数理解析研究所講究録
第 168 巻 1972 年 60-69

1階偏微分方程式の global holomorphic solution について

東京教育大 理 鈴木文夫

§0. Xを$\mathbb{C}^n$の開集合とし，1階偏微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial x_1} u = f$$

の global holomorphic solution の存在の問題を考察する．Xが正則領域，或は Runge domain という仮定だけでは，一般に大域解が存在しないことは，若林氏の反例により示された（Proc. Japan Acad. 44 (1968) 820－822）．

ここでは問題を x_1 方向と $(x_2, \cdots, x_n)$ 方向との2つの方向に分けて考察することにより，Xが正則領域のときに，大域解の存在のための必要かつ十分な条件を求める．Xの正則包を$\tilde{X}$とすれば，Xで大域解が存在するためには，$\tilde{X}$で大域解が存在することが必要かつ十分であるから，Xが正則領域であると仮定することは強い制限ではない．

§1. 定義と主定理．

$\mathbb{C}^n$の点を $x = (x_1, \cdots, x_n)$ と表わす．Xを$\mathbb{C}^n$の開集合と

する．X の上の holomorphic function の層を $\mathcal{O}_X$（或は簡単に $\mathcal{O}$），開集合 U で定義された holomorphic function の空間を $\mathcal{O}(U)$ と書く．

$P = \partial/\partial x_1$ とし，$Pu = 0$ の local holomorphic solution の層を $\mathcal{O}^P$ とする．方程式 $Pu = f$ は局所的には解を持つから，

(1.1) $$0 \to \mathcal{O}^P \to \mathcal{O} \xrightarrow{P} \mathcal{O} \to 0$$

は exact である．X が正則領域のときは，$H^p(X, \mathcal{O}) = 0$，$p \geqq 1$，であるから

(1.2) $$\begin{aligned} &P\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(X) \iff H^1(X, \mathcal{O}^P) = 0, \\ &H^p(X, \mathcal{O}^P) = 0, \quad p \geqq 2. \end{aligned}$$

$x \in X$ に対して，$X \cap \{y \in \mathbb{C}^n \mid y_i = x_i,\ i = 2, \cdots, n\}$ の連結成分で x を含むものを L_x とする．同値関係"$L_x = L_y$"（$x, y \in X$）に関する X の商空間を X/P，写像 $x \mapsto L_x$: $X \to X/P$ を π と書くことにする．X/P には π が submersion となるような複素多様体の構造が存在する．このような構造は一意的に定まる．但し X/P の位相は一般には Hausdorff ではない．さらに $\varphi : X/P \to \mathbb{C}^{n-1}$ を $\varphi(L_x) = (x_2, \cdots, x_n)$ と定義する．φ は local isomorphism で，$\varphi(\pi(x)) = (x_2, \cdots, x_n)$，$x \in X$，である．

<u>主定理</u>　X は正則領域とする．

$P\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(X)$ となるための必要かつ十分な条件は

a) すべての L_x は単連結である；

b) X/P の位相は Hausdorff である；

c) X/P は正則領域である．

§2. 必要性の証明．

先ず，L_x に関する条件として

<u>Prop.</u> 2.1 （若林）　X は正則領域，Y は X の閉部分多様体，P は Y に接するとする．

$P\mathcal{O}_X(X) = \mathcal{O}_X(X)$ ならば，$P\mathcal{O}_Y(Y) = \mathcal{O}_Y(Y)$ である．

<u>Coro.</u>　X は正則領域とする．$P\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(X)$ ならば，すべての L_x は単連結である．

さて，写像 $\pi : X \to X/P$ と X 上の層 $\mathcal{O}^P$ に関する Leray spectral sequence は

(2.1)　$$E_2^{pq} = H^p(X/P, \mathcal{H}_\pi^q(\mathcal{O}^P)) \Rightarrow H^*(X, \mathcal{O}^P).$$

ここで $p<0$ 或は $q<0$ のとき $E_2^{pq} = 0$ であるから，$E_2^{10} \subset H^1$ である．また

$$\mathcal{O}^P = \pi^{-1}\mathcal{O}_{X/P},$$

かつ π のファイバーは連結だから，

(2.2)　$$\mathcal{H}_\pi^0(\mathcal{O}^P) = \mathcal{O}_{X/P}.$$

従って，$H^1(X/P, \mathcal{O}_{X/P}) \subset H^1(X, \mathcal{O}^P)$．（1.2）より

Prop. 2.2　Xが正則領域のとき，

$P\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(X)$ ならば，$H^1(X/P, \mathcal{O}_{X/P}) = 0$．

次に X/P の位相が Hausdorff であることを証明するために，準備として

Lemma 2.3　Zは1次元複素多様体とする．

$H^1(Z, \mathcal{O}_Z) = 0$ ならば，Zの位相は Hausdorff である．

（この Lemma は $\dim Z \geqq 2$ のときは成り立たない．）

証明．　U, V は Z の開集合，$U \cup V = Z$ とする．$H^1(Z, \mathcal{O}) = 0$ ならば，Mayer-Vietoris の定理により，$(f, g) \mapsto f - g : \mathcal{O}(U) \oplus \mathcal{O}(V) \longrightarrow \mathcal{O}(U \cap V)$ は surjective である．Zの位相が Hausdorff でないと仮定して，上の写像が surjective にならないような U, V を作ろう．

Zの点列 $\{z_j\}$ で異なる2点 a, b に収束するものが存在する．t を a を中心とする局所座標，U をその座標近傍とする．$V = Z - \{a\}$ は開集合で，$b \in V$，$U \cap V = U - \{a\}$，$U \cup V = Z$ である．　$h = 1/t$ は $\mathcal{O}(U \cap V)$ に属する．$f \in \mathcal{O}(U)$，$g \in \mathcal{O}(V)$ が存在して，$U \cap V$ で $f - g = h$ とする．十分大きい j について，$z_j \in U \cap V$ だから，$f(z_j) \to f(a)$，$g(z_j) \to g(b)$．従って，$h(z_j) = f(z_j) - g(z_j) \longrightarrow f(a) - g(b)$．ところが $h(z_j) \to \infty$ であるから，矛盾．

<u>Prop</u>. 2.4.　X は正則領域とする．

$P\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(X)$ ならば，X/P の位相は Hausdorff である．

<u>証明</u>．　X/P の異なる2点 a, b は開近傍 U, V により分離されることを示す．$\varphi : X/P \longrightarrow \mathbb{C}^{n-1}$ は local isomorphism であるから，$\varphi(a) = \varphi(b)$ のときだけを考えればよい．φ の U, V への制限が $\mathbb{C}^{n-1}$ の開球 B の上への isomorphism になるようにできる．$U \cap V$ に属する点 c が存在したと仮定しよう．$\varphi(c)$ と $\varphi(a) = \varphi(b)$ を結ぶ $\mathbb{C}^{n-1}$ の中の複素直線を T とする．$Z = \varphi^{-1}(T)$，$Y = \pi^{-1}(Z)$ とすれば，Y は X の閉部分多様体で，P は Y に接する．従って，Prop. 2.1 により，$P\mathcal{O}_Y(Y) = \mathcal{O}_Y(Y)$ である．Y は正則領域，$Y/P = Z$ であるから，Prop. 2.2 により，$H^1(Z, \mathcal{O}_Z) = 0$．$\dim Z = 1$ であるから，Lemma 2.3 により，Z の位相は Hausdorff である．従って，$U \cap Z$ と $V \cap Z$ は共通点を持たない．矛盾．

S を P に transversal な，X の $n-1$ 次元部分多様体とする．$U = \pi(S)$ は X/P の開集合で，$\pi^{-1}(U) = \bigsqcup_{x \in S} L_x$ である．L_x がすべて単連結のとき，$f \in \mathcal{O}(\pi^{-1}(U))$ を S から出発して L_x に沿って積分して得られる函数を u とすれば，$u \in \mathcal{O}(\pi^{-1}(U))$ かつ $Pu = f$ である．従って，X/P の十分小さい開集合 U については，$\pi(S) = U$ となる S が存在

するから,

$$(2.3)\qquad P\mathcal{O}(\pi^{-1}(U)) = \mathcal{O}(\pi^{-1}(U)).$$

Lemma 2.5　X は Stein manifold, Z は complex manifold (Hausdorff), $\pi: X \to Z$ は analytic map とする. Z の開集合 U が Stein ならば, $\pi^{-1}(U)$ も Stein である.

(Hörmander: An introduction to complex analysis in several variables, Th. 2.5.14).

この Lemma と Prop 2.4, (1.2), (2.3) より, 十分小さい Stein 開集合 $U \subset X/P$ について,

$$H^q(\pi^{-1}(U), \mathcal{O}^P) = 0, \quad q \geq 1.$$

従って, inductive limit を取れば,

$$\mathcal{H}^q_\pi(\mathcal{O}^P) = 0, \qquad q \geq 1.$$

Leray spectral sequence (2.1) と (2.2) より,

$$H^p(X/P, \mathcal{O}_{X/P}) = H^p(X, \mathcal{O}^P), \quad \forall p \geq 0.$$

以上をまとめて,

Theorem 2.6　X は正則領域とする. $P\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(X)$ ならば,

a)　すべての L_x は単連結である;

b)　X/P の位相は Hausdorff である;

c)　X/P は正則領域である.

§3. 十分性の証明.

<u>Theorem</u> 3.1. X は $\mathbb{C}^n$ の開集合とする.

a) すべての L_x は単連結,

c′) $H^1(X/P, \mathcal{O}_{X/P}) = 0$

ならば, $P\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(X)$ である.

<u>証明</u>. 仮定 a) より, X/P の十分小さい開集合 U に対して,

(2.3) $$P\mathcal{O}(\pi^{-1}(U)) = \mathcal{O}(\pi^{-1}(U))$$

であるから, (1.1) の direct image

$$0 \to \pi_*\mathcal{O}^P \to \pi_*\mathcal{O}_X \xrightarrow{\pi_* P} \pi_*\mathcal{O}_X \to 0$$

は exact である. 従って, (2.2) と c′) より, $P\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(X)$.

<u>Remark</u>. $\dim X = 2$ のときは, X/P の位相が Hausdorff ならば, $H^1(X/P, \mathcal{O}_{X/P}) = 0$. 従って,

a) すべての L_x は単連結,

b) X/P の位相は Hausdorff

ならば, $P\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(X)$ である.

§4. 主定理の条件をみたさない正則領域の例.

1) 条件 a) をみたさない正則領域.

$$P = \partial/\partial x_1, \quad X = (\mathbb{C} - \{0\}) \times \mathbb{C}^{n-1}.$$

若林氏は $\mathbb{C}^3$ の中に polydisc と解析的に同型な正則領域で a)をみたさない例を作った.

2) 条件 a) はみたすが b) をみたさない Runge domain.

$$P = \frac{\partial}{\partial x_1} + i x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad X = \{ \operatorname{Im} x_2 > 0 \}.$$

P の 1 つの積分 $\frac{1}{2}x_1^2 + i x_2$ をとり, 変数変換

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = \frac{1}{2}x_1^2 + i x_2 \end{cases}$$

を行なう. この変換で $X = \{ \operatorname{Im} x_2 > 0 \}$ に対応する領域は $Y = \{ \operatorname{Im} i (\frac{1}{2} y_1^2 - y_2) > 0 \}$, P に対応する微分作用素は $\partial/\partial y_1$ である. y_2 を一定にして, Y の切口を調べると, $\operatorname{Re} y_2 < 0$ のとき, 連結成分は 1 つ, $\operatorname{Re} y_2 \geq 0$ のとき, 連結成分は 2 つである. 従って, X/P の位相は Hausdorff ではない. 若林氏も大域解の存在しない Runge domain の例を示した.

3) 条件 a), b) はみたすが, c) をみたさない Runge domain.

$$P = \frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} - 2i(x_1 + i x_2) \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad X = \{ \operatorname{Im} x_3 > 0 \}.$$

P の 2 つの独立な積分 $-i(x_1 + i x_2)$, $2 i x_1 (x_1 + i x_2) + x_3$ をとり, 変数変換

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = -i(x_1 + ix_2) \\ y_3 = 2ix_1(x_1+ix_2) + x_3 \end{cases}$$

を行なう．この変換で $X = \{\operatorname{Im} x_3 > 0\}$ に対応する領域は $Y = \{\operatorname{Im}(2y_1y_2 + y_3) > 0\}$，$P$ に対応する微分作用素は $\partial/\partial y_1$ である．y_2, y_3 を一定にして，Y の切口を調べると，

$y_2 \neq 0$ のとき，　　半平面，

$y_2 = 0$, $\operatorname{Im} y_3 > 0$ のとき，全平面，

$y_2 = 0$, $\operatorname{Im} y_3 \leqq 0$ のとき，空集合，

Y の切口の連結成分が1つであるから，$Y/(\partial/\partial y_1) \subset \mathbb{C}^2$.

$$Y/(\partial/\partial y_1) = \mathbb{C}^2 - \{(y_2, y_3);\ y_2 = 0,\ \operatorname{Im} y_3 \leqq 0\}.$$

Hartogs の連続性定理により，$Y/(\partial/\partial y_1)$ で holomorphic な函数は $\mathbb{C}^2$ 全体に拡張できるから，$X/P \cong Y/(\partial/\partial y_1)$ は正則領域ではない．

§5. 0階の項の影響

斉次1階微分作用素 P について，$P\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(X)$ ならば，任意の $a \in \mathcal{O}(X)$ に対して，$(P+a)\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(X)$ である．逆は一般には成り立たない．例へば，$X = \mathbb{C} - \{0\}$，$P = d/dx$，$a(x) = c/x$，c は定数，$c \notin \mathbb{Z}$．方程式 $(P+a)u = f$ において，u, f のローラン展開を $u(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k x^k$,

$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k x^k$ とすれば,

$$(P+a)u=\sum_k (k+c)\,u_k x^{k-1}=\sum_k f_k x^k.$$

従って, $u_k=\dfrac{1}{k+1}f_{k-1}$ とおけば, $f\in\mathcal{O}(X)$ のとき $u\in\mathcal{O}(X)$ で $(P+a)u=f$ となる.