って，$\delta\bar{f}=\overline{\delta f}$が云える．

定理 4.3. Mを Hilbert 空間$\mathcal{H}$上で作用する von Neumann 代数とする．$f\in Z^n(M,M)$に対し$f=\delta g$なる$g\in C^{n-1}(M,B(\mathcal{H}))$が在る．

証明．定理 2.3 に依り，$f\in Z^n(M,M)$に対して或る$g_0\in C^{n-1}(M,M)$が存在して$f-\delta g_0\in NZ^n(M,M)$．$f_1\equiv f-\delta g_0$とおく．$N$を$M'$の極大可換な$*$-部分代数と$M$により生成

される C^*-代数とすると，補助定理4.2により f_1 の一意な拡張 $\bar{f}_1 \in NZ(N, N)$ が存在する．定理4.1により，或る $f_2 \in Z^n(\bar{N}, \bar{N})$ が存在して

$$\bar{f}_1 - f_2 \upharpoonright_N \in B^n(N, \bar{N}).$$

すなわち，或る $g_1 \in C^{n-1}(N, \bar{N})$ が存在して

$$\bar{f}_1 - \delta g_1 = f_2 \upharpoonright_N .$$

$N' = M \cap Z' = Z$ であるから $\bar{N}$ はI型である．定理3.2により，f_2 に対し $g_2 \in C^{n-1}(\bar{N}, \bar{N})$ が存在して $f_2 = \delta g_2$．ここで $g_3 \equiv g_2 \upharpoonright M$ とすると，$g_3 \in C^{n-1}(M, \bar{N})$ かつ $\delta g_3 = f_2 \upharpoonright M$．$g_4 \equiv g_1 \upharpoonright M$ とすると，$g_4 \in C^{n-1}(M, \bar{N})$．$f_1 = \bar{f}_1 \upharpoonright M$ であるから $f_1 \in Z^n(M, N) \subset Z^n(M, \bar{N})$ かつ $f_1 - \delta g_4 = \delta g_3$．ところで

$$f - \delta g_0 = f_1 = \delta(g_3 + g_4)$$

でしかも $g \in C^{n-1}(M, N) \subset C^{n-1}(M, \bar{N})$ であるから，

$$f = \delta(g_0 + g_3 + g_4)$$

かつ $g_0 + g_3 + g_4 \in C^{n-1}(M, \bar{N})$．$g = g_0 + g_3 + g_4$ とすればよい．

§5. Hyperfinite な場合.

定理5.1. M を hyperfinite な von Neumann 代数とすると，

$H^n(M, M) = 0, \quad n \geqq 1.$

証明. M が standard な場合を考えればよい. このとき M' も hyperfinite であるから, $B(\mathcal{H})$ から M 上への projection ε が存在して $\varepsilon(yxz) = y\varepsilon(x)z$, $y, z \in M$ となる. $f \in Z^n(M, M)$ に対し, 定理4.3を使うと, $f = \delta h$ なる $h \in C^{n-1}(M, B(\mathcal{H}))$ が在る. $g \equiv \varepsilon \circ h$ とすると, $g \in C^{n-1}(M, M)$ かつ $x_1, \cdots, x_n \in M$ に対し

$$
\begin{aligned}
(\delta g)(x_1, \cdots, x_n) &= x_1 g(x_2, \cdots, x_n) + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j g(x_1, \cdots, x_{j-1}, x_j x_{j+1}, x_{j+2}, \cdots, x_n) \\
&\quad + (-1)^n g(x_1, \cdots, x_{n-1}) x_n \\
&= (\varepsilon \circ \delta h)(x_1, \cdots, x_n) \\
&= \varepsilon(f(x_1, \cdots, x_n)) = f(x_1, \cdots, x_n).
\end{aligned}
$$

定理 5.2. A を単位 C^*-代数, $\mathcal{M}$ を A-両側双対加群, G を A の unitary から成る amenable 群とする. もし A が G に依り生成されるならば, $H^n(A, \mathcal{M}) = 0$, $n \geqq 1$.

証明. 定理 2.3 と同様にすればよい.

この定理から直ちに次の系が導かれる.

系. A を abelian 又は u.h.f. な単位 C^*-代数とし, $\mathfrak{M}$ を A-両側双対加群とすれば, $H^n(A, \mathfrak{M}) = 0$, $n \geq 1$.

§6. Normal cohomology.

A を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の C^*-代数とし, $\mathfrak{M}$ を A-双対両側加群とする. 以下両側加群のみを考えるので "両側" を省略して A-双対加群などという. A から $\mathfrak{M}$ への写像 $x \rightsquigarrow xm$ と $x \rightsquigarrow mx$ が σ-弱位相-弱*位相で連続な場合に A-<u>双対normal加群</u>という. $C^n(A, \mathfrak{M})$ の元 f のうち σ-弱位相-弱*位相で連続なもの全体を $C^n_w(A, \mathfrak{M})$, $n \geq 1$ とし $C^0_w(A, \mathfrak{M}) = \mathfrak{M}$ と規約すれば, $\delta C^n_w(A, \mathfrak{M}) \subset C^{n+1}_w(A, \mathfrak{M})$ となる. このとき

$$B^n_w(A, \mathfrak{M}) \equiv \{\delta f : f \in C^{n-1}_w(A, \mathfrak{M})\}$$

$$Z^n_w(A, \mathfrak{M}) \equiv \{f \in C^n_w(A, \mathfrak{M}) : \delta f = 0\}$$

$$H^n_w(A, \mathfrak{M}) \equiv Z^n_w(A, \mathfrak{M}) / B^n_w(A, \mathfrak{M})$$

とする. $H^n_w(A, \mathfrak{M})$ は n 次元 <u>normal cohomology 群</u>といわれる.

これから Johnson, Kadison and Ringrose に依る

Cohomology of operator algebras, III.

Reduction to normal cohomology

Bull. Soc. math. France, 100 (1972), 73-96.

の結果を列挙しよう.

先ず定理 4.1 と同じように

定理 6.1. $A_1, \cdots, A_n$ をそれぞれ Hilbert 空間 $\mathcal{H}_1, \cdots, \mathcal{H}_n$ 上の単位 C^*-代数とし, $\mathfrak{M}$ を或る Banach 空間 $\mathfrak{M}_*$ の双対空間とする. もし f が $A_1 \times \cdots \times A_n$ から $\mathfrak{M}$ への有界な n 重線形写像で σ-弱位相—弱*位相で連続ならば, f のノルムを変えない拡張 $\bar{f}$ が存在して, それは有界な n 重線写像かつ σ-弱位相-弱*位相で連続になっている.

定理 6.2. von Neumann 代数 M 上で有界かつ完全加法的な線形形式は σ-弱連続である. ここで線形形式 φ が完全加法的であるとは, M の互に直交した射影の任意な集合 $\{e_\iota : \iota \in I\}$ に対し $\sum \varphi(e_\iota) = \varphi(\sum e_\iota)$ となることである.

A を Banach 代数, $\mathfrak{M}$ を A-双対加群としたとき, $C^n(A, \mathfrak{M})$ は射影的テンソル積 $A_1 \hat{\otimes} \cdots \otimes \hat{A}_n \otimes \mathfrak{M}_*$ の双対空間と等距離同型で, その対応 $f \longleftrightarrow \bar{f}$ は

$$\bar{f}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes m_*) = \langle f(x_1, \cdots, x_n), m_* \rangle$$

で与えられる．$f\in C^n(A,\mathcal{M})$ と $x_0\in A$ に対し $x_0 f$ と $f x_0$ を次式で定義する；

$$(x_0 f)(x_1,\cdots,x_n)\equiv x_0 f(x_1,\cdots,x_n)$$

$$(f x_0)(x_1,\cdots,x_n)\equiv \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j f(x_0,\cdots,x_{j-1},x_jx_{j+1},x_{j+2},\cdots,x_n)$$
$$+(-1)^n f(x_0,\cdots,x_{n-1})x_n.$$

したがって $C^n(A,\mathcal{M})$ は A−双対加群と考えられる．このとき $H^{m+n}(A,\mathcal{M})$ は $H^m(A,C^n(A,\mathcal{M}))$ と同型であることが示される．Banach代数 A が <u>amenable</u> であるとは，任意な A−双対加群 $\mathcal{M}$ に対し，$H^1(A,\mathcal{M})=0$ となることである．この場合には $H^n(A,\mathcal{M})=0$，$n\geqq 1$ が導かれる．

A と $\mathcal{M}$ を上のようにしておく．$f\in C^m(A,\mathcal{M})$ と $x\in A$ に対し xf と fx を

$$(xf)(x_1,\cdots,x_n)\equiv f(x_1,\cdots,x_m x)$$

$$(fx)(x_1,\cdots,x_n)\equiv f(x_1,\cdots,x_m)x$$

で定義すれば，$C^m(A,\mathcal{M})$ は A−双対加群に成る．

$f\in C^{m+n}(A,\mathcal{M})$ に対して

$$\bar{f}(x_1,\cdots,x_m)(x_{m+1},\cdots,x_{m+n})\equiv f(x_1,\cdots,x_{m+n})$$

とすれば，$\bar{f}\in C^m(A,C^n(A,\mathcal{M}))$ でこの線形対応 $f\rightsquigarrow\bar{f}$ は等距離同型である．この同型写像は弱*位相で両側連続であるから，A−加群の構造を $C^m(A,C^n(A,\mathcal{M}))$ から $C^{m+n}(A,\mathcal{M})$ へ移すことができる．その場合加群の演算は，$f\in C^{m+n}(A,\mathcal{M})$

に対し

$$(xf)(x_1,\cdots,x_{m+n}) = ((\overline{xf})(x_1,\cdots,x_m))(x_{m+1},\cdots,x_{m+n})$$
$$= \overline{f}(x_1,\cdots,x_m x)(x_{m+1},\cdots,x_{m+n})$$
$$= f(x_1,\cdots,x_{m-1},x_m x,x_{m+1},\cdots,x_{m+n})$$

$$(fx)(x_1,\cdots,x_{m+n}) = ((\overline{fx})(x_1,\cdots,x_m))(x_{m+1},\cdots,x_{m+n})$$
$$= (\overline{f}(x_1,\cdots,x_m)x)(x_{m+1},\cdots,x_{m+n})$$
$$= \overline{f}(x_1,\cdots,x_m)(x x_{m+1},\cdots,x_{m+n})$$
$$+ \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j \overline{f}(x_1,\cdots,x_m)(x,x_{m+1},\cdots,x_{m+j-1},x_{m+j}x_{m+j+1},x_{m+j+2},\cdots,x_{m+n})$$
$$+ (-1)^n \overline{f}(x_1,\cdots,x_m)(x,x_{m+1},\cdots,x_{m+n-1})x_{m+n}$$
$$= f(x_1,\cdots,x_m,x x_{m+1},x_{m+2},\cdots,x_{m+n})$$
$$+ \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j f(x_1,\cdots,x_m,x,x_{m+1},\cdots,x_{m+j-1},x_{m+j}x_{m+j+1},x_{m+j+2},\cdots,x_{m+n})$$
$$+ (-1)^n f(x_1,\cdots,x_{m+n-1})x_{m+n}.$$

上に導入した amenable な部分代数と上の議論を使って，定理2.3を次のように一般化できる．

定理6.3. A を Banach 代数，B を A の amenable な閉部分代数，$\mathfrak{M}$ を A−双対加群とする．$f\in Z^n(A,\mathfrak{M})$, $n\geq 1$ ならば，$g\in C^{n-1}(A,\mathfrak{M})$ が存在して，$f-\delta g$ はどこかの

argument が B の元であるときには 0 となるような n-cocycle である.

定理 6.4. A を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の単位 C^*-代数とし, $\mathfrak{M}$ を $\overline{A}$-双対 normal 加群とすると, $H^n_w(A, \mathfrak{M})$ と $H^n(A, \mathfrak{M})$ と $H^n(\overline{A}, \mathfrak{M})$ は互に同型である.

系. M を von Neumann 代数とする.

(i) M は amenable な C^*-部分代数の σ-弱閉包.

(ii) M は M の unitary 全体の作る群の amenable な部分群から生成される $*$-代数の σ-弱閉包.

(iii) M は hyperfinite または I 型.

上の三条件のどれかが成り立てば, 任意な M-双対 normal 加群 $\mathfrak{M}$ に対し $H^n(M, \mathfrak{M}) = 0$, $n \geq 1$.

この系の (iii) は定理 3.2 と定理 5.1 の一般化に成っていることに注意しよう.