数理解析研究所講究録
第168巻 1972年 28-59

超函数の台と特異台
(佐藤予想と層 $C_{N|X}$)

上智大 理工 森本光生

§1で，余法球束 $S^*_N X$ を定義する．§2で，$S^*_N X$ 上に層 $\tilde{C} = C_{N|X}$ を定義する．§3で，層 $\tilde{C}$ のセクションは，$S^*_N X$ の "複素変数" に関して一意接続性をもつという予想をたてる．そして，この予想より，超函数の台と特異台に関する佐藤予想がみちびかれることを示す．今までに知られている超函数の台と特異台の相互依存性は，佐藤予想により説明されることになろう．

§1 余法球束 (conormal spherical bundles)

$$\begin{tikzcd} X & M \arrow[l, hook'] \\ Y \arrow[u, hook] & N \arrow[l, hook'] \arrow[u, hook] \end{tikzcd} \qquad (1)$$

上図のように実解析的多様体が4つ与えられているとしよう．(M, Y は X の部分多様体，N は M と Y の部分多様体．) 標準的単射に双対な写像は，次のように N 上の余接ベクトル

束（cotangent vector bundles）の間の完全列をひきおこす：

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr] & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
& T^*_N X \arrow[dr] & T^*_Y X|_N \arrow[d] & T^*_N M \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & T^*_M X|_N \arrow[r] & T^* X|_N \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & T^* M|_N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & T^*_N Y \arrow[r] & T^* Y|_N \arrow[r] \arrow[d] & T^* N \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & 0 \\
& & 0 & 0 & 0
\end{tikzcd}
\qquad (2)
$$

ここで $T^*_N M$ は

$$T^*_N M = \mathrm{Ker}\,(T^* M|_N \longrightarrow T^* N)$$

で定義されるN上のベクトル束で，N上の（Mに関する）余法ベクトル束（conormal vector bundle）と呼ぶ．$T^*_Y X$ $T^*_N X$，$T^*_M X$ も同様の意味をもつ．また，$|_N$ はN上への制限を表わす．

図式（2）の可換性より，次の可換図式（3）が定義できる．（3）の各行，各列は完全である：

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & T^*_M X|_N \cap T^*_Y X|_N \arrow[r] \arrow[d] & T^*_Y X|_N \arrow[r, "p"] \arrow[d] & T^*_N M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & T^*_M X|_N \arrow[r] \arrow[d, "q"'] & T^*_N X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & T^*_N M \arrow[r] & 0 \\
 & T^*_N Y \arrow[r, equal] \arrow[d] & T^*_N Y \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}
\qquad (3)
$$

$S^*_N M = (T^*_N M \setminus N)/\mathbb{R}^+$ などで，対応する球束(sphere bundle)を表わす．$S^*_N M$をN上の(Mに関する)余法球束(conormal sphere bundle)とよぶ．上の完全列(3)より，次の球束の間の関係(4)，(5)，(6)がでる．

$$
\begin{tikzcd}
S^*_M X|_N \cap S^*_Y X|_N \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & S^*_Y X|_N \arrow[d, hook] \\
S^*_M X|_N \arrow[r, hook] & S^*_N X
\end{tikzcd}
\qquad (4)
$$

$$
\begin{tikzcd}
S^*_Y X|_N \setminus (S^*_Y X|_N \cap S^*_M X|_N) \arrow[r, "p"] \arrow[d, hook] & S^*_N M \ (\mathrm{proj}) \arrow[d, equal] \\
S^*_N X \setminus S^*_M X|_N \arrow[r, "p"] & S^*_N M \ (\mathrm{proj})
\end{tikzcd}
\qquad (5)
$$

$$\begin{tikzcd} S^*_M X|_N \setminus (S^*_M X|_N \cap S^*_Y X|_N) \arrow[r, "q"] \arrow[d, hook] & S^*_N Y \ (\mathrm{proj}) \arrow[d, equal] \\ S^*_N X \setminus S^*_Y X|_N \arrow[r, "q"] & S^*_N Y \ (\mathrm{proj}) \end{tikzcd} \tag{6}$$

$\boxed{\text{仮定}}$ 以後，XはMの複素化，YはNの複素化，YはXの複素部分多様体であると仮定する．このとき，

$$\begin{aligned} T^*X|_M &\cong T^*M \oplus \sqrt{-1}\,T^*M, \\ T^*Y|_N &\cong T^*N \oplus \sqrt{-1}\,T^*N. \end{aligned} \tag{7}$$

したがって

$$\begin{aligned} T^*_M X &\cong \sqrt{-1}\,T^*M, \\ T^*_N Y &\cong \sqrt{-1}\,T^*N, \\ T^*_M X|_N \cap T^*_Y X|_N &\cong \sqrt{-1}\,T^*_N M \end{aligned} \tag{8}$$

なる同型が存在する

さて，

$$\begin{aligned} \mathrm{id} &: T^*M \xrightarrow{m} T^*X|_M \longrightarrow T^*M \\ \mathrm{id} &: T^*N \xrightarrow{m} T^*Y|_N \longrightarrow T^*N \end{aligned} \tag{9}$$

と id（恒等写像）を分解する写像mが存在するから，

$$\begin{aligned} \mathrm{id} &: T^*_N M \xrightarrow{m} T^*_N X \longrightarrow T^*_N M \\ \mathrm{id} &: T^*_N M \xrightarrow{m} T^*_Y X|_N \longrightarrow T^*_N M \end{aligned} \tag{10}$$

なる写像mが誘導できる．故に図式（3）の各行はsplitする：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T^*_M X|_N \cap T^*_Y X|_N \arrow[r] \arrow[d] & T^*_Y X|_N \arrow[r, "p"'] \arrow[d] & T^*_N M \arrow[r] \arrow[l, bend right, hook', "m"'] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & T^*_M X|_N \arrow[r] & T^*_N X \arrow[r, "p"'] & T^*_N M \arrow[r] \arrow[l, bend right, hook', "m"'] & 0
\end{tikzcd} \tag{11}$$

また，次の球束の間の写像も定義できる：

$$\begin{tikzcd}
S^*_Y X|_N \arrow[d, hook] & S^*_N M \arrow[l, hook', "m"'] \arrow[d, equal] \\
S^*_N X & S^*_N M \arrow[l, hook', "m"']
\end{tikzcd} \tag{12}$$

（以下で，写像 m により $S^*_N M$ を $S^*_Y X|_N$ の部分集合とみなすことがある．）

$$\begin{tikzcd}
S^*_Y X|_N \setminus m(S^*_N M) \arrow[r, "n"] \arrow[d, hook] & S^*_M X|_N \cap S^*_Y X|_N \ (\mathrm{proj}) \arrow[d, hook] \\
S^*_N X \setminus m(S^*_N M) \arrow[r, "n"] & S^*_M X|_N \quad (\mathrm{proj})
\end{tikzcd} \tag{13}$$

<u>注意</u>　(8) の同型より，spherical bundles にうつると次の同型を得る：

$$\begin{aligned}
S^*_M X &\cong \sqrt{-1}\, S^*M \\
S^*_N Y &\cong \sqrt{-1}\, S^*N \\
S^*_M X|_N \cap S^*_Y X|_N &\cong \sqrt{-1}\, S^*_N M
\end{aligned} \tag{8'}$$

(6) の第1行の写像は，次のように簡単に表わされる：

$$\sqrt{-1}\, S^*M \setminus \sqrt{-1}\, S^*_N M \xrightarrow{\ \mathfrak{z}\ } \sqrt{-1}\, S^*N.$$

<u>注意</u>　余接ベクトル束 T^*M etc. のかわりに，接ベクト

ル束 TM を考えると，法ベクトル束 T_NM が

$$T_NM = \mathrm{Coker}(TN \longrightarrow TM)$$

で定義される．T_NM と T_N^*M は互に双対的である．T_NM に対応する球束を S_NM と書くことにする．余法球束の間の関係に双対な関係が，法球束に対しては成立する．

<u>例1</u>　$M = \mathbb{R}$．　　$N = (0)$

　　　　$X = \mathbb{C}$．　　$Y = (0)$．

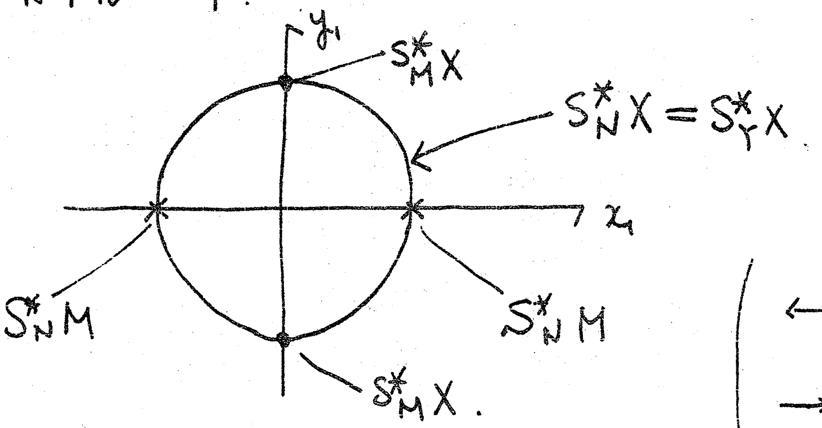
$$S_N^*X|_0 = \{(x_1, y_1) ; x_1^2 + y_1^2 = 1\}$$

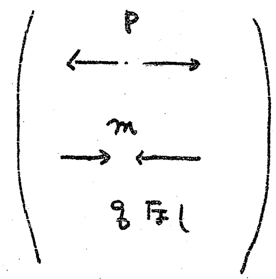
$$S_Y^*X|_0 = \{(x_1, y_1) ; x_1^2 + y_1^2 = 1\}$$

$$S_M^*X|_0 = \{(x_1, y_1) ; x_1 = 0, \ y_1 = \pm 1\}$$

× $S_N^*M|_0 = \{x_1 ; x_1 = \pm 1\} \underset{m}{\cong} \{(x_1, y_1) ; y_1 = 0, \ x_1 = \pm 1\}$

△ $S_N^*Y|_0 = \phi$．





例2　$M=\mathbb{R}^2$,　$N=\mathbb{R}=\{(x_1,x_2);\ x_1=0\}$

$X=\mathbb{C}^2$,　$Y=\mathbb{C}=\{(z_1,z_2);\ z_1=0\}$

$N\ni 0=(0,0)$ 上のファイバーを書く. $T^*X|_0$ を $\mathbb{C}^2$ と同一視する:

$$S^*_N X|_0 = \{(x_1,y_1,y_2);\ x_1^2+y_1^2+y_2^2=1\}$$

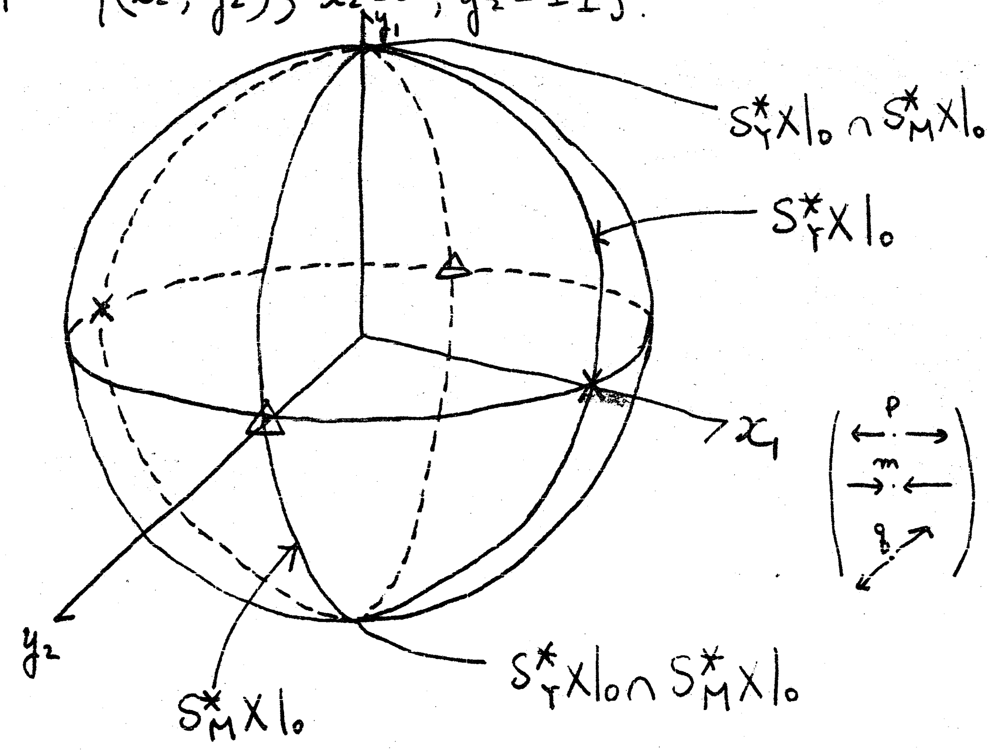
$$S^*_Y X|_0 = \{(x_1,y_1,y_2);\ y_2=0,\ x_1^2+y_1^2=1\}$$

$$S^*_M X|_0 = \{(x_1,y_1,y_2);\ x_1=0,\ y_1^2+y_2^2=1\}$$

$$S^*_Y X|_0 \cap S^*_M X|_0 = \{(x_1,y_1,y_2);\ x_1=y_2=0,\ y_1=\pm1\}$$

× $S^*_N M = \{(x_1,x_2);\ x_2=0,\ x_1=\pm1\} \underset{m}{\cong} \{(x_1,y_1,y_2);\ y_1=y_2=0,\ x_1=\pm1\}$

△ $S^*_N Y = \{(x_2,y_2);\ x_2=0,\ y_2=\pm1\}$.



例3 $M=\mathbb{R}^2$, $N=(0)$

$X=\mathbb{C}^2$, $Y=(0)$

$S^*_N X|_0=\{(x_1,x_2,y_1,y_2)\,;\,x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2=1\}$

$S^*_Y X|_0=$ 同上

$S^*_M X|_0=\{(x_1,x_2,y_1,y_2)\,;\,x_1=x_2=0,\ y_1^2+y_2^2=1\}$

$S^*_Y X|_0 \cap S^*_M X|_0 = S^*_M X|_0$.

$p: S^*_N X|_0 \setminus S^*_M X|_0 \longrightarrow S^*_N M|_0$ は

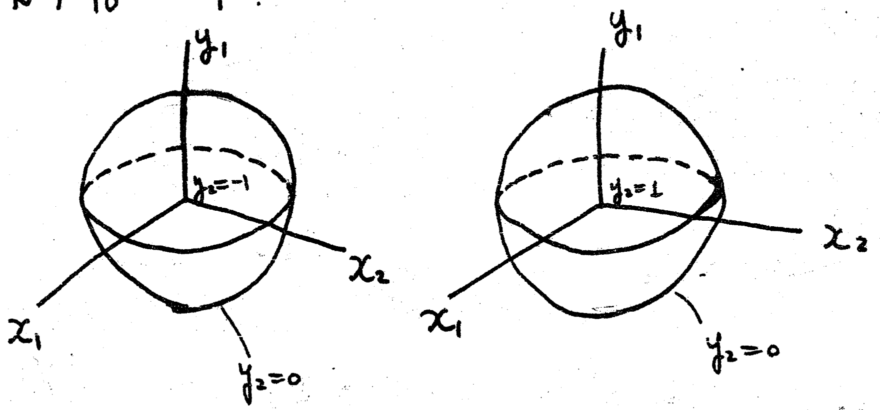
$$(x_1,y_1,x_2,y_2)\longmapsto\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}},\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right)$$

でちえられる.

× $S^*_N M|_0=\{(x_1,x_2)\,;\,x_1^2+x_2^2=1\}$

$\cong\{(x_1,x_2,y_1,y_2)\,;\,y_1=y_2=0,\ x_1^2+x_2^2=1\}$

△ $S^*_N Y|_0=\phi$.



$S^*_N X|_0$ は二つのボールを表面にそってはりあわせて得られる. $S^*_M X|_0$ は二つの球の y_1軸を両端どおしつなぎ合わせて得られる. $S^*_N M|_0$ は赤道である. また写像pは, 各点を

(x_1, x_2)平面に射影して，その点と原点を結ぶ半直線と赤道との交点を求めることである．

<u>例4</u> $M = \mathbb{R}^3,\ N = \mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2, x_3);\ x_1 = 0\}$

$X = \mathbb{C}^3,\ Y = \mathbb{C}^2 = \{(z_1, z_2, z_3);\ z_1 = 0\}$

$$S^*_N X|_0 = \{(x_1, y_1, y_2, y_3);\ x_1^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1\}$$

$$S^*_Y X|_0 = \{(x_1, y_1, y_2, y_3);\ y_2 = y_3 = 0,\ x_1^2 + y_1^2 = 1\}$$

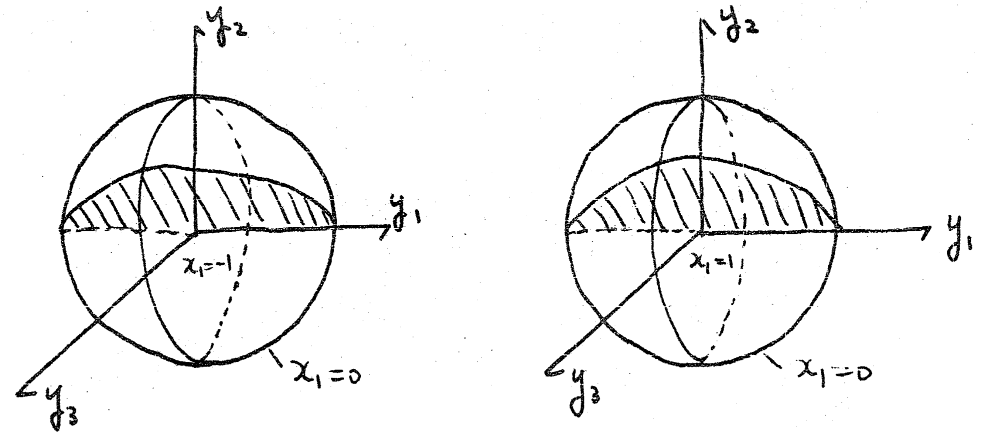
$$S^*_M X|_0 = \{(x_1, y_1, y_2, y_3);\ x_1 = 0,\ y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1\}$$

$$S^*_Y X|_0 \cap S^*_M X|_0 = \{(x_1, y_1, y_2, y_3);\ x_1 = y_2 = y_3 = 0,\ y_1 = \pm 1\}$$

× $S^*_N M|_0 = \{(x_1, x_2, x_3);\ x_2 = x_3 = 0,\ x_1 = \pm 1\}$

$$\underset{m}{\cong} \{(x_1, y_1, y_2, y_3);\ y_1 = y_2 = y_3 = 0,\ x_1 = \pm 1\}$$

△ $S^*_N Y|_0 = \{(x_2, y_2, x_3, y_3);\ x_2 = x_3 = 0,\ y_2^2 + y_3^2 = 1\}$



$S^*_N X|_0$ は二つの球を球面ではり合わせたもの．$S^*_Y X|_0$ は二つの y_1 軸（各球内にある線分）をつなぎ合わせて作った円周．$S^*_M X|_0$ は $x_1=0$ の球面．$S^*_N M|_0$ は二つの球の中心．$S^*_N Y$ は図にある大円と同型．

写像 p は左の球内の点を左の中心に，右の球内の点を右の中心にうつす写像．写像 q は 点を (y_2, y_3)-平面に射影し，その点を通る原点を端点とする半直線と円周の交点を求めることである．q のファイバーは，斜線をひいた二つの半円（この弧は同一視しているから実は閉円板である）．写像 r はある点に，その点を通る原点よりの半直線と球面 $x_1=0$ との交点を対応させること．

§2 層 $\tilde{C}=C_{N|X}$ の構成．

$S^*_M X$ 上に，層 C が構成され，それの助けにより，超函数の特異性を分解して調べることができた．我々は，$S^*_N X$ 上にある層 $\tilde{C}$ を作り，それを用いることにより，台が N に集中している超函数の構造を調べることができることを示したい．台が，N によって区切られる閉集合に含まれるような超函数の構造も，$\tilde{C}$ の助けで理解できるであろう．この $S^*_N X$ 上の層 $\tilde{C}$ は，柏原正樹により既に構成されたが，筆者の知るかぎり彼の結果は未発表である．ここにその構成法の概略を示す．これは "数学のあゆみ" 所載の佐藤-柏原の論文をヒントに考えられたものである．（［3］）

X, M, Y, N を 図（1）の如きものとし，p. 4 の仮

定のもとで考える. $\tilde{X}_N$で, XのNに沿っての spherical blowing up をあらわす:

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} = \tilde{X}_N = (X \setminus N) \sqcup S_N X \arrow[d, "\tau = \tau_N"'] & S_N X \arrow[l, hook'] \arrow[d] \\ X & N \arrow[l, hook'] \end{tikzcd} \tag{14}$$

$\tilde{X}_N$, τ_N などを, $\tilde{X}$, τ などと略記しよう.

<u>定義</u> $\tilde{X}$上の層$\tilde{\mathcal{O}}_N$を次のように定める:

$$\tilde{\mathcal{O}}_N = \tilde{\varepsilon}_*(\tilde{\varepsilon}^{-1}\tau^{-1}\mathcal{O}) = \tilde{\varepsilon}_*\varepsilon^{-1}\mathcal{O},$$

また, S_NX上の層$\tilde{\mathcal{A}}_N$を次のように定める:

$$\tilde{\mathcal{A}}_N = \tilde{\mathcal{O}}_N|_{S_NX}.$$

但し, $\mathcal{O}$はX上の正則函数芽の層, ε, $\tilde{\varepsilon}$は下図の写像である:

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[d, "\tau"'] & \tilde{X} \setminus S_N X \arrow[l, hook', "\tilde{\varepsilon}"'] \arrow[d, "\wr"] \\ X & X \setminus N \arrow[l, hook', "\varepsilon"'] \end{tikzcd}$$

<u>命題</u>(2.1) $\tilde{X}$の層で$\tilde{\mathcal{O}}$に関して, $\tilde{X}$の部分集合S_NXは純余次元1である.

<u>証明</u> $d = \operatorname{codim} N$とする. 話は局所的であるから, $N = \mathbb{R}^{n-d}$, $X = \mathbb{C}^n$とし原点の近傍で考えればよい. 定義より, 次式が成立する.

$$\mathcal{D}ist^{k}(S_N X\,;\tau^{-1}\mathcal{O})\big|_{(x',P)}$$
$$=\lim_{\substack{\longrightarrow\\ \tilde{U}\downarrow(x',P)}}\mathrm{ind}\ H^{k}_{S_N X\cap\tilde{U}}(\tilde{U}\,;\tau^{-1}\mathcal{O}),\qquad (15)$$

ここで，$\tilde{U}$ は$\tilde{X}$における $(x', P)\in S_N X$ の近傍を動く．
次のコホモロジーの長い完全列を考えよう：

$$\cdots\longrightarrow H^{k}_{\tilde{U}\cap S_N X}(\tilde{U}\,;\tau^{-1}\mathcal{O})\longrightarrow H^{k}(\tilde{U}\,;\tau^{-1}\mathcal{O})$$
$$\longrightarrow H^{k}(\tilde{U}\smallsetminus S_N X\,;\tau^{-1}\mathcal{O})\longrightarrow\cdots(16)$$

第2項は

$$\lim_{\tilde{U}\downarrow(x',P)}\mathrm{ind}\ H^{k}(\tilde{U}\,;\tau^{-1}\mathcal{O})$$
$$=\begin{cases}(\tau^{-1}\mathcal{O})_{(x',P)}=\mathcal{O}_{x'} & k=0\\ 0 & k\neq 0\end{cases}$$

また，$\mathbb{C}^n$ の凸領域は正則領域であるから，$\tilde{U}\smallsetminus S_N X$ が正則領域となるような$\tilde{U}$が (x', P)の基本近傍系をなす．故に (16) で

$$\lim\mathrm{ind}\,(\text{第3項})=0\qquad k\neq 0$$

を得る．従って (16) で lim ind をとることにより，完全列

$$0\to\mathcal{D}ist^{0}(S_N X;\tau^{-1}\mathcal{O})\to\tau^{-1}\mathcal{O}\to\tilde{\mathcal{O}}\to\mathcal{D}ist^{1}(S_N X,\tau^{-1}\mathcal{O})$$
$$\longrightarrow 0$$

および，

$$\mathcal{D}ist^{k}(S_N X\,;\tau^{-1}\mathcal{O})=0 \qquad k>1$$

を得る．一方，解析接続の一意性より．

$$\tau^{-1}\mathcal{O} \longrightarrow \tilde{\mathcal{O}} \tag{17}$$

は単射的である．故に．

$$\mathcal{D}ist^{0}(S_N X\,;\tau^{-1}\mathcal{O})=0$$

も得られた．（証明おわり）

<u>定義</u>

$$\mathcal{Q}=\mathcal{D}ist^{1}(S_N X\,;\tau^{-1}\mathcal{O})$$

とおく．$\mathcal{Q}$ は $S_N X$ に台をもつ $\tilde{X}$ 上の sheaf であるから，必要に応じて，$S_N X$ 上の sheaf と考えることがある．

系　次の系列は完全である：

$$0\longrightarrow\tau^{-1}\mathcal{O}\longrightarrow\tilde{\mathcal{O}}\longrightarrow\mathcal{Q}\longrightarrow 0 \qquad (\tilde{X}\text{上})$$

$$0\longrightarrow\tau^{-1}\mathcal{A}\longrightarrow\tilde{\mathcal{A}}\longrightarrow\mathcal{Q}\longrightarrow 0 \qquad (S_N X\text{上})$$

さて，次の3つ組に対する長い完全列を考えよう：

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{X}\setminus S_N X & \hookrightarrow & \tilde{X} & \xrightarrow{\tau} & X \\ & & & & \vdots \\ & & & & \mathcal{O} \end{array} \tag{18}$$

$$\longrightarrow H^{k}(X\leftarrow\tilde{X}\,;\mathcal{O})\longrightarrow H^{k}(X\leftarrow\tilde{X}\setminus S_N X\,;\mathcal{O})$$
$$\longrightarrow H^{k}(\tilde{X}\leftarrow\tilde{X}\setminus S_N X\,;\tau^{-1}\mathcal{O})\longrightarrow \tag{19}$$

これの第2項は，次のようになる：

$$H^k(X \longleftarrow X \setminus N;\, \mathcal{O}) = \begin{cases} \mathcal{B}_M[N], & k = n \\ 0, & \text{それ以外}. \end{cases}$$

ここで，

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_M[N] &= \{N \text{ に台をもつ } M \text{ 上の hyperfunctions}\} \\ &= H^n_N(X;\, \mathcal{O}) \end{aligned}$$

である．（18）の第3項は純余次元性より次のようになる：

$$H^k(\tilde{X} \longleftarrow \tilde{X} \setminus S_N X;\, \tau^{-1}\mathcal{O}) = H^{k-1}(S_N X;\, \mathcal{O}_{z}).$$

さて，$\tau : \tilde{X} \longrightarrow X$ なる写像は proper で，そのファイバー $\tau^{-1}(x)$ は，$x \in N$ のときは S^{d+n-1}（$d+n-1$ 次元球面）に同相で，$x \in X \setminus N$ のときは1点である．故に，相原による位相的考察により，

$$\begin{aligned} \mathcal{D}ist^k_\tau(\mathcal{O})_x &= H^n(\{x\} \longleftarrow \tau^{-1}(x);\, \mathcal{O}_x) \\ &= \begin{cases} \mathcal{O}_x & k = n+d,\ x \in N. \\ 0 & k \neq n+d \text{ or } x \notin N. \end{cases} \end{aligned}$$

つまり，

$$\mathcal{D}ist^k_\tau(\mathcal{O})|_N = \begin{cases} \mathcal{A}_M|_N & k = n+d \\ 0 & k \neq n+d \end{cases}$$

となる．したがって，

$$H^k(X \leftarrow \tilde{X};\, \mathcal{O}) = H^{k-n-d}(N;\, \mathcal{A}_M) = \begin{cases} \mathcal{A}_M(N) & k = n+d \\ 0 & k \neq n+d \end{cases} \tag{20}$$

生ら

となる．一方，自然な写像 $\mathcal{A}(M)\longrightarrow\mathcal{B}(M)$ は単射であるから，$\operatorname{codim}N=0$（すなわち，$N=M$）の時は，良く知られた完全列

$$0\to\mathcal{A}(M)\longrightarrow\mathcal{B}(M)\to H^{n-1}(S_MX;\mathcal{O}_M)\to 0$$

を得る．（佐藤－柏原の論文の式（2.12））．（[3]）

$\operatorname{codim}N\geq 1$ の場合は，次の定理で与えられる．

<u>定理</u>（2-2）

1) $\operatorname{codim}N=1$ の場合．次の系列は完全である：

$$0\to\mathcal{B}_M[N]\to H^{n-1}(S_NX;\mathcal{O}_N)\to\mathcal{A}_M(N)\to 0 \tag{21}$$

2) $\operatorname{codim}N\geq 2$ の場合，次の２つの系列は完全である：

$$\begin{aligned}&0\to\mathcal{B}_M[N]\to H^{n-1}(S_NX;\mathcal{O}_N)\to 0\\ &0\to H^{n+d-2}(S_NX;\mathcal{O}_N)\longrightarrow\mathcal{A}_M(N)\to 0\end{aligned} \tag{22}$$

<u>系</u>

$$\begin{tikzcd} S_NX \arrow[d, "\tau"'] & \\ N \arrow[r, hook, "\iota"] & M \end{tikzcd}$$

と写像に名前を付けると，完全列（21）および（22）を sheaf 化して得られる完全列は次の通り．

1) $\operatorname{codim}N=1$ の場合，次は完全：

$$0\to\mathcal{D}ist^0(N,\mathcal{B}_M)\to R^{n-1}\tau_*\mathcal{O}_N\to\iota^{-1}\mathcal{A}_M\to 0 \tag{21'}$$

2) codim $N \geq 2$ の場合, 次は完全:

$$0 \to \mathcal{D}ist^0(N, \mathcal{B}_M) \to R^{n-1}\tau_* \mathcal{O}_N \to 0$$
$$0 \to R^{n+d-2}\tau_* (\mathcal{O}_N) \to \iota^{-1} \mathcal{A}_M \to 0 \qquad (22')$$

注意.

$$R^k \tau_* \mathcal{O}_N = 0 \qquad k \neq n-1,\ n+d-2.$$

さて, 次の"ダイヤモンド"を考えよう:

$$\begin{tikzcd} & D_N X \arrow[dl, "\pi_N"'] \arrow[dr, "\tau_N"] & \\ S_N X \arrow[dr, "\tau_N"'] & & S^*_N X \arrow[dl, "\pi_N"] \\ & N & \end{tikzcd} \qquad (23)$$

但し,

$$D_N X = \{(x, P, Q) \in S_N X \times_N S^*_N X \ ; \ \langle P . Q \rangle_x \geq 0\}$$

と定義する. ここで, $\langle \cdot , \cdot \rangle_x$ は $(T_N X)_x$ と $(T^*_N X)_x$ の自然な内積である. P, Q は mod $\mathbb{R}^+$ でベクトルより定まるから, その内積の正, 負, ゼロは確定した意味をもつ. また,

$$\pi_N : D_N X \to S_N X$$

および

44

$$\tau_N : D_N X \longrightarrow S_N^* X$$

は共にproperで，そのファイバーは $(n+d-1)$ 次元の閉半球で可縮である．

（以下，下つきのNは省略する．）

<u>定理</u>（2.3）

$\pi^{-1}\mathcal{O}_Z$ に関し，

$$\tau : D_N X \to S_N^* X$$

なる写像は，純 $(n-1)$ 次元的である．

<u>証明</u> 問題は局所的であるから，

$$M = \mathbb{R}^n, \quad X = \mathbb{C}^n$$

$$N = \mathbb{R}^{n-d} = \{ x \in \mathbb{R}^n ; x_1 = \cdots = x_d = 0 \}$$

として，原点0の近傍で考えればよい．

$T^*X|_0 \cong \{ (\zeta_1, \cdots, \zeta_n) ; \zeta_j \in \mathbb{C} \}$ とみなす．

$T_N^* X|_0 \cong \{ (\zeta_1, \cdots, \zeta_d, \eta_{d+1}, \cdots, \eta_n) ; \zeta_j = \xi_j + i\eta_j \in \mathbb{C}, \eta_k \in \mathbb{R} \}$

とみなせるから，

$$S_N^* X|_0 \cong \{ |\zeta_1|^2 + \cdots + |\zeta_d|^2 + \eta_{d+1}^2 + \cdots + \eta_n^2 = 1 \}$$

となる．

$T_N X$，$S_N X$ についても同様に，

$T_N X|_0 = \{ (z_1, \cdots, z_d, y_{d+1}, \cdots, y_n) ; z_j \in \mathbb{C}, y_k \in \mathbb{R} \}$

$S_N X|_0 = \{ |z_1|^2 + \cdots + |z_d|^2 + y_{d+1}^2 + \cdots + y_n^2 = 1 \}$

とみなせる．内積 $\langle \ , \ \rangle_0$ は，

$\langle (z_1, z', y''), (\zeta_1, \zeta', \eta'') \rangle_0$
$= z_1\bar{\zeta}_1 + z_2\bar{\zeta}_2 + \cdots + z_d\bar{\zeta}_d + y_{d+1}\eta_{d+1} + \cdots + y_n\eta_n$

で与えられる．但し，

$$z' = (z_2, \cdots, z_d), \quad y'' = (y_{d+1}, \cdots, y_n)$$
$$\zeta' = (\zeta_2, \cdots, \zeta_d), \quad \eta'' = (\eta_{d+1}, \cdots, \eta_n)$$

とした．

$d=0$ の時は，佐藤－柏原によって議論されているから，$d \geqq 1$ と仮定する．この場合にも，佐藤－柏原の議論が平行的に成立することを以下で示す．

今，S_N^*X の点は（原点 0 の近傍で）$(x'', (z_1, z', iy'')\infty)$ で与えられる．$P \in S_N^*X$ として，

$$P = (0, (1, 0, 0)\infty)$$

に対して，

$$R^k\tau_* \pi^{-1} \mathcal{O}_N \Big|_P = 0 \quad \text{for } k \neq n-1$$

を証明すれば証明はおわる．

今，定義より，

$$R^k\tau_* \pi^{-1} \mathcal{O} \Big|_P = H^k(\tau^{-1}(P); \pi^{-1}\mathcal{O})$$
$$= H^k(\pi\tau^{-1}(P); \mathcal{O}) \qquad \text{(i)}$$

である．ここで

$$\pi\tau^{-1}(P) = \{(0, (z_1, z', y'')0) ; x_1 = \mathrm{Re}\, z_1 \geqq 0\}$$

となることに注意せよ．

さて，$\tilde{X}$ における $\pi\tau^{-1}(P)$ の基本近傍系として，次のような $\tilde{D}_\varepsilon$ をとる．$(\varepsilon>0)$

$$\tilde{D}_\varepsilon = \{\tilde{z} = x'' + z_1 + z' + iy'' ;\ x_1 + \varepsilon\sqrt{y_1^2+|z'|^2+|y''|^2} > 0\}$$

ここで，

$$|z'|^2 = |z_2|^2 + \cdots + |z_d|^2$$

$$|y''|^2 = y_{d+1}^2 + \cdots + y_n^2$$

とした．また $\{\quad\}$ の中の条件は

$\tilde{z} = z = x'' + z_1 + z' + iy'' \in \hat{X} \setminus S_N X = X \setminus N$

（すなわち，$z' + iy'' \neq 0$）ならば，上の通り，

$\tilde{z} = x'' + (z_1 + z' + iy'')0 \in S_N X$ ならば，

$|x_j''| < \varepsilon,\ j = d+1, \cdots, n,\ x_1 + \varepsilon\sqrt{y_1^2+|z'|^2+|y''|^2} > 0$

を意味するものとする．

$$\begin{aligned} D_\varepsilon &= \tilde{D} \setminus S_N X \\ &= \{z = z_1 + z' + z'' ;\ |z_j| < 0 \quad \forall j = 1, \cdots, n, \\ &\qquad\qquad x_1 + \varepsilon\sqrt{y_1^2+|z'|^2+|y''|^2} > 0\} \end{aligned}$$

となる．

（i）の計算を続けよう：

$$\begin{aligned} H^k(\pi\tau^{-1}(P); \mathcal{O}) &= \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \varepsilon}} \text{ind}\, H^k(\tilde{D}_\varepsilon; \mathcal{O}) \\ &= \lim_{\varepsilon} \text{ind}\, H^{k+1}_{S_N X \cap \hat{D}_\varepsilon}(\tilde{D}_\varepsilon; \tau^{-1}\mathcal{O}) \end{aligned}$$

であるから，次の（ii）がいえれば，定理は証明されたことになる．

$$\operatorname*{lim\,ind}_{\varepsilon} H^k_{S_N X \cap \tilde{D}_\varepsilon}(\tilde{D}_\varepsilon ; \tau^{-1}\mathcal{O}) = 0 \quad \text{for } k \neq n \qquad \text{(ii)}$$

さて，次の完全列を考えよう：

$$\longrightarrow H^{k-1}(D_\varepsilon ; \mathcal{O}) \longrightarrow H^k_{S_N X \cap \tilde{D}_\varepsilon}(\tilde{D}_\varepsilon ; \tau^{-1}\mathcal{O}) \longrightarrow H^k(\tilde{D}_\varepsilon ; \tau^{-1}\mathcal{O}) \longrightarrow \cdots$$

$\pi\tau^{-1}(P)$ は可縮であるから，この完全列の第3項で，$\operatorname*{lim\,ind}_{\varepsilon}$ をとると次のようになる：

$$\operatorname*{lim\,ind}_{\varepsilon} H^k(\tilde{D}_\varepsilon ; \tau^{-1}\mathcal{O}) = H^k(\pi\tau^{-1}(P) ; \tau^{-1}\mathcal{O})$$

$$= H^k(\pi\tau^{-1}(P) ; \mathcal{O}_0) = \begin{cases} \mathcal{O}_0 & \text{for } k = 0 \\ 0 & \text{for } k \neq 0. \end{cases}$$

さらに，解析接続の一意性より

$$\mathcal{O}_0 \longrightarrow \operatorname*{lim\,ind}_{\varepsilon} H^0(D_\varepsilon ; \mathcal{O})$$

は単射である．したがって，

$$\operatorname*{lim\,ind}_{\varepsilon} H^0_{S_N X \cap \tilde{D}_\varepsilon}(\tilde{D}_\varepsilon ; \tau^{-1}\mathcal{O}) = 0$$

である．故に，次の（iii）を示しさえすればよい（ここでは $n > 1$ と仮定している．$n = 1$ の時は簡単にできる．）

$$\operatorname*{lim\,ind}_{\varepsilon} H^k(D_\varepsilon ; \mathcal{O}) = \begin{cases} \mathcal{O}_0 & \text{for } k = 0 \\ 0 & \text{for } k \neq 0, n-1 \end{cases} \qquad \text{(iii)}$$

48

$$\Gamma_\varepsilon = \{ z = z_1 + z' + z'' ;\ x_1 + \varepsilon\sqrt{x_1^2 + |z'|^2 + |y''|^2} \leq \varepsilon \}$$

とおこう. また $\{U_m\}$ を 0 の X における基本近傍系とする.

明らかに,

$$\varinjlim_{\varepsilon} H^k(D_\varepsilon ; \mathcal{O})$$
$$= \varinjlim_{\varepsilon} \varinjlim_{m} H^k(U_m - \Gamma_\varepsilon ; \mathcal{O})$$

が成立する. さて, 次の完全列を考えよう.

$$\to H^k_{\Gamma_\varepsilon}(U_m ; \mathcal{O}) \to H^k(U_m ; \mathcal{O}) \to H^k(U_m - \Gamma_\varepsilon ; \mathcal{O})$$
$$\to \cdots \qquad (✡)$$

これの第2項は, 次のように計算される.

$$\varinjlim_{m} H^k(U_m ; \mathcal{O}) = \begin{cases} \mathcal{O}_0 & \text{for } k = 0 \\ 0 & \text{for } k \neq 0. \end{cases}$$

また第1項は

$$\varinjlim_{m} H^k_{\Gamma_\varepsilon}(U_m ; \mathcal{O}) = \mathcal{D}ist^k(\Gamma_\varepsilon ; \mathcal{O})_0 .$$

であり, これは $k \neq n$ のとき次に引用する柏原の定理によりゼロに等しい。

<u>定理</u>(柏原)

Γ を $\mathbb{C}^n$ の原点を頂点とする閉じた凸錐とする。さらに, Γ がどんな $\mathbb{C}$-linear subspace も含まないならば

$$\mathcal{D}ist^k(\Gamma ; \mathcal{O})_0 = 0 \qquad \text{for } k \neq n.$$

(この定理は1969年に既に証明されているが未発表である.)

したがって $n > 1$ の仮定のもとで, (✡) の第3項は

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ m}} \mathrm{ind}\, H^k(U_m - \Gamma_\varepsilon ; \mathcal{O}) = \begin{cases} \mathcal{O}_0 & \text{for } k=0 \\ 0 & \text{for } k \neq 0,\ n-1. \end{cases}$$

と計算される．故に(iii)が示せた．これで定理(2.3)が，柏原の定理よりみちびかれた。 (q.e.d.)

<u>定義</u> $S^*_N X$ 上の sheaf $\tilde{C} = C_{N|X}$ を

$$\tilde{C} \equiv C_{N|X} = R^{n-1}\tau_*(\pi^{-1}\mathcal{O}_X)$$

と定義する．

さて，$\pi^{-1}\mathcal{O}_X$ に関して $\pi : D_N X \longrightarrow S_N X$, $\tau : D_N X \longrightarrow S^*_N X$ なる二つの写像がおのおの純0次元的，純$(n-1)$次元的であることに注意すれば，次の計算ができる：

$$\begin{aligned} R^k\pi_*\tilde{C} &= R^k\pi_*(R^{n-1}\tau_*(\pi^{-1}\mathcal{O}_X)) \\ &= R^{k+n-1}(\pi\tau)_*(\pi^{-1}\mathcal{O}_X) \quad (\because \tau : \text{純}\,n-1\,\text{次元的}) \\ &= R^{k+n-1}(\tau\pi)_*(\pi^{-1}\mathcal{O}_X) \\ &= R^{k+n-1}\tau_*\pi_*\pi^{-1}\mathcal{O}_X \quad (\because \pi : \text{純}\,0\,\text{次元的}) \\ &= R^{k+n-1}\tau_*\mathcal{O}_X. \end{aligned}$$

故に，

$$R^k\pi_*\tilde{C} = 0 \quad k \neq 0,\ d-1,$$
$$\pi_*\tilde{C} = R^{n-1}\tau_*\mathcal{O}_X,$$
$$R^{d-1}\pi_*\tilde{C} = R^{n-d-2}\tau_*\mathcal{O}_X.$$

よって定理(2.2)より次の定理を得る：

定理(2.4)　$\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C}_{N|X}$ に対し次が成立する.

1) codim $N = 1$ の場合. 次は完全列である.

$$0 \to \mathcal{B}_M[N] \xrightarrow{\tilde{\beta}} \tilde{\mathcal{C}}(S^*_N X) \to \mathcal{A}_M(N) \to 0 \qquad (26)$$

2) codim $N \geqq 2$ の場合, 次は完全列である.

$$\left.\begin{array}{l} 0 \to \mathcal{B}_M[N] \xrightarrow{\tilde{\beta}} \tilde{\mathcal{C}}(S^*_N X) \to 0 \\ 0 \to H^{d-1}(S^*_N X;\tilde{\mathcal{C}}) \to \mathcal{A}_M(N) \to 0 \end{array}\right. \qquad (27)$$

但し $d = \mathrm{codim}\, N$ とした。

この定理を "sheaf 化" すれば, 次のようになる.

系　1) codim $N = 1$ の場合, 次は完全:

$$0 \to \mathcal{B}_{M,[N]} \xrightarrow{\tilde{\beta}} \pi_* \tilde{\mathcal{C}} \to \mathcal{A}_M|_N \to 0 \qquad (28)$$

2) codim $N = d \geqslant 2$ の場合, 次は完全:

$$\left.\begin{array}{l} 0 \to \mathcal{B}_{M,[N]} \longrightarrow \pi_* \tilde{\mathcal{C}} \to 0 \\ 0 \to R^{d-1}\pi_* \tilde{\mathcal{C}} \to \mathcal{A}_M|_N \to 0 \end{array}\right. \qquad (29)$$

但し, $\mathcal{B}_M$, $\mathcal{A}_M$ はM上の hyperfunctions, analytic functions の芽の層, $\mathcal{B}_{M,[N]} = \mathcal{D}ist^0(N, \mathcal{B}_M)$ とした. また $\pi = \pi_N : S^*_N X \to N$ は射影, $R^j \pi_*$ は j 番目の順像を示す。

注意　codim $N = 0$, すなわち $N = M$ の場合, 上に構成した $\mathcal{C}_{N|X}$ は勿論 佐藤の層 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_M$ と一致する. そのとき (28) (29) に対応する完全列は次のものである:

$$0 \to \mathcal{A}_M \to \mathcal{B}_M \xrightarrow{\beta} (\pi_M)_* \mathcal{C}_M \to 0.$$

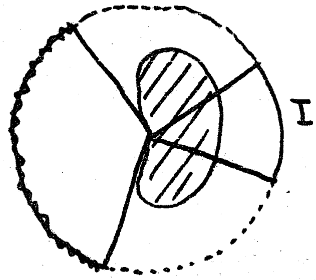
例　$M=\mathbb{R}$, $N=(0)$ とする. 前節の例1を参照.

I を $S^*_N X \cong \{(x_1, y_1)\,;\, x_1^2+y_1^2=1\}$ の開いた凸集合とする.

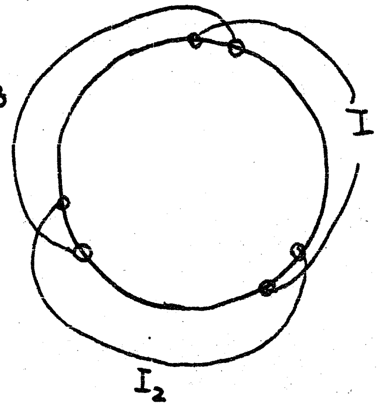
$$D(I) = I \text{ の non positive dual cone } \subset T_N X$$

$$\tilde{C}(I) = \operatorname*{lim\,proj}_{I' \subset\subset I}\ \operatorname*{lim\,ind}_{U \ni x} \frac{\mathcal{O}(U \cap D(I)^c)}{\mathcal{O}(U)}$$

$S_N X$ と $S^*_N X$ を同一視してえがいた下図において, I に対し斜線をひいたような領域が存在して, $\hat{C}(I)$ の元は, そこの上の正則函数で代表される。(もちろん斜線部の領域は, $\hat{C}(I)$ の元に依存する.)



$S^*_N X$ 上の $\tilde{C}$ のセクションとは何か?



$\bigcup_{j=1}^{3} I_j = S^*$ と S^* の凸開集合による被覆を考える。

S^* 上のセクションは各 I_j 上のセクションをつなぎ合せて得られる. この各々の代表函数を f_j とする。f_j は $U \cap D(I_j)^c$ に近い領域(上でいう斜線部)で正則かつ, $g_{kj} \in \mathcal{A}(0)$ が存在して

$$f_j - f_k = g_{kj}$$

が，$U \cap (D(I_j) \cup D(I_k)$ の凸包$)^c$ で成立する。このことより f_j は $U \setminus 0$ で多価正則函数を定め，

$$f(ze^{2\pi i}) = f(z) + g(z)$$

(ここで $g(z) = g_{12}(z) + g_{23}(z) + g_{31}(z) \in \mathcal{a}(0)$)

なる関係式をみたす。したがって次のことが結論される：

$\tilde{C}$ の $S_N^* X$ 上のセクションは

$$\varphi(z) + \psi(z) \log z \mod \mathcal{a}(0)$$

$\left(\varphi \in \mathcal{O}(U \setminus 0),\ \psi \in \mathcal{O}(U),\ U \text{は} 0 \text{の近傍} \right)$

によって与えられる。$\mathcal{B}_{[N]}$ の (26) による像は，

$$\varphi(z) \mod \mathcal{O}(0)$$

$(\varphi \in \mathcal{O}(U - 0)$，$U$ は 0 のある近傍$)$

によって与えられる．$\tilde{C}(S_N^* X) \longrightarrow \mathcal{a}(0)$ は

$$\underset{\mod \mathcal{O}(0)}{\varphi(z) + \psi(z) \log z} \longmapsto \psi(z)$$

によって与えられる。

☆ $\forall \psi \in \mathcal{a}(0)$ に対し，$\psi(z) \log(z)$ は $\tilde{C}(S_N^* X)$ の元を定めるから $\tilde{C}(S_N^* X) \longrightarrow \mathcal{a}(0)$ は全射である．

☆ $\mathcal{B}_{[N]} \longrightarrow \tilde{C}(S_N^* X)$ は，上の例でみても明らかに単射である．

☆ $\mathcal{B}_{[N]}$ の元は 0 以外で一価正則な函数により代表される．これは自然に $\tilde{C}(S_N^* X)$ の元を定めるが，$\mathcal{a}(0)$ にうつすと

ゼロになってしまう.

§3 $C_{N|X}$に関する予想.

codim $N \geq 1$であれば, $S^*_N X$ には"複素"変数がとれる. 我々の予想は, $\tilde{C} = C_{N|X}$ のセクションは, この複素変数に関しては一意に接続されることを主張する. この予想は, codim $N = 0$ の場合(すなわち $N = M$ の場合) $C = C_{M|X}$ が flabby であるという柏原の結果と対比する. ([1])

M, N, X, Y は今までの通り, p1, (1)の如きもので, p4の$\boxed{\text{仮定}}$のもとで考える.

$$\mathcal{B}_{[N]} = \mathcal{D}ist^n(\text{⊘}N; \mathcal{O}_X) = \mathcal{D}ist^0(N, \mathcal{B}_M)$$

とN上の層を定義する. これはNに台をもつM上の超函数の芽の層である. $\mathcal{A}_M$, $\mathcal{B}_M$ で, M上の実解析的函数の層, 超函数の芽の層をそれぞれ表わす.

予想(3.1)

(6)の下の写像

$$g: S^*_N X \setminus (S^*_Y X|_N) \longrightarrow S^*_N Y$$

を考えよう. 層$\tilde{C} = C_{N|X}$は, gのファイバーに沿って, 一意接続性をもつ. つまり, 次のことが成立する(であろう)

$\mathcal{U} \subset S^*_N X \setminus (S^*_Y X|_N)$ を開集合で，任意の $\xi \in S^*_N Y$ に対し $\mathcal{U} \cap g^{-1}(\xi)$ が連結なるものとしよう．層 $\tilde{C}$ の $\mathcal{U}$ 上のセクション φ が，$\mathcal{U}$ の開集合 u でゼロになれば，$\mathcal{U} \cap g^{-1}(g(u))$ でもゼロになる．

<u>予想（3.2）</u>

$\tilde{C}|_{S^*_Y X|_N}$ もまた一意接続性をもつ．つまり，次のことが成立する（であろう）：$S^*_Y X|_N$ の連結開集合で定義された $\tilde{C}|_{S^*_Y X|_N}$ のセクションが，その開部分集合でゼロであれば，もともとゼロである．

<u>予想（3.3）</u>（$\tilde{C} = C_{N|X}$ と $C = C_{M|X}$ の関係）

$\tilde{C} = C_{N|X}$，$C = C_{M|X}$ とおく．

$$\tilde{C}|_{S^*_M X|_N} \longrightarrow C|_{S^*_M X|_N}$$

なる単射的な層の準同型が存在し，次の図式が可換である：

$$\begin{tikzcd}
(\pi_N)_* \tilde{C} \arrow[r] & (\pi_M)_* \tilde{C}|_{S^*_M X|_N} \arrow[r] & (\pi_M)_* C|_{S^*_M X|_N} \\
\mathcal{B}_{[N]} \arrow[u, "\tilde{\beta}"] \arrow[rr, leftrightarrow] & & \mathcal{B}_{M|N} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

<u>定理</u> 予想（3.1），（3.2），（3.3）が正しければ，$\mathcal{B}_{[N]} \ni \varphi$ の特異台の形状は，佐藤予想の通りである．すなわち，$\varphi|_N \neq 0$ なら，$S^*_N Y$ の閉集合 F が存在して

$$S.S.\varphi = g^{-1}(F) \sqcup (S^*_M X|_N \cap S^*_Y X|_N)$$

となる．但しここで

$$q : S^*_M X|_N \setminus (S^*_M X|_N \cap S^*_Y X|_N) \longrightarrow S^*_N Y$$

は（6）の射影である．

（§1の注意にしたがって，

$$q : \sqrt{-1}\, S^*M|_N \setminus \sqrt{-1}\, S^*_N M \longrightarrow \sqrt{-1}\, S^*N$$

と考え，$F \subset \sqrt{-1}\, S^*N$．

$$S.S.\,\varphi = q^{-1}(F) \sqcup \sqrt{-1}\, S^*_N M$$

と書く方が，今まで流用されていた記号に近い．）

<u>証明</u>．

$\varphi \in \mathcal{B}_{[N]}$ とする．$\tilde{\beta}\varphi$ は $S^*_N X$ 上の $\tilde{\mathcal{C}}$ のセクションとみなせる．もし，$\beta\varphi \in \Gamma(S^*_M X|_N ; \mathcal{C})$ がある開集合 ω でゼロであれば，予想（3.3）より，$\tilde{\beta}\varphi$ は ω の $S^*_N X$ でのある近傍 $\tilde{\omega}$ でゼロになる．

$\omega \cap (S^*_M X|_N \cap S^*_Y X|_N) \neq \phi$ ならば，予想（3.2）より，$\tilde{\beta}\varphi$ は $S^*_Y X$ の近傍でゼロ．故に予想（3.1）より，$\tilde{\beta}\varphi \equiv 0$．定理（2.4）を用いると $\varphi \equiv 0$ となる。これは仮定に反する．

$\omega \cap (S^*_M X|_N \cap S^*_Y X|_N) \neq \phi$ としよう．予想（3.1）より，

$$q : S^*_N X \setminus S^*_Y X|_N \longrightarrow S^*_N Y$$

としたとき，$\tilde{\beta}\varphi$ は $q^{-1} q \tilde{\omega}$ でゼロになる．故に，予想（

3.3)より, $\beta\varphi$ は

$$S_M^*X|_N \cap \tilde{\omega} = g^{-1}g\,\omega$$

でゼロになる. 但し 上式の左辺の g は

$$g: S_M^*X|_N \setminus (S_M^*X|_N \cap S_Y^*X|_N) \longrightarrow S_N^*Y$$

である. これより 定理の主張がただちにしたがう.

(q.e.d.)

さて

$$m: S_N^*X \setminus S_N^*M \longrightarrow S_M^*X|_N$$

とする. $\mathcal{B}_{[N]} \ni \varphi$ に対し $\beta\varphi \in \Gamma(S_M^*X|_N; \mathcal{C})$ および $\tilde{\beta}\varphi \in \Gamma(S_N^*X; \tilde{\mathcal{C}})$ が定義されているが, これらに関して, 次のことがいえる.

<u>予想の系</u>

$\varphi \in \mathcal{B}_{[N]}$ に対して 次の2条件は同値

1) $\beta\varphi|_N = 0$ in an open set $\omega \subset S_M^*X|_N$.

2) $\tilde{\beta}\varphi = 0$ in $m^{-1}(\omega) \subset S_N^*X \setminus S_N^*M$.

実際 これは予想(3.1)と(3.3)の系にすぎない。

$\operatorname{codim} N = 1$ としよう。局所的に

$$N = \{h = 0\}, \quad dh|_N \neq 0$$

と実解析的函数 h でもって N が表示されている. いま,

$$N_- = \{h < 0\}$$

は，Nで区切られるMの閉集合の1つである．このとき，$dh_\infty|_N$ は $S^*_N M$ のセクションを定義する．これをかりに（＋）と書く．

注意　Nが向きづけ可能であれば，N−，（＋）は，大域的に定義できる．これらのえらび方は，Nの向きづけ方の数（すなわち2コ）だけある．我々の興味は局所的であるから，Nが向きづけられ，N−，（＋）が選ばれていると仮定する．

超函数 $\varphi\in\mathcal{B}(M)$ で，その台がN−に含まれているもののN上の芽 $\varphi|_N$ が以下の研究対象である．このような超函数の特異台 $S.S.\varphi$ の形状に関して佐藤先生は次の予想をたてられた．

佐藤予想（3.4）

$$\varphi\in\mathcal{B}(M),\quad \operatorname{supp}\varphi\subset N_-,\quad \varphi|_N\neq 0$$

とする．このとき，$S^*_N Y$ の閉部分集合Fが存在して

$$S.S.\,\varphi|_N = g^{-1}(F)\sqcup(S^*_M X|_N\cap S^*_Y X|_N)$$

となる．但し，

$$g : S^*_M X|_N \setminus (S^*_M X|_N\cap S^*_Y X|_N)\longrightarrow S^*_N Y$$

は射影である．

注意　佐藤予想の仮定のもとで，

$$S.S.\,\varphi|_N\supset S^*_M X|_N\cap S^*_Y X|_N$$

を主張するのが，河合－柏原の補題である．（[3]）

注意 佐藤予想は、[2]における超函数の台と特異台の相互依存性の一例の一般化になっている。

佐藤予想(3.4)を層Cと層$\tilde{C}$とに関するいくつかの予想される性質に帰着させよう。

$$p : S^*_N X \setminus S^*_M X|_N \longrightarrow S^*_N M$$

を射影とし、$p^{-1}(+) = S^*_N X^{(+)}$と書こう。$p^{-1}(+)$の各ファイバーは開いた半球である。また

$$m^+ : S^*_N X^{(+)} \setminus (+) \longrightarrow S^*_M X|_N$$

とおこう。このとき、定理(2.4)に類似の性質を予想する。

予想(3.5)

単射

$$\mathcal{Dist}^\circ(N_- ; \mathcal{B}_M)|_N \xrightarrow{\tilde{\beta}} \tilde{C}(S^*_N X^{(+)})$$

が定義できる。

予想(3.6) (p29の予想の系の類似)

$\mathcal{Dist}^\circ(N_- ; \mathcal{B}_M)|_N$の$N$上のセクション$N$に対し、

$\tilde{\beta}\varphi \in \Gamma(S^*_N X^{(+)} ; \tilde{C})$ および

$\beta\varphi|_N \in \Gamma(S^*_M X|_N ; C)$ が定義できるが、これらに対して次の2つは同値:

1) $\beta\varphi|_N = 0$ in an open set ω of $S^*_M X|_N$.

2) $\tilde{\beta}\varphi = 0$ in $(m^+)^{-1}(\omega)$.

これらの予想が正しければ、佐藤予想(3.4)も正しいこ

とが p28の証明と同様に示せる.

文献

[1] 柏原正樹: Cの flabbyness と Radon変換.
数理研講究録 114, 佐藤の超函数とその応用 (1970)
1-4.

[2] MORIMOTO, M: Support et support singulier de l'hyperfonction. Proc. Japan Acad. 47 (1971), 648-652.

[3] 佐藤幹夫・柏原正樹: 超函数の構造, 数学のあゆみ 15 (1970), 9-71.