数理解析研究所講究録
第166巻 1972年 132-152

Types of automorphism groups of von Neumann algebras and Dye-Haga-Takeda's correspondence

大阪教育大　長田まり恵

§1. はじめに

[7]において芳賀一武田は，finite von Neumann algebra $\mathfrak{A}$ 上の automorphism のなす freely-acting な group G の subgroup K に対して $[K]$ を定義し，group が full であるという概念を導入した。更に G による $\mathfrak{A}$ の crossed product $G \otimes \mathfrak{A}$ の subalgebra と $[G]$ の full subgroup との関係を求め lattice $\{$von Neumann algebra $\mathcal{C}$; $G \otimes \mathfrak{A} \supset \mathcal{C} \supset \mathfrak{A}\}$ と lattice $\{$full group K ; $[G] \supset K\}$ の間に lattice isomorphism が存在することを証明した。この結果は[6]において，Dye が abelian von Neumann algebra $\mathfrak{A}$ に対して示した結果の non-abelian case への拡張になっている。その時，Dye は automorphism group に対して，type を定義して，上記の lattice isomorphism は type (von Neumann algebra としての type と automorphism group としての type) を保存することを示した。

ここでは，必らずしもabelianではないvon Neumann algebra $\mathfrak{A}$上のautomorphism groupに対して，typeを定義し，斉賀–武田のlattice isomorphismがDyeにおけるabelian caseと同様に，typeを保存している事を示していきたい。

§2．定義と準備

以下，von Neumann algebraにおける用語は特にことわらない限り，[4]によるものとする。

$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}^c$, $\mathfrak{A}^P$によって，それぞれvon Neumann algebra, $\mathfrak{A}$のvon Neumann subalgebra, $\mathfrak{A}$における$\mathfrak{B}$のrelative commutant $\mathfrak{B}' \cap \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}$のprojection全体を表わすことにする。

又$P \in \mathfrak{A}^P$に対して，$\overline{P}^{\mathfrak{B}}$によって$P$の$\mathfrak{B}$-supportを表わす。すなわち，

$$\overline{P}^{\mathfrak{B}} = \inf\{Q \in \mathfrak{B}^P;\ PQ = P\}.$$

Von Neumann algebraのtype (discrete及びcontinuous)を決定するにはその中でのabelian projectionが大きな役割を果す。そこで先づ$\mathfrak{A}$におけるabelian projectionの定義を次の様に拡張する。

$E \in \mathfrak{A}^P$が，$E \in \mathfrak{B}^c$で，$E \geqq P$なる任意の$P \in \mathfrak{A}^P$が適当な$Q \in \mathfrak{B}^P$に対して$P = QE$とかけるとき，<u>Eは$\mathfrak{B}$上でabelian</u>であるという。

明らかに，$\mathfrak{B}$が$\mathfrak{A}$のcenterのときには，$\mathfrak{B}$上でabelianである

ということは，通常の意味で abelian であるという事である。又，特に $\mathfrak{A}$ が abelian であるときは，この定義は Dye [5] によるものである。

後程使う簡単な性質として，次の二つがある。

補題1．$E \in \mathfrak{A}^P$ が $\mathfrak{B}$ 上で abelian であるための必要十分条件は $E \in \mathfrak{B}^c$ でかつ reduction algebra $\mathfrak{A}_E$ と induction algebra $\mathfrak{B}_E$ に対して，$\mathfrak{A}_E = \mathfrak{B}_E$ が成立することである。

補題2．$E \in \mathfrak{A}^P$ が $\mathfrak{B}$ 上で abelian で，$F \in (\mathfrak{B}^c)^P$ が $\mathfrak{B}^c$ における projection の同値関係において，$F \precsim E$ ならば，F は又 $\mathfrak{B}$ 上で abelian である。

補題1は [3] の Lemma 2 で補題2は [1] の Lemma 3 なので証明は省略する。

$\mathfrak{A}$ の中に $\mathfrak{B}$ 上で abelian な $E \in \mathfrak{A}^P$ が存在して，$\overline{E}^{\mathfrak{B}} = I$ を充すとき，$\mathfrak{A}$ は $\mathfrak{B}$ 上で discrete であると定義する。

明らかに，$\mathfrak{B}$ が $\mathfrak{A}$ の center であるときには，$\mathfrak{B}$ 上で discrete であるとは，$\mathfrak{A}$ が discrete von Neumann algebra であることである。

例1． $\mathfrak{C}$ を discrete factor とすると，任意の von Neumann algebra $\mathfrak{A}$ に対して，$\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{C}$ の tensor product $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{C}$ は $\mathfrak{A} \otimes I$ の上で discrete である。

事実，$\mathfrak{C}$ の minimal projection P に対して $I \otimes P$ は $\mathfrak{A} \otimes I$ 上で abelian で $\overline{I \otimes P}^{\mathfrak{A} \otimes I} = I \otimes I$ を充す。

定理1．特に$\mathcal{B}\subset\mathcal{Z}=\mathfrak{A}\cap\mathfrak{A}'$のとき$\mathfrak{A}$が$\mathcal{B}$上でdiscreteであるための必要十分条件は$\mathcal{B}$の任意のnon-zero projectionが$\mathcal{B}$上でabelianなnon-zero projectionをおさえることである。

証明．必要条件．$(G_\iota)_{\iota\in I}$を$\mathcal{B}$のnon-zero projectionで各ιに対して$\overline{E_\iota}^{\mathcal{B}}=G_\iota$となる$\mathcal{B}$上でabelianなprojection E_ιが存在する様なmaximal orthogonal familyとする。$G\equiv\sum_\iota G_\iota$とおけば$(G_\iota)_{\iota\in I}$のmaximalityによって$G=I$となる。

$E\equiv\sum_\iota E_\iota=\sup_\iota E_\iota$とおくと，$\mathcal{B}$-supportの定義より

$$\overline{E}^{\mathcal{B}}=\overline{\sup E_\iota}^{\mathcal{B}}=\sup\overline{E_\iota}^{\mathcal{B}}=\sup G_\iota=G=I\ .$$

又G_ιの取り方と$\mathcal{B}\subset\mathcal{Z}$であることにより，

$$\mathfrak{A}_E=\sum_\iota\oplus\mathfrak{A}_{E_\iota}=\sum_\iota\oplus\mathcal{B}_{E_\iota}=\mathcal{B}_E$$

となり補題1によってEは$\mathcal{B}$上でabelian，故に$\mathfrak{A}$は$\mathcal{B}$上でdiscrete。

十分条件．$E\in\mathfrak{A}^P$を$\mathcal{B}$上でabelianで$\overline{E}^{\mathcal{B}}=1$を充すものとする。$\mathcal{B}$の任意のprojection Pに対して$Q\equiv PE$とおくと，

$$\overline{Q}^{\mathcal{B}}=\overline{PE}^{\mathcal{B}}=P\overline{E}^{\mathcal{B}}=P\neq 0。$$

従って$Q\neq 0$．又Eは$\mathcal{B}$上でabelianであるから補題2によりQは$\mathcal{B}$上でabelianとなる。

十分条件に対するこの証明より

系．$\mathfrak{A}$がabelian von Neumann algebraとする。$\mathfrak{A}$が$\mathcal{B}$上でdiscreteであるための必要十分条件はDye [5]の意味で$\mathcal{B}$がtype I subalgebraであること，即ち$\mathfrak{A}$の任意のnon-zero projection が$\mathfrak{B}$上で abelian な non-zero projection をおさえることである。

$\mathfrak{A}$が$\mathfrak{B}$上で abelian な non-zero projection を含まないとき、$\mathfrak{A}$は$\mathfrak{B}$上で continuous であると定義する。

明らかに、center 上で continuous であることは、通常の意味で continuous であることである。特に$\mathfrak{A}$が abelian なときこの様な$\mathfrak{B}$を Dye [5] は type II subalgebra と呼んでいる。

例2. continuous な von Neumann algebra は全ての abelian von Neumann subalgebra 上で continuous である。

補題3. $\mathfrak{A}$が$\mathfrak{B}$上で discrete (及び continuous) ならば、任意の non-zero $E \in (\mathfrak{B} \cap \mathfrak{B}')^P$ に対して、$\mathfrak{A}_E$ は $\mathfrak{B}_E$ 上で discrete (及び continuous) である。

証明. $\mathfrak{A}$が$\mathfrak{B}$上で discrete とする。$F \in (\mathfrak{B}^c)^P$ が存在して、$\overline{F}^{\mathfrak{B}} = 1$ かつ $\mathfrak{A}_F = \mathfrak{B}_F$ を充す。$G \equiv FE$ とおくと、$\overline{G}^{\mathfrak{B}} = E$ かつ $\mathfrak{A}_G = \mathfrak{B}_G$ を充し、$G \in (\mathfrak{B}^c)^P$ となるから $\mathfrak{A}_E$ は $\mathfrak{B}_E$ 上で discrete. $\mathfrak{A}$が$\mathfrak{B}$上で continuous なとき、$\mathfrak{A}_E$ が $\mathfrak{B}_E$ 上で continuous でないとすると、$E \geqq P$ なる $\mathfrak{B}$ 上で abelian な non-zero projection が存在し矛盾。

補題4. $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{Z} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}'$ のとき、$\{E_\iota\}_{\iota \in I}$ を $\mathfrak{B}^P$ の中の互いに直交し、和が1になる様な family とする。各ιに対して、$\mathfrak{A}_{E_\iota}$が$\mathfrak{B}_{E_\iota}$上で discrete ならば、$\mathfrak{A}$は$\mathfrak{B}$上で discrete である。

証明は定理1における必要条件の証明と同様なので省く。

補題5。$\{E_\iota\}_{\iota\in I}$を互いに直交し和が1になる様な$\mathfrak{B}$の projection の family とする。各ιに対して$\mathfrak{A}_{E_\iota}$が$\mathfrak{B}_{E_\iota}$上で continuous ならば、$\mathfrak{A}$は$\mathfrak{B}$上で continuous である。

証明．もし$\mathfrak{A}$が$\mathfrak{B}$上で continuous でないと、$\mathfrak{B}$上で abelian な non-zero $F\in(\mathfrak{B}^c)^P$が存在する。各ιに対して、$G_\iota\equiv FE_\iota$とおくと、$G_\iota\in(\mathfrak{B}^c)^P$．$G_{\iota_0}\neq 0$となる$\iota_0$が存在する。補題2により、$G_{\iota_0}$は$\mathfrak{B}$上で abelian となり$\mathfrak{A}_{E_{\iota_0}}$が$\mathfrak{B}_{E_{\iota_0}}$上で continuous であることに矛する。

定理2。特に$\mathfrak{B}\subset\mathfrak{Z}=\mathfrak{A}\cap\mathfrak{A}'$のときは$\mathfrak{A}_E$が$\mathfrak{B}_E$上で discrete で$\mathfrak{A}_{1-E}$が$\mathfrak{B}_{1-E}$上で continuous になる様な$E\in\mathfrak{B}^P$が唯一つ存在する。

従って、全ての von Neumann algebra $\mathfrak{A}$に対して、

系。$\mathfrak{A}$は discrete part と continuous part に唯一通りに直和分解できる。

定理2の証明。もし$\mathfrak{A}$が$\mathfrak{B}$上で continuous でないとすると、$\mathfrak{B}$上で abelian な nonzero $E_\iota\in\mathfrak{A}^P$が存在する。その様な全てのιに対して、$E\equiv\sup\overline{E_\iota}$とおくと、$E\in\mathfrak{B}^P$．任意の$0\neq P\leqq E$なる$P\in\mathfrak{B}^P$に対して、$PE_k\neq 0$なる$k$が存在する。補題2により$PE_k$は$\mathfrak{B}$上で abelian。従って、$\mathfrak{A}_E$は定理1により$\mathfrak{B}_E$上で discrete である。もし$\mathfrak{A}_{1-E}$が$\mathfrak{B}_{1-E}$上で continuous でないとすると、$1-E\geqq G$なる$\mathfrak{B}$上で abelian な non-zero $G\in\mathfrak{A}^P$が存在する。$G\leqq\overline{G}\leqq E$。

従って $G=0$ となり矛盾。故に $\mathfrak{A}_{1-E}$ は $\mathfrak{B}_{1-E}$ 上で continuous である。F を $\mathfrak{A}_F$ が $\mathfrak{B}_F$ 上で discrete かつ $\mathfrak{A}_{1-F}$ が $\mathfrak{B}_{1-F}$ 上で continuous となる様な $\mathfrak{B}$ の projection とすると，$\mathfrak{B}$ 上で abelian で $\overline{Q}=F$ となる $Q\in\mathfrak{A}^P$ が存在する．E の定義より $\overline{Q}=F\leqq E$。もし $E\neq F$ なら $0\neq E-F\in\mathfrak{B}^P$ 従って定理 1 により $E-F\geqq\overline{\overline{R}}$ なる $\mathfrak{B}$ 上で abelian な projection R が存在する．一方 $1-F\geqq E-F\geqq R$ 従って $\mathfrak{A}_{1-F}$ が $\mathfrak{B}_{1-F}$ 上で continuous なことに矛盾。故に $E=F$ となり唯一性が判る。

$\mathfrak{A}$ から $\mathfrak{B}$ 上への positive linear mapping e が

$$1^e=1$$

$$(AB)^e=A^eB \qquad \text{for } \forall A\in\mathfrak{A},\ \forall B\in\mathfrak{B}$$

の条件を充すとき，e は $\mathfrak{A}$ から $\mathfrak{B}$ への expectation であるという。

e を $\mathfrak{A}$ から $\mathfrak{B}$ への normal（$A_\alpha\uparrow A$ ならば $A_\alpha^e\uparrow A^e$）な expectation とする。そのとき任意の $P\in\mathfrak{A}^P$ と $0\leqq B\leqq P^e$ なる任意の $B\in\mathfrak{B}$ に対して

$$Q\leqq P \quad かつ \quad Q^e=B$$

を充す $Q\in\mathfrak{A}^P$ が存在するとき $\mathfrak{B}$ は $\mathfrak{A}$ の <u>e-strong Maharam subalgebra</u> であると定義する。

$\mathfrak{A}$ が abelian von Neumann algebra でその von Neumann subalgebra $\mathfrak{B}$ 上で continuous ならばある conditional expectation e に対して $\mathfrak{B}$ は $\mathfrak{A}$ の e-strong Maharam subalgebra になることは Maharam により証明されている([1], [5])。

この結果は次の定理の様に拡張できる【3; corollary 11】。

定理3. $\mathcal{B}$が$\mathcal{A}$のcenterに含まれているとき εを$\mathcal{A}$から$\mathcal{B}$へのnormal expectationとする。$\mathcal{A}$が$\mathcal{B}$上でcontinuousであるならば$\mathcal{B}$は$\mathcal{A}$のε-strong Maharam subalgebraである。

証明は繁雑なので§5において述べる。

§3. 通常のtypeと上記のtypeとの関係

ここでは特に次の様な条件を充す2つのvon Neumann algebra $\mathcal{C}$と$\mathcal{A}$についての関係をみていく。

$$(*) \qquad \mathcal{C} \supset \mathcal{A} \supset \mathcal{Z} = \mathcal{A} \cap \mathcal{A}' \supset \mathcal{Z} = \mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$$

$$(**) \qquad \mathcal{C} \supset \mathcal{A} \supset \mathcal{Z} = \mathcal{A}' \cap \mathcal{C}$$

明らかに(**)が成立すれば(*)は成立する。

定理4. $\mathcal{C}$と$\mathcal{A}$を(*)を充す2つのvon Neumann algebraとする。もし$\mathcal{C}$がfiniteかつdiscreteならば、$\mathcal{A}$は$\mathcal{Z}$上でdiscreteである。

証明。$\mathcal{A}$が$\mathcal{Z}$上でdiscreteでないとすると、$\mathcal{A}_p$が$\mathcal{Z}_p$上でcontinuousになる様なnon-zero $P \in \mathcal{Z}^P$が定理2により存在する。従って$\mathcal{A}$が$\mathcal{Z}$上でcontinuousであると仮定してもよい。$\mathcal{C}$がdiscreteであることより、$\mathcal{C}_E = \mathcal{Z}_E$かつ$\overline{E}^{\mathcal{Z}}=1$なる$E \in \mathcal{C}^P$が存在する。$\varepsilon$を$\mathcal{C}$から$\mathcal{Z}$へのfaithful normal expectation(すなわち$\mathcal{C}$のcanonical natural mapping)とする。仮定より、$\mathcal{Z}$と$\mathcal{A}$は定理3の条件を充す。従って、$\mathcal{Z}$は$\mathcal{A}$のε-strong Maharam subalgebraであるから、$F \in \mathcal{A}^P$が存在し

$F^{\mathcal{C}} = E^{\mathcal{C}}$ を充す。$\mathcal{C}$ は positive かつ faithful であるから $F \sim E$。補題2より F は $\mathfrak{Z}$ 上で abelian となる。即ち $\mathcal{C}_F = \mathfrak{Z}_F$ 従って $\mathfrak{A}_F = \mathfrak{Z}_F$ が成立する。明らかに $F \neq 0$ であるから $\mathfrak{A}$ が $\mathfrak{Z}$ 上で continuous である事に反する.

系。$\mathcal{C}$ と $\mathfrak{A}$ を (*) を充す2つの von Neumann algebra とする。もし $\mathfrak{A}$ が $\mathfrak{Z}$ 上で continuous で $\mathcal{C}$ が finite であれば、$\mathcal{C}$ は continuous である。

証明。$\mathcal{C}$ が continuous でなければ、non-zero $E \in \mathfrak{Z}^P$ が存在して $\mathcal{C}_E$ が discrete になる。従って定理4により、$\mathfrak{A}_E$ は $\mathfrak{Z}_E$ 上で discrete になる。一方 $\mathfrak{Z}$ は abelian で $E \in \mathfrak{Z}^P$ より補題3により $\mathfrak{A}_E$ は $\mathfrak{Z}_E$ 上で continuous となり矛盾。

補題6。$\mathcal{C}$ と $\mathfrak{A}$ を (**) を充す2つの von Neumann algebra とする。もし $\mathfrak{A}$ が discrete ならば、$\mathfrak{A} = \mathcal{C} \cap \mathfrak{Z}'$ となる。

証明。$\mathfrak{B}$ を $\mathcal{C}'$ と $\mathfrak{Z}$ により生成される von Neumann algebra とすると $\mathfrak{A}' \supset \mathfrak{B} \supset \mathfrak{Z}$。今 $\mathfrak{A}$ は discrete だから、$\mathfrak{A}'$ も又 discrete。従って $\mathfrak{B}$ は normal subalgebra、即ち $\mathfrak{B}^{cc} = \mathfrak{B}$ が成立する。
他方

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}^{cc} &= (\mathfrak{B}' \cap \mathfrak{A}')' \cap \mathfrak{A}' = (\mathcal{C} \cap \mathfrak{Z}' \cap \mathfrak{A}')' \cap \mathfrak{A}' \\
&= (\mathcal{C} \cap \mathfrak{A}' \cap \mathfrak{Z}') \cap \mathfrak{A}' = (\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{Z}')' \cap \mathfrak{A}' \\
&= \mathfrak{Z}' \cap \mathfrak{A}' \qquad = \mathfrak{A}'
\end{aligned}$$

従って、$\mathfrak{B} = \mathfrak{A}'$ となり $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}' = \mathcal{C} \cap \mathfrak{Z}'$ が成立する。

補題7. discrete von Neumann algebra $\mathfrak{A}$ と continuous von Neumann algebra $\mathcal{C}$ が(**)を充すとする。すると $\mathfrak{A}$ は $\mathfrak{Z}$ 上で continuous である。

証明。$\mathfrak{A}$ が $\mathfrak{Z}$ 上で continuous でないとすると, $\mathfrak{Z}$ 上で abelian な non-zero $E \in \mathfrak{A}^P$ が存在する。故に $\mathfrak{A}_E = \mathfrak{Y}_E = \mathfrak{Z}_E$ が成立する。一方補題6より $\mathfrak{A} = \mathfrak{Y}' \cap \mathcal{C}$ が成立するから

$$\mathcal{C}_E = \mathcal{C}_E \cap \mathfrak{Z}'_E = \mathcal{C}_E \cap \mathfrak{Y}'_E = (\mathcal{C} \cap \mathfrak{Y}')_E = \mathfrak{A}_E = \mathfrak{Z}_E$$

となり、$\mathcal{C}$ が continuous であることに矛盾する。

定理5. (**)のもとで、$\mathcal{C}$ が continuous ならば, $\mathfrak{A}$ は $\mathfrak{Z}$ 上で continuous になる。

証明。$E \in \mathfrak{Y}^P$ が存在し、$\mathfrak{A}_E$ が discrete, $\mathfrak{A}_{1-E}$ が continuous となる。$\mathfrak{Z}_{1-E}$ は abelian だから $\mathfrak{A}_{1-E}$ は $\mathfrak{Z}_{1-E}$ 上で continuous である。一方 $\mathfrak{A}_E$ は discrete で、$\mathcal{C}_E$ が continuous であるから、補題7より $\mathfrak{A}_E$ は $\mathfrak{Z}_E$ 上で continuous である。従って補題5より $\mathfrak{A}$ は $\mathfrak{Z}$ 上で continuous である。

定理5と補題3より

系。(**)のもとで、$\mathfrak{A}$ が $\mathfrak{Z}$ 上で discrete ならば、$\mathcal{C}$ は discrete である。

以上§3の結果を総まとめにすると

定理6. von Neumann algebra $\mathfrak{A}$ と finite von Neumann algebra $\mathcal{C}$ が(**)を充すとする。$\mathcal{C}$ が discrete (及び continuous)

であるための必要十分条件は、$\mathfrak{A}$がその center 上で discrete (及び continuous) であることである。

§4. crossed product との関係

$\mathfrak{A}$を σ-finite finite von Neumann algebra とし、G を $\mathfrak{A}$ 上の (*-) automorphism のなす countable group とする。$\mathfrak{A}$ 上の automorphism α に対して、

$$AB = B^{\alpha} A \quad \text{for } \forall A \in \mathfrak{A} \text{ ならば } A = 0$$

が成立つとき α は freely acting on $\mathfrak{A}$ といわれる[9]。この定義は、$\mathfrak{A}$ が abelian von Neumann algebra のときは、von Neumann による定義：任意の non-zero $P \in \mathfrak{A}^P$ に対して、$QQ^{\alpha} = 0$ かつ $0 \neq Q \leqq P$ なる $Q \in \mathfrak{A}^P$ が存在することと同値である。又 automorphism group G に対して、単位元 1 と異なる任意の $g \in G$ が freely-acting のとき、G は freely-acting であるという。2つの $\mathfrak{A}$ 上の automorphism α と β に対して

$$F(\alpha, \beta) = \sup\{P \in (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}')^P ;\ P^{\alpha^{-1}\beta} = P,\ \alpha^{-1}\beta \text{ は } \mathfrak{A}_P \text{ 上で inner}\}$$

とおく([7], [9])。以下 group G は $\mathfrak{A}$ 上で freely-acting と仮定する。

$$[G] = \{\text{automorphism } \alpha \text{ on } \mathfrak{A} ;\ \sup_{g \in G} F(\alpha, g) = 1\}$$

とおくと、$[G]$ は G を含む group となる。automorphism のなす group K が $K = [K]$ を充すとき K は full であるという。

ここで簡単に crossed product の作り方を述べる([11], [12])。φ を $\mathfrak{A}$ 上の finite faithful normal G-invariant (即ち

$\varphi(A)=\varphi(A^g)$ for all $g\in G$) trace とし、$\varphi(1)=1$ と正規化しておく。G 上で定義された $\mathfrak{A}$-valued form を $\sum_{g\in G} g\otimes A_g$ と表わす。但し A_g はこの form の g で取る値である。$\mathfrak{L}$ を G の有限集合を除いては $A_g=0$ となる様な $\sum_{g\in G} g\otimes A_g$ の全体とする。$\mathfrak{L}$ の元に対し、和は各要素ごとの和で、*-演算と積を次の様に定義する。

$$\Big(\sum_{g\in G} g\otimes A_g\Big)^* = \sum_{g\in G} g^{-1}\otimes A_g^{*\,g}$$

$$\Big(\sum_{g\in G} g\otimes A_g\Big)\Big(\sum_{h\in G} h\otimes B_h\Big) = \sum_{g,h\in G} gh\otimes A_g B_h^{g^{-1}}.$$

これらの演算のもとで $\mathfrak{L}$ は *-algebra になる。そこで φ を $\mathfrak{L}$ 上の faithful trace $\tilde{\varphi}$ に次の様に拡張する。

$$\tilde{\varphi}\Big(\sum_{g\in G} g\otimes A_g\Big) = \varphi(A_1)。$$

φ による $\mathfrak{A}$ の表現空間を $\mathfrak{H}$ で表わし、$\tilde{\varphi}$ による $\mathfrak{L}$ の表現空間を G の $\mathfrak{H}$ で表わす。$\mathfrak{L}$ は isomorphism により、G の $\mathfrak{H}$ の dense set とみなすことができる。$\mathfrak{A}\ni A$ と $G\ni g$ を G の $\mathfrak{H}$ 上に次の様に自然に拡張する。$\forall \sum g\otimes B_g\in\mathfrak{L}$ と任意の $\sum h\otimes B_h\in\mathfrak{L}$ に対し、

$$1\otimes A\Big(\sum_{g\in G} g\otimes B_g\Big) = \sum g\otimes AB_g$$

$$U_g\Big(\sum h\otimes B_h\Big) = \sum gh\otimes B_h^{g^{-1}}.$$

$\mathfrak{L}$ における積のもとで $1\otimes A$, $g\otimes 1$ を左から掛けるという演算子に相当している。すると U_g は G の $\mathfrak{H}$ 上の unitary となり

$$U_g^*(1\otimes A)U_g = 1\otimes A^g$$

を充す。$1\otimes A$ と A との対応は $1\otimes\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{A}$ との isomorphism になる

から以下 $1\otimes A$ と A を同一視する。$\mathfrak{A}$ と $\{U_g : g\in G\}$ によって生成された von Neumann algebra，言いかえると $\mathfrak{L}$ の operator topology による weak closure を $G\otimes\mathfrak{A}$ で表わし、von Neumann algebra $\mathfrak{A}$ の automorphism group G による <u>crossed product</u> という。作り方により $G\otimes\mathfrak{A}$ は faithful finite normal trace $\hat{\varphi}$ を持つ finite な von Neumann algebra である。

上記の $[G]$ と $G\otimes\mathfrak{A}$ の間の関係は、automorphism α が $\alpha\in[G]$ であるための必要十分条件は、$G\otimes\mathfrak{A}$ の unitary U_α が存在して

$$U_\alpha^* A U_\alpha = A^\alpha \qquad \text{for all } A\in\mathfrak{A}$$

を充すことである[7]。更に $[G]$ の subgroup と $G\otimes\mathfrak{A}$ の von Neumann subalgebra との関係は芳賀－武田による次の定理の様な形で述べられる。

定理A [7 ; Theorem 2] <u>lattice $\{$von Neumann subalgebra $\mathcal{C}$; $G\otimes\mathfrak{A}\supset\mathcal{C}\supset\mathfrak{A}\}$ と lattice $\{$group K ; $[G]\supset K=[K]\}$ との間には、lattice isomorphism が存在する。この isomorphism は、K に対して、</u>

$$\underline{\mathcal{C}=\{U_\alpha\in(G\otimes\mathfrak{A}) : \text{unitary},\ \alpha\in K\}''}$$

<u>を対応させ、$\mathcal{C}$ に対して、</u>

$$\underline{K=\{\alpha\in[G]\ ;\ U_\alpha\in\mathcal{C}\}}$$

<u>を対応させる</u>。

$[G]$ の subgroup K に対して、

$$\mathfrak{Z}(K) = \{A \in \mathfrak{A} \,;\, A^g = A \text{ for any } g \in K\}$$

とおき K の fixed algebra という。$[G]$ の subgroup K に対して、$\mathfrak{A}$ が $\mathfrak{Z}(K)$ 上で discrete なとき K は discrete type, $\mathfrak{A}$ が $\mathfrak{Z}(K)$ 上で continuous なとき K は continuous type と定義する。

明らかに、$\mathfrak{A}$ が abelian von Neumann algebra のときは、$[G]$ の full subgroup が discrete type (及び continuous type) であることと、Dye の意味による type I (及び type II) であることとは一致する。

定義により、full group は $\mathfrak{A}$ 上の全ての inner automorphism を含むから、full group の fixed algebra は $\mathfrak{A}$ の center に含まれる。従って定理2により、full group は discrete type と continuous type の直和に唯一通りに分割できる。

定理7. $G \otimes \mathfrak{A} \supset \mathcal{C} \supset \mathfrak{A}$ なる von Neumann algebra $\mathcal{C}$ と $[G]$ の full subgroup K が定理A の lattice isomorphism で対応していたとする。そのとき $\mathcal{C}$ が discrete (及び continuous) であるための必要十分条件は、K が discrete type (及び continuous type) であることである。

証明。$\mathfrak{A}$ が σ-finite finite であるから crossed product の作り方より $G \otimes \mathfrak{A}$ は finite。従って $\mathcal{C}$ は finite。一方 G は freely acting であるから $\mathfrak{A}' \cap \mathcal{C} = \mathfrak{Z}$ [8; Lemma 4.1]。従って、$\mathcal{C}$ と $\mathfrak{A}$ は

定理6の条件を満足する。従って $\mathcal{C}$ が discrete (及び continuous) であるための必要十分条件は、$\mathfrak{A}$ が $\mathcal{C}$ の center 上で discrete (及び continuous) であることである。ところが $\mathcal{C}$ と K は定理 A の様な形で対応しているのだから、$\mathcal{C}\cap\mathcal{C}' = \mathfrak{Z}(K)$ [8, corollary 4.3]。従って $\mathcal{C}$ が discrete (及び continuous) であるための必要十分条件は、K が discrete type (及び continuous type) であることである。

[8] においては、この定理7とは少し異なった形で von Neumann algebra の type と full group の type の対応に関する結果が述べられている。

特に $\mathfrak{A}$ を abelian von Neumann algebra とすると、定理7より Dye の結果が得られる。また、次のことも得られる。

系。$\mathfrak{A}$ を continuous von Neumann algebra とする。$G\otimes\mathfrak{A}\supset\mathcal{C}\supset\mathfrak{A}$ なる全ての von Neumann algebra $\mathcal{C}$ は continuous である。

証明。$\mathcal{C}$ に定理 A の意味で対応する $[G]$ の full subgroup を K とする。$\mathfrak{Z}(K)$ は abelian だから $\mathfrak{A}$ は $\mathfrak{Z}(K)$ 上で continuous と成る。故に K は continuous type であるから定理7より、$\mathcal{C}$ は continuous である。

§5. Maharam の補題に関して

ここでは、Maharam の補題の拡張について述べていく。

補題8. もし$\mathfrak{A}$が$\mathfrak{B}$上でcontinuousならば、$0 \neq PQ \in (\mathfrak{B}^c)^P$ となる全ての $P \in \mathfrak{A}^P$ と $Q \in \mathfrak{B}^P$ に対して、$R \in \mathfrak{A}^P$ と $E \in \mathfrak{B}^P$ が存在して更に $0 \neq F \leqq E$ なる任意の $F \in \mathfrak{B}^P$ に対して

$$0 \neq R \leqq PQ, \quad 0 \neq E \leqq Q, \quad (P-R)F \neq 0, \quad RF \neq 0$$

を満足する。

証明。その様なprojection R と E が存在しなかったとする。R を $0 \neq R \leqq PQ$ となる任意の$\mathfrak{A}$のprojectionとする。

$$G = \sup\{E \in \mathfrak{B}^P ;\ (P-R)E = 0 \text{ かつ } E \leqq Q\}$$

とおき

$$G' = \sup\{E \in \mathfrak{B}^P ;\ RE = 0 \text{ かつ } E \leqq Q - G\}$$

とおくと、$G \in \mathfrak{B}^P$ かつ $G' \in \mathfrak{B}^P$。もし $G' \neq Q - G$ ならば、$0 \neq Q - G - G' \leqq Q$。従って仮定より $R \in \mathfrak{A}^P$ と $Q - G - G' \in \mathfrak{B}^P$ に対して、$F \leqq Q - G - G'$ となる $F \in \mathfrak{B}^P$ が存在して、

(1) $\quad (P-R)F = 0$ 又は $RF = 0$。

ところが G と G' の定義より、(1)のどちらが成立しても $F = 0$ となり矛盾。従って $G' = Q - G$ 即ち $R(Q-G) = 0$ となる。その結果 R と G の定義より、

$$R = RQ = RG = PG = PQG = GPQ$$

が $R \leqq PQ$ なる全ての $R \in \mathfrak{A}^P$ に対して成立するから、PQ は$\mathfrak{B}$上でabelianとなり、$\mathfrak{A}$が$\mathfrak{B}$上でcontinuousであるという仮定に反する。

定理8。$\mathfrak{B}$を$\mathfrak{A}$のabelian von Neumann subalgebraとし

e を $\mathfrak{A}$ から $\mathfrak{B}$ への normal expectation とする。もし $\mathfrak{B}^c$ が $\mathfrak{B}$ 上で continuous ならば、$\mathfrak{B}$ は $\mathfrak{B}^c$ の e-strong Maharam subalgebra である。

証明。最初に次の事(2)を証明する。

(2) $\begin{cases} P \in (\mathfrak{B}^c)^P \text{ を固定すると, 任意の整正数 } n \text{ と } PR \neq 0 \text{ なる } R \in \mathfrak{B}^P \\ \text{に対して、} E \in (\mathfrak{B}^c)^P \text{ が存在して、次の3条件を充す.} \\ \quad 0 \neq E \leqq P, \qquad 0 \neq ER \qquad \text{かつ} \qquad E^eR \leqq \dfrac{P^eR}{2^n} \end{cases}$

補題8により、$G \in (\mathfrak{B}^c)^P$ と $E \in \mathfrak{B}^P$ が存在して、$0 \neq F \leqq E$ なる任意の $F \in \mathfrak{B}^P$ に対して、

$$0 \neq G \leqq PR, \quad 0 \neq E \leqq R, \quad (P-G)F \neq 0, \quad GF \neq 0$$

を充す。今 $\mathfrak{B}$ は abelian であるから、$\mathfrak{B}$ を $\mathfrak{B}$ の character space Ω 上連続函数全体のなす algebra $C(\Omega)$ と同一視して話を進める。C を $\{\omega \in \Omega;\ 2G^e(\omega) \geqq P^e(\omega)\}$ に対応する projection とし D を $\{\omega \in \Omega;\ 2G^e(\omega) \leqq P^e(\omega)\}$ に対応する projection とする。$Q \equiv (P-G)C + GD$ とおくと、

$$Q^e = (P^e - G^e)C + G^eD \leqq \frac{P^e}{2}.$$

C と D の取り方より $CE \neq 0$ 又は $DE \neq 0$ だから、$(P-G)CE \neq 0$ 又は $GDE \neq 0$。従って

$$QE = (P-G)CE + GDE \neq 0.$$

故に(2)の R と $n=1$ に対して、$Q \in (\mathfrak{B}^c)^P$ が存在して、$Q \leqq P$, $QR \neq 0$ かつ $Q^eR \leqq \dfrac{P^eR}{2}$ を充す。P を Q によって置きかえ、

この操作を繰り返す事により求める $E \in (\mathcal{B}^c)^P$ を得る。次に(2)を用いて、

$$(3)\quad \begin{cases} \text{任意の } 0 \neq P \in (\mathcal{B}^c)^P \text{ と } 0 < B \leqq P^e \text{ なる任意の } B \in \mathcal{B} \text{ に対し、} \\ Q \in (\mathcal{B}^c)^P \text{ が存在して、} 0 \neq Q \leqq P \text{ かつ } Q^e \leqq B \text{ を充す。} \end{cases}$$

を示す。spectral Theorem によって、$0 \neq R \in (\mathcal{B})^P$ と整数 n が存在して、$BR \geqq \frac{R}{2^n}$ が成立する。$P^e \geqq B$ という仮定より、

$$(PR)^e = P^eR \geqq BR \geqq \frac{R}{2^n} > 0\text{。}$$

従って、$PR \neq 0$。故に、(1)によって、$E \in (\mathcal{B}^c)^P$ が存在して

$$0 \neq E \leqq P \quad , \quad ER \neq 0 \quad \text{かつ} \quad E^eR \leqq \frac{P^eR}{2^n}$$

を充す。他方、$B \leqq P^e \leqq 1$ だから

$$(ER)^e = E^eR \leqq \frac{P^eR}{2^n} \leqq \frac{R}{2^n} \leqq BR \leqq B\text{.}$$

$Q \equiv ER$ とおくと、$Q \in (\mathcal{B}^c)^P$ で $0 \neq Q \leqq P$ かつ $Q^e \leqq B$ を充す。$P \in (\mathcal{B}^c)^P$ と $0 \leqq B \leqq P^e$ なる $B \in \mathcal{B}$ を取ってくる。上の(3)と Zorn の Lemma より $(Q_\alpha)_{\alpha \in I}$ なる $\mathcal{B}^c$ の projection の $0 \neq Q_\alpha \leqq P$ を各 $\alpha \in I$ に対して充し、$\sum_\alpha Q_\alpha^e \leqq B$ となる様な maximal orthogonal family が存在する。$Q \equiv \sum_\alpha Q_\alpha$ とおくと、$Q \in (\mathcal{B}^c)^P$ かつ $Q \leqq P$。e は normal だから、$Q^e = \sum_\alpha Q_\alpha^e$。もし $Q^e \neq B$ ならば、$(P-Q)^e \geqq B - Q^e > 0$。従って、(3)により、$R \in (\mathcal{B}^c)^P$ が存在して

$$0 < R \leqq P - Q \quad \text{かつ} \quad R^e \leqq B - Q^e$$

を充す。これは $(Q_\alpha)_{\alpha \in I}$ の maximality に反する。従って $Q^e = B$。この様にして、任意の $P \in (\mathcal{B}^c)^P$ と $0 \leqq B \leqq P^e$ なる $B \in \mathcal{B}$ に対し

て、$Q \in (\mathcal{B}^c)^P$ が存在して、$Q \leqq P$ かつ $Q^e = B$ を充す。従って $\mathcal{B}$ は $\mathcal{B}^c$ の e-strong Maharam subalgebra である。

特に、$\mathfrak{A}$ が abelian von Neumann algebra のときには、定理8 は Maharam の Lemma を含んでいる([1], [5])。

特に $\mathcal{B}$ を $\mathfrak{A}$ の center に含まれる von Neumann subalgebra とすると、定理8より、定理3が得られる。

< 文　　献 >

1、長田　尚；Maharam の補題をめぐって。第2回函数解析研究会報告集，97−105，(1967)

2. M. Choda ; Abelian projections over a von Neumann subalgebra, Proc. Japan Acad., 48 (1972) 384−388.

3. M. Choda ; A von Neumann algebra continuous over a von Neumann subalgera, to appear.

4. J. Dixmier ; Les algebres d'operateurs dans l'espace Hilbertien, Gauthier-Villars, Paris (1957).

5. H. A. Dye ; On groups of measure preserving transformations I, Amer. J. Math., 81 (1959) 119−159.

6. H. A. Dye ; On groups of measure preserving

transformation, II, Amer. J. Math., 85 (1963) 716 − 808.

7. Y. Haga and Z. Takeda ; Correspondence between subgroups and subalgebras in a cross product von Neumann algebra, Tohoku Math. J., 24 (1972), 167 − 190.

8. Y. Haga ; On subalgebras of cross product von Neumann algebra, Preprint.

9. R. R. Kallmann ; A generalization of free action, Duku Math. J., 36 (1969), 781 − 789.

10. M. Nakamura and T. Turumaru ; Expectations in an operator algebra., Tohoku Math. J., 6 (1954) 182 − 188.

11. M. Nakamura and Z. Takeda ; On some elementary properties of the crossed product of von Neumann algebras, Proc. Japan. Acad., 34 (1958), 489 − 494.

12. T. Turumaru ; Crossed product of operator algebras, Tohoku Math. J., 10 (1958), 355 − 365.

13. H. Umegaki ; Conditional expectation in an operator algebra, Tohoku Math. J., 6 (1954), 177 − 181.

14. H. Umegaki ; Positive definite functions and direct product of Hilbert space, Tohoku. Math. J., 7(1955), 201-211.