数理解析研究所講究録
第168巻1972年76-86

定数係数線型偏微分方程式系の解の存在について.

東大 理 大島利雄

§1. 序

Pを成分が定数係数の偏微分作用素の行列とし, fを領域Ω上の函数のベクトルとする.

$$Pu = f$$

という方程式において, fが compatibility condition を満たすならば解uが存在するか? という問題を扱う.

Pが Cauchy-Riemann や de Rham の system の場合はよく知られているし, Ωが convex のときは, 多くの函数空間で上の事実が成立することが知られている.

記号

$\mathcal{P}$: n変数の定数係数線型偏微分作用素の環

M: 有限生成の$\mathcal{P}$-module すなわち方程式

$\mathcal{F}$: $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{E}$; $\mathcal{O}$ のいずれかの sheaf

$\mathcal{P}$, Mは. $\mathbb{R}^n$上の sheaf ともみなし. 同一視する.

$\mathcal{F}^M$: 方程式Mの solution sheaf i.e. $\mathcal{H}om_{\mathcal{P}}(M, \mathcal{F})$

Ωを$\mathbb{R}^n$の中の領域（ただし，$\mathcal{F} = \mathcal{O}$のときは，$\Omega$は$\mathbb{C}^n$の中の擬凸領域）とし，$\mathcal{F}(\Omega)$を$\Omega$上の section とする．

<u>定義</u>　$\mathcal{P}$ - module NがM - convex とは．

(1)　$\mathrm{Ext}^k(M, N) = 0 \quad \forall k \geqq 1$ が成立すること．

[4] の記号に従えば，任意の locally closed set Z に対し

(2)　$\mathbb{R}\mathrm{Hom}(M, \mathbb{R}\Gamma_Z \mathcal{F}) = \mathbb{R}\Gamma_Z \mathbb{R}\mathcal{H}om(M, \mathcal{F})$

$Z = \Omega$ とおくと

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{E}xt^i(M, \mathcal{F}) = 0 \quad \forall i \geqq 1 \\ &H^i(\Omega, \mathcal{F}) = 0 \quad \forall i \geqq 1 \end{aligned}\right\} \text{であるから}$$

(3)　$\mathrm{Ext}^k(M, \mathcal{F}(\Omega)) = H^k(\Omega, \mathcal{F}^M)$

$\mathcal{F} = \mathcal{B}$のときは，$\mathcal{B}$が flabby sheaf であることより．

(4)　$\mathrm{Ext}^k(M, \Gamma_Z(\mathcal{B})) = H^k_Z(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^M)$

§2.　$\mathbb{R}^n \setminus \Omega$が compact connected component をもつときに，$\mathcal{B}(\Omega)$が M - convex となるための条件

<u>定理1</u>　Ωを$\mathbb{R}^n \setminus \Omega$が compact connected component をもつような領域とする．

$\mathcal{B}(\Omega)$がM - convex ならば dim proj. M $\leqq 1$

<u>証明</u>　仮定より，open set Vと，Vに含まれる空集合でない compact set Kが存在して，$\Omega = V \setminus K$ となる．

このとき、$\forall i \geqslant 1$ に対し、

(5) $\quad 0 \to H^i(V, \mathcal{B}^M) \longrightarrow H^i(\Omega, \mathcal{B}^M) \longrightarrow H_K^{i+1}(V, \mathcal{B}^M) \to 0$

が、*exact sequence* となる。（cf. [5]）

$\mathcal{B}(\Omega)$ が M-*convex* であるから、(3)、(5) より

(6) $\quad H_K^{i+1}(V, \mathcal{B}^M) = 0 \qquad i \geqslant 1$ となる。

平行移動することにより、$K \ni \{0\}$ と仮定してよい。

(7) $\quad 0 \leftarrow M \leftarrow \mathcal{P}^{r_0} \xleftarrow{{}^tP_0} \cdots\cdots \leftarrow \mathcal{P}^{r_i} \xleftarrow{{}^tP_i} \mathcal{P}^{r_{i+1}} \xleftarrow{{}^tP_{i+1}} \mathcal{P}^{r_{i+2}} \longleftarrow \cdots\cdots$

を M の *projective resolution* とすると、（^{t} は *transposed*）

(8) $\quad \mathcal{D}'^{r_i}_{\{0\}}(V) \xrightarrow{P_i} \mathcal{D}'^{r_{i+1}}_{\{0\}}(V) \xrightarrow{P_{i+1}} \mathcal{D}'^{r_{i+2}}_{\{0\}}(V)$ *exact*.

を示せば、$\mathcal{D}'^{l}_{\{0\}} \simeq \mathcal{P}^l$ という自然な同型により、

$$\mathcal{P}^{r_i} \xrightarrow{P_i} \mathcal{P}^{r_{i+1}} \xrightarrow{P_{i+1}} \mathcal{P}^{r_{i+2}} \quad \textit{exact} \quad \text{となるので.}$$

(9) $\quad \mathrm{Ext}^{i+1}(M, \mathcal{P}) = 0 \qquad i \geqslant 1$

<u>(8)の証明</u>（cf. [5]）まず、$P_{i+1} \cdot P_i = 0$ は明らか。次に、$f \in \mathcal{D}'^{r_{i+1}}_{\{0\}}(V) \subset \mathcal{B}_K^{r_{i+1}}(V)$ が $P_{i+1} f = 0$ を満たせば、(4)、(6) より $u \in \mathcal{B}_K^{r_i}(V)$ が存在して、$P_i u = f$ となる。u の Fourier 変換は整函数、f の Fourier 変換は多項式となるので、[7] の *Theorem* 7.6.11. の u をとり直したときの評価より (8) がでる。

次に、任意の有限生成$\mathcal{P}$-module Nをとり、Nの projective resolution を(10)とおく。

$$(10)\quad 0 \leftarrow N \leftarrow \mathcal{P}^{l_0} \xleftarrow{{}^tQ_0} \cdots\cdots \leftarrow \mathcal{P}^{l_i} \xleftarrow{{}^tQ_i} \mathcal{P}^{l_{i+1}} \xleftarrow{{}^tQ_{i+1}} \mathcal{P}^{l_{i+2}} \leftarrow \cdots\cdots$$

(9)より、$\mathrm{Ext}^2(M, N) = \mathrm{Ext}^3(M, \ker {}^tQ_0) = \cdots\cdots$

$$= \mathrm{Ext}^{n+1}(M, \ker {}^tQ_{n-2})$$

dim proj $M \leqq n$ だから、上式 = 0．よって、証明おわり．

<u>定理2</u>　dim proj $M \leqq 1$ ならばすべての領域Ωに対し$\mathcal{B}(\Omega)$はM-convexとなる．

<u>証明</u>　$Z = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ とおくと、(11)が exact sequence となる．

$$(11)\quad \cdots\cdots \longrightarrow H^i(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^M) \longrightarrow H^i(\Omega, \mathcal{B}^M) \longrightarrow H^{i+1}_Z(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^M) \rightarrow \cdots\cdots$$

$\mathbb{R}^n$はM-convexであるから $H^i(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^M) = 0 \quad i \geqq 1$

一方(4)より $H^{i+1}_Z(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^M) = \mathrm{Ext}^{i+1}(M, \Gamma_Z(\mathcal{B}^M)) = 0 \quad i \geqq 1$

よって、$H^i(\Omega, \mathcal{B}^M) = 0 \quad i \geqq 1$　　　Q.E.D.

<u>定理3</u>　$n = 2$ のとき

$\mathrm{Ext}^2(M, \mathcal{P}) \neq 0$ ならば$\mathcal{B}(\Omega)$がM-convex $\Leftrightarrow H^1(\Omega, \mathbb{C}) = 0$

$\mathrm{Ext}^2(M, \mathcal{P}) = 0$ ならばすべての領域Ωに対し、$\mathcal{B}(\Omega)$はM-convexとなる．

<u>証明</u>　定理1、2より、$H^1(\Omega, \mathbb{C}) = 0$ ならば、$\mathcal{B}(\Omega)$がM-convexなることを示せば十分．そこで、$\mathcal{P}$の任意の ideal Jに対し、$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{P}/J, \mathcal{B}(\Omega)) = 0$ を示せば十分である．

Jの生成元を$P_1, \cdots\cdots, P_l$とするとき、方程式 $P_i u = f_i$（但し、$f_i \in \mathcal{B}(\Omega)$、$1 \leq i \leq l$）において、compatibility condition をf_i達が満たすときに解の存在を示せばよい。

$P_i = P_i' Q_i$ とおき、P_i'達に共通因子がないようにできる。方程式 $P_i' w = f_i$（$1 \leq i \leq l$）は maximally overdetermined system になり、しかもf_i達はこの方程式の compatibility condition をも満たしているので、解wが存在する。[6]

あとは、単独方程式 $Qu = w$ を解けばよいが、$\mathcal{B}(\Omega)$で考えているから解uが存在する。　Q.E.D.

§3.　Partial de Rham system

$M = \mathcal{P} / \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \mathcal{P}^2$ のときを考える。（$n \geqq 2$）

Ωの点の座標を (x_1, x_2, y) とかく。（$y \in \mathbb{R}^{n-2}$）

$$\begin{array}{cccc} \pi : & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n-2} \\ & \Psi & & \Psi \\ & (x_1, x_2, y) & \longmapsto & y \end{array} \qquad \textit{projection}$$

$\Omega \ni x, x'$ に対し、同値関係$x \sim x'$とは、$\pi(x) = \pi(x')$ で、かつxとx'が、$\pi^{-1}\pi(x)$の同じ連結成分に属すること、と定義し、Ωをこの同値関係で割ったものをBと定義する。

$$\mathbb{R}^n \supset \Omega \xrightarrow[\text{open, fibre connected}]{\pi_1} B \xrightarrow[\text{local homeo.}]{\pi_2} \pi(\Omega) \subset \mathbb{R}^{n-2}$$

$$\pi = \pi_2 \cdot \pi_1$$

$\left.\begin{array}{l}\mathcal{F}_{n-2} : \mathbb{R}^{n-2} \text{ 上の } \mathcal{F} \text{ に対応する } \mathit{sheaf} \\ \mathcal{F}_B = \pi_2^{-1}\mathcal{F}_{n-2}\end{array}\right\}$ と定義すると．

(12) $\mathcal{F}^M = \pi^{-1}\mathcal{F}_{n-2} = \pi_1^{-1}\mathcal{F}_B$

例　$\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus A$ とする．

1．$A = \{x_1 = 0,\ y = 0\}$ のとき

$D = \mathbb{R}^1 \setminus \pi(A)$ とおくと．*Leray* の *covering* による *cohomology* により．簡単な計算で次式がわかる．

$$\mathrm{Ext}^1(M, \mathcal{F}(\Omega)) = \Gamma(D, \mathcal{F}_{n-2}) / \Gamma(\mathbb{R}^1, \mathcal{F}_{n-2})|_D$$

これは．$\mathcal{F} = \mathcal{B}$ のときは消えるが、他のときは消えない．

たとえば、$\mathcal{F} = \mathcal{E}$ のとき．$\varphi \in \Gamma(D, \mathcal{E})$．$\varphi \notin \Gamma(\mathbb{R}^1, \mathcal{E})|_D$

とすれば．$\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$．$\int \theta(x_1)\,dx_1 = 1$ となる θ を1つとる

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} = (\theta(x_1/y)/y)\cdot\varphi(y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

が解けない例となる．

2．i)　$A = \{x_1 = x_2 = 0\}$

ii)　$A = \{x_1 = x_2 = 0,\ y \geqq 0\}$

iii)　$A = \{x_1 = x_2 = y = 0\}$

$$\mathrm{Ext}^1(M, \mathcal{F}(\Omega)) = \Gamma_{\pi(A)}(\mathbb{R}^1, \mathcal{F}_{n-2}) \text{ となり}$$

i)　すべての場合において消えない．

ii)　$\mathcal{F} = \mathcal{A}$ のときのみ消える．

iii)　$\mathcal{F} = \mathcal{A}, \mathcal{E}$ のときのみ消える．

具体的に．解けない例をかくと．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} = \dfrac{1}{x_1 + i x_2} \cdot \varphi(y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_2} = \dfrac{i}{x_1 + i x_2} \cdot \varphi(y) \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} = \delta(x_1) \cdot Y(x_2) \cdot \varphi(y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

但し．$0 \neq \varphi \in \Gamma_{\pi(A)}(\mathbb{R}^1, \mathcal{F}_{n-2})$

定理4　$\mathcal{B}(\Omega)$ が M-convex

$\Leftrightarrow H^1(\pi^{-1}(y), \mathbb{C}) = 0$ for $\forall y \in \mathbb{R}^{n-2}$

補題1　$\mathcal{B}_B$ は B 上の flabby sheaf である．

証明　$B = \bigcup_{\lambda \in I} B_\lambda$ という open covering を

$\pi_2 : B_\lambda \xrightarrow{\sim} \pi_2(B_\lambda)$ が homeo. となるようにとる．

$\forall U \subset B$ open $\forall f \in \Gamma(U, \mathcal{B}_B)$ に対し．

$\mathcal{M} = \{ g \in \Gamma(V, \mathcal{B}_B) ; \exists J \subset I, V = U \cup \bigcup_{\lambda \in J} B_\lambda, g|_U = f \}$

とおくとき．$\exists g \in \mathcal{M}$．$g \in \Gamma(B, \mathcal{B}_B)$ を示せばよい．

g' が g の拡張のとき $g < g'$ と定義すると．Zorn's lemma より

極大元 $g \in \Gamma(V, \mathcal{B}_B)$ の存在がわかる．$V \neq B$ ならば．

$B_\lambda \not\subset V$ となる $\lambda \in I$ が存在する．$h = g|_{B_\lambda \cap V}$ とおくと

$\mathcal{B}_{n-2}$ が flabby であることから．h の拡張の $\bar{h}$ が存在する．

$$\bar{h} \in \Gamma(B_\lambda, \mathcal{B}_B) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\pi_2(B_\lambda), \mathcal{B}_{n-2})$$

$\bar{g}$ を V 上で g．B_λ 上で $\bar{h}$ と定めれば g の真の拡張になり．g の極大性に反する．よって $g \in \Gamma(B, \mathcal{B}_B)$ が示された．

補題2　$x = (x_1, \cdots\cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ のとき $|x| = \max_i |x_i|$ とおく

Ω が次の条件を満たすならば $H^1(\Omega, \mathcal{B}^M) = 0$

$$\begin{cases} \forall y \in \mathbb{R}^{n-2} \text{ に対し．} \pi^{-1}(y) \text{ が連結かつ単連結} \\ U_0 = \{|x_1|<1,\ |x_2|<1,\ |y|<1\} \subset \Omega \subset \{|y|<1\} \end{cases}$$

証明　$\frac{\partial u}{\partial x_i} = f_i$ （$i=1,2$、$f_i \in \mathcal{B}(\Omega)$）という方程式が f_i 達が compatibility condition （i.e. $\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}$）を満たすならば解けるということを示せばよい．

$\Omega = \bigcup_{\lambda \in I} U_\lambda$ という open convex covering をとれば．

$u_\lambda \in \Gamma(U_\lambda, \mathcal{B})$ が存在して　$\frac{\partial u_\lambda}{\partial x_i} = f_i|_{U_\lambda}$　とできる．

$\forall x \in \Omega$ に対し．$\exists \lambda_0 \in I$　s.t.　$U_{\lambda_0} \ni x$　　そこで．

x と $(0, 0, \pi(x))$ とを結ぶ $\pi^{-1} \cdot \pi(x)$ 内の curve をとり．それを l とおくと．$\{U_{\lambda_i}\}_{0 \leq i \leq m}$ が存在して．

$$U_{\lambda_{i-1}} \cap U_{\lambda_i} \neq \phi \qquad \bigcup_{i=0}^{m} U_{\lambda_i} \supset l \qquad U_{\lambda_m} = U_0 \quad \text{となる．}$$

$\delta > 0$ が存在して．$V_\delta = \{|y|<\delta\} \subset \bigcap_{i=1}^{m} \pi(U_{\lambda_{i-1}} \cap U_{\lambda_i}) \subset \mathbb{R}^{n-2}$

$$u\Big|_{\pi^{-1}(V_\delta) \cap U_{\lambda_0}} = \pi^* \sum_{i=1}^{m} v_i + u_{\lambda_0} \quad \text{と定めればよい．}$$

$$\text{ただし．} \begin{cases} v_i \in \Gamma(V_\delta, \mathcal{B}_{n-2}) \\ \pi^* v_i = u_i - u_{i-1} \quad \text{on } \pi^{-1}(V_\delta) \cap U_{\lambda_{i-1}} \cap U_{\lambda_i} \end{cases}$$

$\pi^{-1}(y)$ が単連結であることより．u が well-defined であることがわかる．

定理4の証明　[8] の証明の手順と同様にすればよい．

$\mathrm{Ext}^2(\mathcal{M}, \mathcal{B}(\Omega)) = 0$　は常に成立する．

⇒ の証明　$\mathcal{B}(\Omega)$ が $\mathcal{M}$-convex ならば．

$$(13)\ \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x_1} = f_1(x_1, x_2) \\ \dfrac{\partial v}{\partial x_2} = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad \text{on } \pi^{-1}(y) \qquad \text{但し,}\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$$

が解けることを示せばよい.

$$(14)\ \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} = f_1 \cdot \delta(y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_2} = f_2 \cdot \delta(y) \end{cases} \quad \text{on } \Omega$$

は解 u が存在するので.

それを. $V = \Omega \setminus \pi^{-1}(y)$ に制限すると.

$$(15)\ \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \quad \text{on } V$$

$$\therefore\ u|_V \in \Gamma(V, \mathcal{B}^M) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\pi_1(V), \mathcal{B}_B)$$

補題1より. $\tilde{u} \in \Gamma(\Omega, \mathcal{B}^M)$ が存在して. $\tilde{u}|_V = u$

$w = u - \tilde{u}$ とおけば.

$$(16)\ \begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial x_1} = f_1 \cdot \delta(y) \\ \dfrac{\partial w}{\partial x_2} = f_2 \cdot \delta(y) \end{cases} \quad \text{on } \Omega \quad \text{かつ } \operatorname{supp} w \subset \pi^{-1}(y)$$

よって, $v = \int w\, dy$ は (13) を満たす.

<u>$\Leftarrow$ の証明</u> [4] の記号を用いれば、容易に (17) がわかる.

$$(17)\quad \mathbb{R}\Gamma(B, \mathbb{R}_{\pi_{1*}} \pi_1^{-1} \mathcal{B}_B) = \mathbb{R}\Gamma(\Omega, \pi_1^{-1} \mathcal{B}_B)$$

$$(18)\ \begin{cases} R^0_{\pi_{1*}} \cdot \pi_1^{-1} \mathcal{B}_B = \mathcal{B}_B & (\pi_1 : \textit{open}, \textit{fibre connected}) \\ R^1_{\pi_{1*}} \cdot \pi_1^{-1} \mathcal{B}_B = 0 & (\text{補題2}) \end{cases}$$

よって. $H^1(\Omega, \mathcal{B}^M) = H^1(B, \mathcal{B}_B)$ ((17), (18) より)

$= 0$ (補題 1) Q.E.D.

同様の考察により. 次の定理が示される.

<u>定理5</u> $\mathrm{Ext}^1(M, \mathcal{D}'(\Omega)) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B\text{の位相が Hausdorff.} \\ H^1(\pi^{-1}(y), \mathbb{C}) = 0 \qquad \forall y \in \mathbb{R}^{n-2} \end{cases}$$

証明は次の２つの補題を使う.

<u>補題1</u> $y \in \mathbb{R}^{n-2}$ に対し, $V = \Omega \setminus \pi^{-1}(y)$ とおくと

$$\Gamma(\Omega, \mathcal{D}')|_V \cap \Gamma(V, \mathcal{D}'^M) = \Gamma(\Omega, \mathcal{D}'^M)|_V$$

<u>補題2</u> B が Hausdorff でない $\Rightarrow H^1(B, \mathcal{D}'_B) \neq 0$

<u>証明</u> x, x' を分離されぬ２点とする. $(\pi_2(x) = \pi_2(x'))$

$$\left.\begin{array}{l} U_1 : x \text{ の近傍で } \pi_2 : U_1 \xrightarrow{\sim} \pi_2(U_1) \text{ homeo.} \\ U_2 = B \setminus \{x\} \end{array}\right\} \text{ととる.}$$

$$(19) \quad \begin{array}{ccccc} \to \Gamma(U_1, \mathcal{D}'_B) \oplus \Gamma(U_2, \mathcal{D}'_B) & \xrightarrow{p} & \Gamma(U_1 \cap U_2, \mathcal{D}'_B) & \to H^1(B, \mathcal{D}'_B) \to \\ \psi \qquad\qquad \psi & & \psi & \text{exact} \\ (\varphi_1 \quad , \quad \varphi_2) & \longmapsto & \varphi_1 - \varphi_2 & \end{array}$$

$\pi_2(x) \notin \pi(U_1 \cap U_2) \subsetneqq \pi(U_1) \cap \pi(U_2) = \pi(U_1)$ であるから

$$(20) \begin{cases} \varphi \in \Gamma(U_1 \cap U_2, \mathcal{D}'_B) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\pi(U_1 \cap U_2), \mathcal{D}'_{n-2}) \\ \varphi \notin \Gamma(U_1, \mathcal{D}'_B) \qquad \xrightarrow{\sim} \Gamma(\pi(U_1), \mathcal{D}'_{n-2}) \end{cases}$$

を満たす φ が存在する. 明らかに, $\varphi \notin \mathrm{Im}\, p$. よって, p は surjective でないから $H^1(B, \mathcal{D}'_B) \neq 0$ Q.E.D.

同様に、次の定理も成立する

<u>定理6</u> $\Omega = \mathrm{int}\,\overline{\Omega}$ のとき

$$\mathrm{Ext}^1(M, \mathcal{E}(\Omega)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} B\text{の位相が Hausdorff.} \\ H^1(\pi^{-1}(y), \mathbb{C}) = 0 \qquad \forall y \in \mathbb{R}^{n-2} \end{cases}$$

参考文献

[1] Ehrenpreis : Fourier Analysis in Several Complex Variables , New York.

[2] Palamodov : Linear Differential Operators with Constant Coefficients , Nauka Moskva , 1967.

[3] 佐藤 : Theory of hyperfunctions II , J. Fac. Sci. Univ. Tokyo , Vol. 8 , 1960 , p.p. 387 - 437 .

[4] Hartshorne : Residues and Duality . Lecture Notes in Math. 20 , Springer , Berlin , 1966.

[5] 小松 : Relative cohomology of sheaves of solutions of differential equations , Sem. Lions Schwarts , 1966.

[6] 松浦 : Finite type system of partial differential operators and decomposition of solutions of partial differential equations , 数理研講究録 22 , p.p. 10 - 17.

[7] Hörmander : An Introduction to Complex Analysis in Several Variables , Van Nostrand , Princeton , 1966.

[8] 鈴木 : この報告集にのる講演