数理解析研究所講究録
第 167 巻 1972 年 36-45

共分散行列に関するいくつかの検定の仮説の下での漸近分布について

熊本大 教養　長尾寿夫

§1．序

多次元正規分布の共分散行列Σに関する次の仮説検定問題を取り扱う。(i) 仮説 $H_1: \Sigma=\Sigma_0$ 対立仮説 $K_1: \Sigma\neq\Sigma_0$ (ii) $H_2: \Sigma=\sigma^2 I$　$K_2: \Sigma\neq\sigma^2 I$ (iii) $H_3: \Sigma=\Sigma_D$　$K_3: \Sigma\neq\Sigma_D$ (iv) $H_4: \Sigma_1=\cdots=\Sigma_k$　$K_4: \Sigma_i\neq\Sigma_j$ $(i\neq j)$. これに対する尤度比検定をλとしたとき，対立仮説の下では$-2\log\lambda$は，(i) (ii)に対してはSugiura [5] (iii), (iv) はNagao [4], [3] によって漸近展開が求められている。その第一項は正規分布であり仮説の下では，その分散は0となる。そこでその分散に不偏推定量を代入することによって(i)～(iv)に対する一つの検定が考えられる。ここではそれらの仮説の下での漸近展開を求めることである。

§2．検定統計量

$X_1, X_2, \cdots, X_N$ を p 次元正規分布 $N(\mu, \Sigma)$ からの random sampleとする。このとき i)に対して

$$(2.1) \qquad T_1 = \frac{n}{2} \operatorname{tr}(S\Sigma_0^{-1}/n - I)^2,$$

ただし $S = \sum_{\alpha=1}^{N}(x_\alpha - \bar{x})(x_\alpha - \bar{x})'$, $n = N-1$.

ii)に対しては

$$(2.2) \qquad T_2 = \frac{p^2 n}{2} \operatorname{tr}\left\{\frac{S}{\operatorname{tr} S} - p^{-1} I\right\}^2$$

この検定は，別の観点より John [2], Sugiura [6] によって，locally best invariant であることが示されている。

(iii)に対しては

$$(2.3) \qquad T_3 = \frac{n}{2} \operatorname{tr}(S S_D^{-1} - I)^2,$$

ただし

$$(2.4) \qquad S_D = \begin{pmatrix} S_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S_{gg} \end{pmatrix}$$

特に $g=2$ のとき $T_3 = n \operatorname{tr} S_{12} S_{22}^{-1} S_{21} S_{11}^{-1}$ となり Pillai 統計量となる。

(iv) に対して

$$(2.5) \qquad T_4 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{k} n_\alpha \operatorname{tr}\left\{\frac{S_\alpha}{n_\alpha}\left(\frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{k} S_\alpha\right)^{-1} - I\right\}^2,$$

ただし $S_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha}(x_{\alpha\beta} - \bar{x}_\alpha)(x_{\alpha\beta} - \bar{x}_\alpha)'$, $n_\alpha = N_\alpha - 1$, $n = \sum_{\alpha=1}^{k} n_\alpha$.

§3. 準備

上の(i)〜(iv)の仮説の下での漸近分布を求めるためにいくつかの補題をのべる。まず

$$\mathfrak{A}=\{A(p\times p)\ ;\ A\ \text{実対称行列}\}$$

(3.1) $$\mathfrak{B}=\{B(p\times p)\ ;\ B\ \text{実正値対称行列}\}$$

$$e^{\mathfrak{A}}=\{e^A\ ;\ A\in\mathfrak{A}\}$$

とおく。

ここで次の関数fを考える，$f: A(\in\mathfrak{A})\longrightarrow e^A$

ただし

(3.2) $$e^A = I + A + \cdots + \frac{A^k}{k!}+\cdots$$

補題1.

関数fは1対1でかつ $\mathfrak{B}=e^{\mathfrak{A}}$.

上のことより実正値対称行列に対して対数が定義される。

ここでSをWishart分布$W(I,n)$としたとき，$Y=\sqrt{\frac{n}{2}}\log S/n$の分布を考える。まずJacobianは，Jack[1]を応用して

(3.3) $$\left|\frac{\partial S}{\partial Y}\right| = (2n)^{p(p+1)/4}\,\mathrm{etr}\left[\sqrt{\tfrac{2}{n}}\,Y\right]\prod_{i>j}^{p} \frac{f(\lambda_i)-f(\lambda_j)}{\lambda_i-\lambda_j},$$

ただし $f(\lambda_i)=e^{\lambda_i}$ で $\lambda_i=\sqrt{\frac{2}{n}}\,\ell_i(Y)$.

ここでは，漸近展開に関心があるから (3.3) の後半を展開すると

$$(3.4)\quad \prod_{i>j}^{p}\frac{f(\lambda_i)-f(\lambda_j)}{\lambda_i-\lambda_j}=1+\frac{1}{2}(p-1)\sqrt{\frac{2}{n}}\operatorname{tr}Y+\frac{1}{12n}\{(3p^2-6p+2)(\operatorname{tr}Y)^2+p\operatorname{tr}Y^2\}+O(n^{-\frac{3}{2}}).$$

ゆえに $|e^A|=\operatorname{etr}A$ であることをつかうと，Y の"漸近"分布は，

$$(3.5)\quad C^*\cdot\operatorname{etr}\left[\frac{1}{2}(n-p+1)\sqrt{\frac{2}{n}}Y-\frac{n}{2}e^{\sqrt{\frac{2}{n}}Y}\right]\left[1+\frac{1}{2}(p-1)\sqrt{\frac{2}{n}}\operatorname{tr}Y+\frac{1}{12n}\{(3p^2-6p+2)(\operatorname{tr}Y)^2+p\operatorname{tr}Y^2\}+O(n^{-\frac{3}{2}})\right],$$

ただし

$$(3.6)\quad C^*=\left\{\prod_{\alpha=1}^{p}\Gamma\left[\frac{1}{2}(n+1-\alpha)\right]\right\}^{-1}\left(\frac{n}{2}\right)^{p(2n-p-1)/4}\pi^{-p(p-1)/4}.$$

補題3.2.

$p(p+1)/2\times 1$ ベクトル $(y_{11},y_{22},\cdots,y_{pp},y_{12},\cdots,y_{p-1,p})'$ は，平均 0 共分散行列 $\Sigma^*=(\sigma^*_{ij,k\ell})$ をもつ正規分布とする。$(i,j)=a$, $(k,\ell)=b$, $(m,n)=c$, $(g,r)=d$, $(s,t)=e$, $(u,v)=f$ とすると，

$$(3.7)\quad E\,y_ay_by_cy_d=\sigma_{a,b}\sigma_{c,d}+\sigma_{a,c}\sigma_{b,d}+\sigma_{a,d}\sigma_{b,c},$$

41

$$(3.8)\quad E y_a y_b y_c y_d y_e y_f = \sigma_{a,b}(\sigma_{c,d}\sigma_{e,f} + \sigma_{c,e}\sigma_{d,f} + \sigma_{c,f}\sigma_{d,e})$$
$$+ \sigma_{a,c}(\sigma_{b,d}\sigma_{e,f} + \sigma_{b,e}\sigma_{d,f} + \sigma_{b,f}\sigma_{d,e}) + \sigma_{a,d}(\sigma_{b,c}\sigma_{e,f} + \sigma_{b,e}\sigma_{c,f}$$
$$+ \sigma_{b,f}\sigma_{c,e}) + \sigma_{a,e}(\sigma_{b,c}\sigma_{d,f} + \sigma_{b,d}\sigma_{c,f} + \sigma_{b,f}\sigma_{c,d})$$
$$+ \sigma_{a,f}(\sigma_{b,c}\sigma_{d,e} + \sigma_{b,d}\sigma_{c,e} + \sigma_{b,e}\sigma_{c,d}).$$

補題３．３．

A，Cを$p\times p$行列，B，Dを$q\times q$行列とする。行列のクロネッカー積に対して，次がなりたつ。

$$(3.9)\quad (A+C)\otimes B = A\otimes B + C\otimes B,$$

$$(3.10)\quad (A\otimes B)(C\otimes D) = AC\otimes BD,$$

$$(3.11)\quad |A\otimes B| = |A|^q |B|^p.$$

補題３．４．

P_1，P_2を$P_1+P_2=I$かつ$P_1P_2=0$となる対称かつべき等行列とする。c_1，c_2（$c_1c_2\neq 0$）に対して

$$(3.12)\quad (c_1P_1 + c_2P_2)^{-1} = c_1^{-1}P_1 + c_2^{-1}P_2$$

４．漸近展開

T_1の特性関数は次であたえられる。

$$(4.1)\quad C_1(t) = c_{p,n}\int \mathrm{etr}[(it)T_1]\,|S|^{\frac{1}{2}(n-p-1)}\,\mathrm{etr}[-\tfrac{1}{2}S]\,dS.$$

T_1 を $Y=\sqrt{\frac{n}{2}}\log S/n$ で表わすと,

$$(4.2)\quad T_1 = \mathrm{tr}Y^2 + \sqrt{\tfrac{2}{n}}\,\mathrm{tr}Y^3 + \frac{7}{6n}\mathrm{tr}Y^4 + O(n^{-\frac{3}{2}}).$$

よって (3.5) を使って

$$(4.3)\quad C_1(t) = C^*\int \exp\Big[(it)\mathrm{tr}Y^2 + \sqrt{\tfrac{2}{n}}(it)\mathrm{tr}Y^3 + \frac{7}{6n}(it)\mathrm{tr}Y^4$$

$$+\tfrac{1}{2}(n-p+1)\sqrt{\tfrac{2}{n}}\,\mathrm{tr}Y - \frac{n}{2}\mathrm{tr}\,e^{\sqrt{\frac{2}{n}}Y}\Big]\Big\{1 + \tfrac{1}{2}(p-1)\sqrt{\tfrac{2}{n}}\,\mathrm{tr}Y$$

$$+\frac{1}{12n}\{(3p^2-6p+2)(\mathrm{tr}Y)^2 + p\,\mathrm{tr}Y^2\} + O(n^{-\frac{3}{2}})\Big\}\,dY.$$

また

$$(4.4)\quad e^{\sqrt{\frac{2}{n}}Y} = I + \sqrt{\tfrac{2}{n}}\,Y + \frac{1}{n}Y^2 + \frac{\sqrt{2}}{3n\sqrt{n}}Y^3 + \frac{1}{6n^2}Y^4 + O(n^{-\frac{5}{2}})$$

であるから

$$(4.5)\quad C_1(t) = C^*\cdot\exp[-\tfrac{np}{2}]\int \exp[-\tfrac{1}{2}(1-2it)\mathrm{tr}Y^2]\Big[1 + \sqrt{\tfrac{2}{n}}(it-\tfrac{1}{6})\mathrm{tr}Y^3$$

$$+\frac{1}{n}\Big\{-\frac{1}{12}(\mathrm{tr}Y)^2 + \frac{p}{12}\mathrm{tr}Y^2 + \frac{1}{12}(14it-1)\mathrm{tr}Y^4 + (it-\tfrac{1}{6})^2(\mathrm{tr}Y^3)^2$$

$$+ O(n^{-\frac{3}{2}})\Big]\,dY.$$

よってYを $p(p+1)/2$ 次元正規分布平均0共分散行列 $(\sigma_{ij,kl})$ をもつものとみなすことが出来る。ここで $\sigma_{ij,kl} = (1-2it)^{-1} \cdot (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})/2$. また $|(\sigma_{ij,kl})| = (1-2it)^{-f}\, 2^{-p(p-1)/2}$ であるから

$$(4.6)\quad C_1(t) = c\cdot(1-2it)^{-\frac{f}{2}} E\Big[1 + \sqrt{\tfrac{2}{n}}\,(it - \tfrac{1}{6})\,\mathrm{tr}Y^3 + \tfrac{1}{n}\Big\{-\tfrac{1}{12}(\mathrm{tr}Y)^2 + \tfrac{p}{12}\mathrm{tr}Y^2 + \tfrac{1}{12}(14it-1)\,\mathrm{tr}Y^4 + (it-\tfrac{1}{6})^2(\mathrm{tr}Y^3)^2\Big\} + O(n^{-\frac{3}{2}})\Big],$$

ただし $f = \frac{1}{2}p(p+1)$ であり

$$(4.7)\quad c = c^*(2\pi)^{\frac{1}{4}p(p+1)}\, 2^{-p(p-1)/4} \exp\Big[-\frac{pn}{2}\Big].$$

補題3.2より

$$(4.8)\quad \begin{aligned} &E(\mathrm{tr}Y)^2 = p(t)_1, \quad &&E\,\mathrm{tr}Y^2 = \tfrac{1}{2}p(p+1)(t)_1, \\ &E\,\mathrm{tr}Y^4 = \tfrac{p}{4}(2p^2+5p+5)(t)_2, \quad &&E(\mathrm{tr}Y^3)^2 = \tfrac{3}{4}p(4p^2+9p+7)(t)_3 \end{aligned}$$

ただし $(t)_\alpha = (1-2it)^{-\alpha}$.

また奇数次モーメントは、この場合0となるから、特性関数 $C_1(t)$ は次のようになる。

$$(4.9)\quad C_1(t) = (1-2it)^{-\frac{f}{2}}\Big[1 + \tfrac{1}{n}\Big\{\tfrac{p}{12}(4p^2+9p+7)(t)_3 - \tfrac{p}{8}(6p^2+13p+9)(t)_2 + \tfrac{p}{2}(p+1)^2(t)_1 - \tfrac{p}{24}(2p^2+3p-1)\Big\} + O(n^{-2})\Big].$$

上式を反転することによって次の定理を得る。

定理4.1. 仮説の下で

(4.10) $P_r(T_1 \leq x) = P_f + \frac{1}{n}\left\{\frac{p}{12}(4p^2+9p+7)P_{f+6} - \frac{p}{8}(6p^2+13p+9)\right.$

$\left.\cdot P_{f+4} + \frac{p}{2}(p+1)^2 P_{f+2} - \frac{p}{24}(2p^2+3p-1)P_f\right\} + O(n^{-2})$,

ただし $f=\frac{1}{2}p(p+1)$, $P_f = P_r(\chi_f^2 \leq x)$.

以下同じような考えによって次の結果を得る。

定理4.2. 仮説の下で

(4.11) $P_r(T_2 \leq x) = P_f + \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{12}(p^3+3p^2-8p-12-200p^{-1})P_{f+6}\right.$

$+\frac{1}{8}(-2p^3-5p^2+7p+12+420p^{-1})P_{f+4} + \frac{1}{4}(p^3+2p^2-p-2$

$\left.-216p^{-1})P_{f+2} + \frac{1}{24}(-2p^3-3p^2+p+436p^{-1})P_f\right\} + O(n^{-2})$,

ただし $f=\frac{1}{2}p(p+1)-1$.

定理4.3. 仮説の下で

(4.12) $P_r(T_3 \leq x) = P_f + \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{12}(p^3-3p\widehat{p}_2+2\widehat{p}_3)P_{f+6} + \frac{1}{8}(-2p^3+4p\widehat{p}_2\right.$

$-2\widehat{p}_3-p^2+\widehat{p}_2)P_{f+4} + \frac{1}{4}(p^3-p\widehat{p}_2+p^2-\widehat{p}_2)P_{f+2} + \frac{1}{24}(-2p^3$

$\left.+2\widehat{p}_3-3p^2+3\widehat{p}_2)P_f\right\} + O(n^{-2})$

ただし $\widehat{p}_\beta = \sum_{\alpha=1}^{g} p_\alpha^\beta$, $f=\frac{1}{2}(p^2-\widehat{p}_2)$.

定理４．４．仮説の下で

$$(4.13)\quad P_r(T_4 \le x) = P_f + \frac{1}{n}\Big[\frac{1}{12}\{\hat{\rho}\, p(4p^2+9p+7) - 3k^2 p(p+1)^2 - (3k-2)p(p^2+3p+4)\}P_{f+6} + \frac{1}{8}\{-\hat{\rho}\, p(6p^2+13p+9) + 4k^2 p(p+1)^2 + (2k-1)p(2p^2+5p+5)\}P_{f+4} + \frac{1}{4}(2\hat{\rho}-k^2-k)\cdot p(p+1)^2 P_{f+2} + \frac{1}{24}(1-\hat{\rho})p(2p^2+3p-1)P_f\Big] + O(n^{-2}),$$

ただし $\hat{\rho} = \sum_{\alpha=1}^{k} \rho_\alpha^{-1}$, $f = \frac{1}{2}(k-1)p(p+1)$, $\rho_\alpha = n_\alpha/n$.

参考文献

[1] Jack, H. (1964-65). Jacobians of transformations involving orthogonal matrices. Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 67 81-103.

[2] John, S. (1971). Some optimal multivariate tests. Biometrika 58 123-127.

[3] Nagao, H. (1970). Asymptotic expansions of some test criteria for homogeneity of variances and covariance matrices from normal poplations. J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I 34 153-247.

[4] Nagao, H. (1972). Non-null distributions of the likelihood ratio criteria for independence and equality of mean vectors and covariance matrices. To appear.

[5] Sugiura, N. (1969). Asymptotic expansions of the distributions of the likelihood ratio criteria for covariance matrix. Ann. Math. Statist. 40 2051-2063.

[6] Sugiura, N. (1971). Locally best invariant test for sphericity and the limiting distributions. Report at the meeting of the mathematical society of Japan.