数理解析研究所講究録
第 168 巻 1972 年 93-103

多価函数の積分における漸化公式と連分展開の一般化

東大(教養) 青本和彦

§1. 我々は次のような型の積分を対象とする。

(1) $\varphi(\lambda_1\cdots\lambda_m)=\int\prod_{j=1}^{m}P_j(x)^{\lambda_j}\,dx_1\cdots dx_\ell$ 或いは

(2) $\varphi(\lambda_1\cdots\lambda_m)=\int\prod_{j=1}^{m}P_j(x)^{\lambda_j}\cdot e^{\langle x,\zeta\rangle}\,dx_1\cdots dx_\ell$

但し $P_j(x)$は多項式, $\lambda_j\in\mathbb{C}$, $\zeta\in\mathbb{C}^\ell$. これらの積分が対応するモノドロミーによって決まる局所系を係数とする有理コホモロジーとその双対であるホモロジーとの対と考えてよいというのがDeligne-Grothendieckの比較定理であるがこのコホモロジーの有限次元性から(Deligneによって証明されている)2つの重要な帰結がでて来る. その1つは $P_j(x)$

がパラメーター $t_1, \cdots, t_r$ を含む時 上記積分は $(t_1, \cdots, t_r)$ について 最大過剰決定系の線型微分方程式 (Gauß–Mannin connection) を持つという事 さらにもう1つは これから述べようとするのだが 積分を $\lambda_1 \cdots \lambda_m$ の函数（整函数）と思う時 漸化公式を持っているという事である.

<u>例.</u>（ガンマ函数）

(3) $$\hat{\varphi}(x) = \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{x-1}\, dt$$

いま $Y(t) = e^{-t} \cdot t^x$ とおく. $\omega = Y^{-1} dY = \left(\frac{x}{t} - 1\right) dt$

$\{0, \infty\} = S \subset \mathbb{P}^1$ とする. この時

$\Omega^p(*S)$ S でのみ pole を持つ p 次有理型式の空間とすれば 複体 $\nabla_\omega = d + \omega$

$$\nabla_\omega : 0 \to \mathbb{C} \to \Omega^0(*S) \longrightarrow \Omega^1(*S) \longrightarrow 0$$

の 1-コホモロジー $H^1(\mathbb{P}^1 - S)$ は 1次元で その base として $\varphi = \frac{dt}{t}$ をとる. さて

$$\frac{\varphi(t)}{t} = \frac{dt}{t^2} \sim \frac{1}{x-1} \frac{dt}{t} = \frac{\varphi}{x-1}$$

よって $\hat{\varphi}(x-1) = \int \varphi(t) \cdot \frac{dt}{t} = \int \frac{1}{x-1} \varphi(t)\, dt = \frac{\hat{\varphi}(x)}{x-1}$

(4) $\quad$ i.e. $\hat{\varphi}(x) = (x-1)\hat{\varphi}(x-1)$

一般に $X = \mathbb{P}^l - S$ (divisor) とし

$\pi_1(X)$ のスカラー表現（簡単のために）ρ が与えられているとする

(5) $$\rho : \pi_1(X) \longrightarrow \mathbb{C}^* \quad ;$$

対応する connection $Y(x)$ は

(6) $$Y(x) = \prod P_j(x)^{\lambda_j}$$ 或りはス

(7) $$Y(x) = \prod P_j(x)^{\lambda_j} \cdot e^{\langle x, \zeta \rangle}$$

とする。この時 connection form ω は

$$\omega = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{dP_j}{P_j} \text{ 或りは } \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{dP_j}{P_j} + \langle dx, \zeta \rangle$$

で与えられる。(5) によって生ずる局所系を V_ρ とおく。その dual を V_ρ^* とおく。V_ρ を係数とし，(6), (7) によって得られる有理コホモロジー H^p の次元は有限次元である (Deligne)。特から ($p=l$) の場合

(8) $$\hat{\varphi}(\lambda_1+n_1, \cdots, \lambda_j+n_j, \cdots), \quad \hat{\varphi}(\lambda_1+n_1, \cdots, \lambda_j+n_j, \cdots)$$

$(n_1, n_2, \cdots \in \mathbb{Z})$ は そのうち高々有限箇の

$\hat{\varphi}_1, \cdots, \hat{\varphi}_r$ (或いは $\hat{\psi}_1, \cdots, \hat{\psi}_s$) の1次結合で表わされる：

$$(9)\quad \hat{\varphi}(\lambda_1+n_1, \lambda_2+n_2, \cdots) = \sum_{\nu=1}^{r} c^{\nu}_{n_1, n_2, \cdots, n_m}(\lambda)\, \hat{\varphi}_{\nu}$$

或いは

$$(10)\quad \hat{\psi}(\lambda_1+n_1, \lambda_2+n_2, \cdots) = \sum_{\nu=1}^{s} c^{\nu}_{n_1, n_2, \cdots, n_m}(\lambda)\, \hat{\psi}_{\nu}$$

<u>命題1.</u> $c^{\nu}_{n_1, n_2, \cdots}(\lambda)$ は λ, 및び $P_j(x)$ の係数に関して有理式である.

<u>命題2.</u> $\mathbb{H}^l$ の base $\varphi_1, \cdots, \varphi_r$ (或は
(予想)
$\psi_1, \cdots, \psi_s$ を適当にとれば)

$$(11)\quad \hat{\varphi}_j(\lambda_1, \cdots, \lambda_k+1, \cdots, \lambda_n) = \\ = \sum c^{(k)}_{j,i}(\lambda)\, \hat{\varphi}_i(\lambda_1 \cdots \lambda_n)$$

(12) 或は $\hat{\psi}_j(\lambda_1, \cdots, \lambda_k+1, \cdots, \lambda_n) =$

$$= \sum c^{(k)}_{j,i}(\lambda)\, \hat{\psi}_i(\lambda_1 \cdots \lambda_n)$$

とおく時 $C^{(k)}_{i,j}(\lambda)$ は λ の有理式として

高々 $l\cdot d$ である。但し $d=\max_{j}\deg P_j$.

さて $\mathbb{C}^n\supset\mathbb{R}^n\supset\mathbb{Z}^n$ を $\mathbb{R}^n$ の格子点群

G とする時 上記 $C^{(k)}_{i,j}(\lambda)$ は

$$H^1(G\ ;\ GL(r,\mathbb{C}(x)))$$

或いは $H^1(G\ ;\ GL(s,\mathbb{C}(x)))$

の元を決める。すなわち e_i を単位ベクトル

$$e_i=(0,\dots,0,\underset{i\text{番}}{1},0,\dots,0)\in G$$

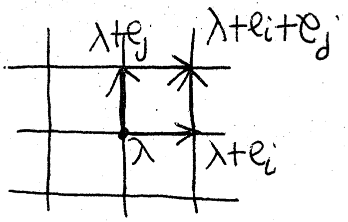
として対応

(13) $\qquad e_i \longrightarrow C^{(i)}(\lambda) \qquad$ ($r\times r$ 又は $s\times s$ の行列)

はつじつまの条件

(14) $$C^{(i)}(\lambda+e_j)\cdot C^{(j)}(\lambda)=C^{(j)}(\lambda+e_i)\cdot C^{(i)}(\lambda)$$

$(i,j\in m)$ をみたす.



今次の仮定をおく：

(15) $\lim_{\lambda\to\infty} C^{(i)}(\lambda)$ は存在してしかもほとんど
方向指定

致る方向において non-singular. この時

命題3. $(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)$ の unimodular 変換

(16) $$\lambda_i = \sum_{j=1}^{m} u_{ij}\,\mu_j$$

$$u_{ij}\in\mathbb{Z}\ ,\quad U=((u_{ij}))\in SL(m,\mathbb{Z})$$

が存在して

(17) $$\left(\hat{\varphi}_i(\lambda_1\cdots\lambda_m)\right)=\lim_{\nu\to\infty}\tilde{C}^{(1)}(\mu_1-1,\mu_2,\cdots)\,\tilde{C}^{(1)}(\mu_1-2,\mu_2,\cdots)\cdots$$
$$\cdots\cdots\ \tilde{C}^{(1)}(\mu_1-\nu,\mu_2,\cdots)\cdot\tilde{T}(\mu_1-\nu,\mu_2,\cdots)$$

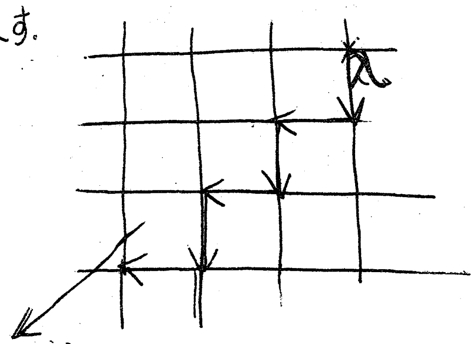
但し $\tilde{C}^{(i)}$ は座標 $(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_m)$ についての e_i に対応する行列. $\tilde{T}$ は次の通り.

(18) $$\tilde{T}(\mu_1\,\mu_2\cdots\mu_m)=\left(\bar{T}(\mu_2\cdots\mu_m)+\frac{\bar{T}^{(1)}(\mu_2\cdots\mu_m)}{\mu_1}+\right.$$
$$\left.+\cdots\right)A_1^{A_1}\cdot A_0^{\mu_1}\ ,\qquad (A_0,\ A_1 \text{ は } \mu_1,\mu_2,\cdots \text{ に}$$

無関係）の形で与えられ

(19) $$\tilde{T}(\cdots \mu+e_i) = \tilde{C}^{(i)}(\mu)\,\tilde{T}(\mu)$$

をみたす. これは 次のような図の方向に 極限をとることを意味す.



μ_1方向

上の事実は G.D. Birkhoff の 1変数の古典的定理をちょっと変更してみたにすぎない. 逆に上記の形で 無限乗積をつくれば それは

(20) $$\hat{\varphi}(\lambda+e_i) = C^{(i)}(\lambda)\,\hat{\varphi}(\lambda)$$

をみたす.

このようにして 無限乗積の一般化が得られる. ここで得られた $\hat{\varphi}$ が (1), (2) のものと同一であるかどうかは漸近展開を調べてみなければ判定出来ない。

§2. しかし 実際の計算をやるのは一般には 複雑なようにみえる. 次に(1)で $P_j(x)$ が線型 且つ $l=2$ の時に ためすことにする.

<u>命題4.</u> $l=2$, $S=$(直線の集まり)
とする。この時 $\lambda_1 \cdots \lambda_m$ が一般ならば $\mathbb{H}^0$, $\mathbb{H}^1$ は消えて $\mathbb{H}^2$ のみ残る。$\mathbb{H}^2$ は次の形をした 2-form で張られる

(21) $$\varphi_{(jk)} = \frac{dP_j}{P_j} \wedge \frac{dP_k}{P_k} \qquad 1 \leq j, k \leq m$$

特に $S=$(完全交差の直線の m ケの集まり)
とすれば $\mathbb{H}^2$ は $\frac{1}{2}(m-2)(m-3)$ 次元。
その base は ∞遠直線を S が含むとした時 $$\varphi_{(jk)} \qquad \begin{array}{l} 1 \leq j \leq m-2 \\ 1 \leq k \leq m-2 \end{array}$$

が base となる。そこで

(22) $$\hat{\varphi}_{(jk)}(\lambda) = \int \prod_{j=1}^{m} P_j^{\lambda_j}(x) \cdot \varphi_{jk}(x) dx_1 dx_2$$
とおくと

(23) $$\hat{\varphi}_{(jk)}(\lambda_1, \cdots, \lambda_l - 1, \cdots) = \qquad j \neq k, \ k \neq l, \ j \neq k$$
$$= \frac{1}{(a_{j2}+a_{k2}) \cdot [P_j, P_k, P_l]} \left(\hat{\varphi}_{(lj)}(\lambda) + \hat{\varphi}_{(jk)}(\lambda) + \hat{\varphi}_{(kl)}(\lambda) \right)$$

$$\hat{\varphi}_{(jk)}(\cdots,\lambda_j-1,\cdots) =$$

$$= \frac{1}{(1-\lambda_j)(a_{k2}-a_{j2})}\Bigg[\sum_{\varkappa\neq k,j}\frac{\lambda_\varkappa}{\beta_{(kj)}-\beta_{(\varkappa k)}}\;\hat{\varphi}_{(kj)}(\lambda)+$$

$$+\sum_{\substack{\varkappa\neq k,j\\ \varkappa\leqq m-2}}\left(\hat{\varphi}_{(j\varkappa)}+\hat{\varphi}_{(\varkappa k)}\right)\cdot\frac{\lambda_\varkappa}{\beta_{(kj)}-\beta_{(\varkappa k)}}+$$

$$+\sum_{l\leqq m-2}\left(\hat{\varphi}_{(lk)}-\varphi_{(lj)}\right)\frac{\lambda_l}{\beta_{(kj)}-\beta_{(lk)}}\Bigg]$$

但し　$j\neq k$,　　$j, k\leqq m-2$　で

$$\beta_{(ij)} = -\frac{a_{i3}-a_{j3}}{a_{i2}-a_{j2}},\quad [P_j P_k P_l] = \begin{vmatrix} 1 & a_{j2} & a_{j3}\\ 1 & a_{k2} & a_{k3}\\ 1 & a_{l2} & a_{l3}\end{vmatrix},$$

$$P_i(x) = x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3$$

とおいた．　この例は 先の命題３ が適用可能である．

問題 1.　$X=\mathbb{P}^l-\{$超平面の集合$\}$　の場合 $(l\geqq 3)$　$\mathbb{H}^p(X)$ は

$$\frac{dP_{i_1}}{P_{i_1}}\wedge\cdots\wedge\frac{dP_{i_p}}{P_{i_p}}$$

で張られるか？*

<u>問題2.</u>　その時の $C^i(\lambda)$ の一般形は？

<u>問題3.</u>　$P_g(x)$ が一般の多項式の時

H^p の base として どんなものを 取ったらよいか？

(最後の問題に対しては皆目見当がつかない.

<u>問題4</u>　(Mellin の代数函数) → (超幾何函数) → (積分表示) によって 連分展開の式が得られる？ 数論への応用？

<u>文献</u>

1) O. Perron　連分数論 I, II

2) 青本和彦　多価函数の積分における桜島・村上型定理（数理研報告）

3) G.D. Birkhoff　~~Oeuvres~~ Collected Mathematical Papers　Vol 1.

4) P. Deligne　Les eq. diff. à points reguliers singuliers. (Springer, Lec. Note)

5) ———　Théorie de Hodge (Mimeographed)

* この事実も本当であることが証明される。そのためには多変数函数の部分分数展開が必要である。正規交叉の時は超コホモロジーの一般論から直ちに出ることが浪川氏によって注意された。

6) 佐藤幹夫　超幾何函数の特徴づけ
(東大での講義録)

7) G. Belardinelli　Fonctions hyper-géométriques de plusieurs variables et Resolution analytique des équations algébriques générales, Gauthier-Villars