数理解析研究所講究録
第 167 巻 1972 年 46-51

最尤推定量の一致性について.

和歌山大学 経済学部 松田忠之

§1. 序

最尤推定量(MLE)の一致性(strong consistency)を示すためには、尤度関数の局所的微分可能を仮定する場合と、微分可能性を仮定しないWald [1] の方法がある. ここではWaldによって与えられた条件とほとんど同じ位弱い条件の下で、MLEの一致性の収束程度を示す. 証明の方法は、Bahadur [2] による.

§2. 記号と仮定

$(X, \mathcal{A})$ を sample space とする. parameter space Θ は k 次元 Euclidean space E の部分集合とし、$\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ を parameter θ をもつ X 上の確率分布の族とする. さらに θ_0 を Θ の真の値とする.

ASSUMPTION I. $\{P_\theta : \theta \in \Theta\} \ll \mu$ (σ-f. measure)

この時. $\dfrac{dP_\theta}{d\mu} = f(x, \theta)$ と書く.

ASSUMPTION 2.　次の条件を満足する $A \in \mathcal{A}$ が存在する.

(1)　$P_{\theta_0}(A) = 0$

(2)　任意の $x \in X - A$, $\theta \in \Theta$, $\varepsilon > 0$ に対して、開部分集合 $G \subset \{t \in \Theta : |\theta - t| < \varepsilon\}$ が存在して、$f(x, \theta) - \varepsilon < f(x, t)$, $\forall t \in G$, が成立する.

ASSUMPTION 3.　次の条件を満足する $B_\theta \in \mathcal{A}$ が存在する.

(1)　$P_{\theta_0}(B_\theta) = 0$,

(2)　任意の $x \in X - B_\theta$ に対して、$f(x, t)$ は $t = \theta$ で上半連続.

E^* を E の一点コンパクト化とし、Θ の E^* における閉包を Θ^* で表わす.

ASSUMPTION 4.　次の条件を満足する $D \in \mathcal{A}$ が存在する.

(1)　$P_{\theta_0}(D) = 0$,

(2)　任意の $x \in X - D$ と任意の $t \in \Theta^* - \Theta$ に対して、$\lim_{\theta \to t, \theta \in \Theta} f(x, \theta)$ が存在する.

この時、$t \in \Theta^* - \Theta$ に対して

$$
\begin{aligned}
f(x, t) &= \lim_{\theta \to t, \theta \in \Theta} f(x, \theta), \quad x \in X - D, \\
&= 0, \quad x \in D
\end{aligned}
$$

と定義する．明らかに，$\int f(x,t)\,d\mu \leq 1$．

ASSUMPTION 5．　任意の $\theta \in \Theta^*$, $\theta \neq \theta_0$, に対して

$$P_{\theta_0}\{ f(x,\theta) \neq f(x,\theta_0) \} > 0.$$

$t \in \Theta^*$ に対して，$h(x,\theta_0,t) = \dfrac{f(x,t)}{f(x,\theta_0)}$ $(f(x,\theta_0) > 0)$; $= 0$ $(f(x,\theta_0) = 0)$ と定義すれば，ASSUMPTION 1, 2, 4 から Θ^* の任意の開部分集合 I に対して，$\sup_{t \in I} h(x,\theta_0,t)$ は $\mathcal{A}$ - meas. function となる．従って，

$$G(a:\theta_0,I) = \int \sup_{t \in I} h(x,\theta_0,t)^a f(x,\theta_0)\,d\mu, \quad 0 < a < 1,$$

と定義する．

ASSUMPTION 6．　任意の $\theta \in \Theta^*$, $\theta \neq \theta_0$, に対して，$G(a:\theta_0,I(\theta)) < \infty$ となる θ を含む Θ^* の開部分集合 $I(\theta)$ が存在する．ここで a, $0 < a < 1$, は θ に無関係な定数である．

§ 3．Theorem．

確率空間 $(X, \mathcal{A}, \{P_\theta : \theta \in \Theta\})$ の n 個の直積空間を $(X^n, \mathcal{A}^n, \{P_\theta^n\})$ で表わす．

定義．　任意の自然数 n に対して，X^n から Θ^* への関数 T_n が $\mathcal{A}^n$- meas. である時，関数列 $\{T_n : n = 1, 2, \cdots\cdots,\}$ を θ の estimate と呼ぶ．§ 2 の仮定の下で次の定理を示す．

定理．　$\{\bar{\theta}_n\}$ を次のような θ の estimate とします．

(1)　$$\prod_{i=1}^{n} h(x_i,\theta_0,\bar{\theta}_n) \geq C > 0, \quad P_{\theta_0}^n - a.e.$$

この時、任意の $\varepsilon > 0$ に対して次の不等式を満足するような g ($0 < g < 1$) と M (> 0) が存在します。

$$P_{\theta_0}^n (|\bar{\theta}_n - \theta_0| \geq \varepsilon) \leq M C^{-a} g^n, \quad \forall n,$$

（勿論、上の結果は $\{\bar{\theta}_n\}$ の一致性を含みます。）

§4. Lemmas.

$\theta \in \Theta^*$, $\theta \neq \theta_0$, に対して、$g(a; \theta_0, \theta) = \int h(x, \theta_0, \theta)^a f(x, \theta_0)\, d\mu$, $0 < a < 1$, と定義する。この時次の簡単な Lemmas が示される。

補題 1. ASSUMPTION 1.4 の下で

(1) $g(a; \theta_0, \theta) \leq 1$.

(2) $\lim_{a \to 0} g(a; \theta_0, \theta) = P_{\theta_0}\{ f(x, \theta) f(x, \theta_0) > 0 \}$.

証明 (1) は不等式、$y^a \leq 1 + a(y-1)$, $y \geq 0$, より従う。(2) は不等式、$h(x, \theta_0, \theta)^a f(x, \theta_0) \leq f(x, \theta) + f(x, \theta_0)$ と有界収束定理から示される。

補題 2. ASSUMPTION 1.4.5 の下で、$g(a; \theta_0, \theta) < 1$.

証明 かりに、$g(b; \theta_0, \theta) = 1$ となる b ($0 < b < 1$) と $\theta \in \Theta^*$ ($\theta \neq \theta_0$) が存在するとして矛盾を導く。ASSUMPTION 1.4. と有界収束定理より、全ての u, $0 < u < 1$, で

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} g(u; \theta_0, \theta) = \int_F \{\log h(x, \theta_0, \theta)\}^2 h(x, \theta_0, \theta)^u f(x, \theta_0)\, d\mu$$

$$F = \{ f(x, \theta) f(x, \theta_0) > 0 \}.$$

従って、$g(u:\theta_0,\theta)$ は u の凸関数となり、$g(u:\theta_0,\theta)\equiv 1$ である。故に、$\frac{\partial^2}{\partial u^2}g(u:\theta_0,\theta)\equiv 0$，となる。結局、

$$P_{\theta_0}(F)\leq P_{\theta_0}\{f(x,\theta)=f(x,\theta_0)\}$$

がいえる。ところが補題1より、$P_{\theta_0}\{f(x,\theta)=f(x,\theta_0)\}=1$ となりASSUMPTION 5に矛盾する。

補題3. ASSUMPTION 1〜6の下で、$G(a:\theta_0,J(\theta))<1$ となる θ を含む Θ^* の開部分集合 $J(\theta)$ が存在する。

証明 θ の countable base $\{I_n(\theta)\}$ を次のように決める。

$$I_n(\theta)=V_n(\theta)\cap\Theta^*$$

$$V_n(\theta)=\left\{t\in E:|\theta-t|<\frac{1}{n}\right\},\quad(\theta\neq\theta_\infty)$$

$$=\left\{t\in E:|t|>n\right\}\cup\{\theta_\infty\},\quad(\theta=\theta_\infty)$$

ここで、θ_∞ は additional point を表わす。この時、次の事が云える。(a) $I_n(\theta)\subset I(\theta)$, n : suff. large,

(b). $\lim_{n\to\infty}{}' \sup_{t\in I_n(\theta)} f(x,t)=f(x,\theta)$, P_{θ_0}-a.e. .

有界収束定理より、$\lim_{n\to\infty}{}' G(a:\theta_0,I_n(\theta))=g(a:\theta_0,\theta)$ となり補題2から補題3が成立する。

§5. Proof of theorem.

任意の $\varepsilon>0$ に対して、$K=\{\theta\in\Theta^*:|\theta-\theta_0|\geq\varepsilon\}$ とおく。K は Θ^* のコンパクト部分集合である。従って補題3から、有限個の開部分集合の列 $\{J(\theta_1),\cdots\cdots,J(\theta_M)\}$ が存在して、

(2) $$K \subset \bigcup_{j=1}^{M} J(\theta_j),$$

(3) $$g = \max_{1 \le j \le M} G(a : \theta_0, J(\theta_j)) < 1.$$

を満足する．もしも，$|\bar{\theta}_n - \theta_0| \geq \varepsilon$ ならば (1),(2) により

$$C^a \leq \max_{1 \le j \le M} \prod_{i=1}^{n} \sup \{ h(x_i, \theta_0, \theta)^a ; \theta \in J(\theta_j) \}, \quad P_{\theta_0}^n - a.e.$$

が成り立つ．故に，マルコフの不等式から，

$$\begin{aligned} P_{\theta_0}^n(|\bar{\theta}_n - \theta_0| \geq \varepsilon) &\leq \sum_{j=1}^{M} P_{\theta_0}^n \left(\prod_{i=1}^{n} \sup \{ h(x_i, \theta_0, \theta)^a ; \theta \in J(\theta_j) \} \geq C^a \right) \\ &\leq \sum_{j=1}^{M} C^{-a} G(a : \theta_0, J(\theta_j))^n \\ &\leq M C^{-a} g^n . \end{aligned}$$

となる．

最後に Wald が与えた仮定と我々の仮定との比較を行う．Wald は ASSUMPTION 5 で $\bar{\Theta}^* - \Theta$ の唯一の点として無限遠点 ∞ を考えて，そこで $f(x, \infty) = \lim_{\theta \to \infty} f(x, \theta) = 0$, $P_{\theta_0} - a.e.$ と仮定する．勿論 ASSUMPTION 4 はこの仮定の一つの拡張になっている．ASSUMPTION 6 は Wald の ASSUMPTION 2 よりもある意味で強い．すなわち，ある $\delta > 0$ に対して，$\int f(x, \theta_0)^{1+\delta} d\mu < \infty$ が成り立つなら ASSUMPTION 6 は ASSUMPTION 2 を含みます．

文献

[1] Wald, A.: Note on the consistency of the maximum likelihood estimate, Ann. Math. Statist. 20 (1949), 595-601.

[2] Bahadur, R. R.: On the asymptotic efficiency of tests and estimates, Sankhyā, 20 (1960), 229-252.