

Linear extension operator について

早大 教育 和田淳藏

§1. 序

A, B を complex Banach space とし、 R を A から B の上への有界な線型作用素とする。そのとき R の右逆有界線型作用素 T 、すなわち B から A への有界線型作用素で $RT = I$ (B の上の恒等写像) となる T が存在するかという問題を考へる。その特別な場合として、 M を complex Banach space、 N を M の閉線型部分空間とし、 R を M から M/N への natural mapping としたとき $M/N \rightarrow M$ で $RT = I$ となる有界な線型作用素 T を求めるのが linear lifting の問題である。また X を位相空間、 F を X の閉部分集合とし、 A を $C(X)$ (X の上の複素値有界連続関数全体の Banach space) の閉線型部分空間、 B を $C(F)$ の閉線型部分空間とし、 $A|_F$ (A の F での制限) $= B$ とする。ここで R を restriction operator, すなわち $R: f \rightarrow f|_F$ ($A \rightarrow B$) とする。そのとき $RT = I$ となる有界な線型作用素 $T: B \rightarrow A$ を求めるのが

linear extension の問題であり、もしそのような \mathcal{T} が存在すれば、それを linear extension operator という (もっと一般にベクトル値連続関数の空間 $C(X, E)$ で論じられることもある)。安藤氏 ([1], [2]) はこれ等の問題を統一的に、一般の (complex or real) Banach space の立場から取扱い、結果を得られた。ここでは特に linear extension operator の問題について考えて見る。Linear extension operator は古くから Borsuk [4] によって論じられたがその後 Kakutani [4], Dugundji [8], Pełczyński [6], [17], Michael-Pełczyński [5] などによって発展した。最近では function algebra の linear extension operator が多くの人々によって論じられている。それを中心話題にして行くことにする。

§2 基礎定理

X を位相空間、 $F \subseteq X$ の閉部分集合とする。 H を $C(X)$ の閉線型部分空間、 E を $C(F)$ の閉線型部分空間とし、 $H|_F \supseteq E$ とする。 E から H への有界な線型作用素 T が linear extension operator であるとは、 $\forall f \in E$ で $(Tf)|_F = f$ となることである。勿論、つねに linear extension operator が存在するとは限らない (この定義の方が §1 より一般である)。

例 1. N を自然数からなる discrete space としたとき

$C(\beta N - N)$ から $C(\beta N)$ への linear extension operator は存在しない。linear extension operator を論ずる際には、しばしば X または F を metric と仮定するが、その必要性がこの反例からわかる (cf. [18])。

X を位相空間、 E をノルム空間とする。 $C(X, E)$ を E に値をとる X の上の有界連続関数全体とし、 $C(X, E) \ni f$ に対して $\|f\| = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$ でノルムを定義する。

定理 2.1 (Borsuk-Dugundji) X を metric space, F を X の閉部分集合とする。そのとき $T: C(F, E) \rightarrow C(X, E)$, $\|T\| = 1$ となる linear extension operator T が存在する。そして $\forall g \in C(F, E)$ に対して Tg は $g(F)$ の convex hull に含まれる。

定義 X を位相空間、 F を X の閉部分集合とし、 H, E をおのおの $C(X), C(F)$ の閉線型部分空間とする。 (E, H) が bounded extension property をもつとは、 $\forall f \in E, \forall \varepsilon > 0$ に対して $\exists \{f_{\varepsilon, W} : W \supset F, W \text{ は } X \text{ で open}\} \subset H$ が、 $\|f_{\varepsilon, W}\| \leq M$ (M は W に関係しない)、 $|f_{\varepsilon, W}(x)| \leq \varepsilon$ ($x \in X - W$) かつ $f_{\varepsilon, W}|_F = f$ となるように存在することである。 (E, H) が dominated extension property をもつとは X の上の任意の有界正連続関数 $p(x)$ ($p(x) \geq \varepsilon > 0$) と、 $|f(x)| \leq p(x)$ ($x \in F$) となる $f \in E$ に対して $g \in H$

が $\exists f \in F, |g(x)| \leq p(x) (x \in X)$ となるように存在することである。 X が normal なら (E, H) が bounded extension property をもつことと、 dominated extension property をみたすことは同等である (cf. [15])。

つぎは Michael - Pelczyński [15] によって与えられた。

定理 2.2 X は compact metric space として、 $(C(F), H)$ が bounded extension property をみたすとする。そのとき $T: C(F) \rightarrow H, \|T\| = 1$ となる linear extension operator T が存在する。

定義 separable Banach space E が π_1 -space であるとは、 E の有限次元部分空間の列 $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ として $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ が E で dense となるものが存在して、 E から E_i ($i=1, 2, 3, \dots$) の上への 1 から 1 の projection が存在するときをいう。 F が compact metric のとき、 $C(F)$ は π_1 -space となる。

定理 2.3 X を位相空間、 E を π_1 -space として、 (E, H) が bounded extension property をみたすとする。そのとき $T: E \rightarrow H, \|T\| = 1$ となる linear extension operator T が存在する。

定義 separable Banach space E が metric

approximation property をもつとは、finite rank の線型作用素の列 $P_n: E \rightarrow E$, $\|P_n\| \leq 1$ が存在して、 $\forall f \in E$ で $\|P_n f - f\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) となることをいふ。
 E が π_1 -space なる metric approximation property をみたす。上の定理 2.3 はつきのように modify される ([6])。

定理 2.4 X を位相空間、 E が metric approximation property をみたすと仮定する。ここで (E, H) が bounded extension property をみたすとすれば、 $T: E \rightarrow H$, $\|T\| = 1$ となる linear extension operator T が存在する。

いま $T: C(F) \rightarrow H$, $\|T\| = 1$ となる linear extension operator T を考える。 $H \ni 1$ としたとき $T(1) = 1$ となるであろうか。あとの例 2 で示すように、これは一般には成立しないが、 H が自己随伴 ($f \in H$ なる $\bar{f} \in H$) ならばよい。

定理 2.5 X を compact metric space, H を自己随伴でかつ $(C(F), H)$ を bounded extension property をみたし、 $H \ni 1$ とする。そのとき $T: C(F) \rightarrow H$, $\|T\| = 1$, $T(1) = 1$ となる linear extension operator T が存在する。

例 2. X を \mathbb{C} の上の単位円、 F を X の上の Lebesgue measure 0 の閉部分集合で少くとも 2 点をもつとする。 H を disk algebra としたとき、 $(C(F), H)$ は定理 2.2 の仮定をみたす。ゆえに $T: C(F) \rightarrow H$, $\|T\|=1$ となる linear extension operator T の存在は言えるが、 $C(F) \rightarrow H$, $\|T\|=1$, $T(1)=1$ となる linear extension operator は存在しない (cf. [5])。

§ 3. Peak set.

X を compact metric space とし、 A を X の上の function algebra とする。いま F を A の peak interpolation set とし、 F に関する peaking function を p とする。すなわち $F = \{x \in X : p(x) = 1\}$ かつ $x \notin F$ なら $|p(x)| < 1$ ($p \in A$)。そのとき $\forall f \in C(F)$ に対して f の extension を g とすれば、 $\{g p^n; n=1, 2, 3, \dots\}$ が bounded extension property の仮定をみたすから、定理 2.2 より $T: C(F) \rightarrow A$, $\|T\|=1$ となる linear extension operator が存在する。ここでは A を単に $C(X)$ の閉線型部分空間とし、 $A|_F$ が $C(F)$ で閉である場合を考える。その時に peak set に相当するものを定義する。

定義 X を compact Hausdorff space で、 H を $C(X)$ の閉線型部分空間とする。 X の閉部分集合 F が H の sharp

peak extension set であるとは、 $\forall f \in H|F$, $\|f\|_F < 1$,
 $K \cap F = \emptyset$ となる X の任意の閉部分集合 K と $\forall \varepsilon > 0$ に対
 して、 $\exists g \in H$ して $g = f$ on F , $\|g\| < 1$, $|g| < \varepsilon$ on K とな
 ることである。

sharp peak extension set はつぎのような性質をもつ。

(1) F を H の sharp peak extension set とし、 $f \in H|F$
 とする。 $p \in C(X)$, $p > 0$ して $p(x) \geq |f(x)|$ ($x \in F$) と
 すれば、 $\exists g \in H$ して $g = f$ on F , $|g(x)| \leq p(x)$ ($x \in X$)。

(2) F が H の sharp peak extension set であるための
 必要条件は $\forall \mu \in H^+$ して $\mu_F \in H^+$ 。

(3) H を X の上の function algebra として、 F を X の閉部
 分集合とする。 F が H の sharp peak extension set とな
 ることと、 H の p -set (peak set の intersection) となる
 ことは同等である (cf. [5], [9], [10])。

つぎは Curtis [5] によつて与えられた。

定理 3.1. H を $C(X)$ の閉部分空間とし、 F を H の
 sharp peak extension set、かつ $\overbrace{H|F \text{ は basis をもつとする}}^{\text{HIF は basis をもつとする}}$ 。そのとき $T: H|F$
 $\rightarrow H$ となる linear extension operator T が存在する。
 もし K を X の閉部分集合で $K \cap F = \emptyset$, かつ $0 < \eta < 1$
 なら $|Tf(x)| \leq \eta \|f\|$ ($x \in K$) となるようにできる。

この証明には、つぎの補題が必要となる。

補題 3.2 H を $C(X)$ の閉線型部分空間とし、 F を H の sharp peak extension set とする。 $\{f_n\}$ を $H \cap F$ の関数列とすれば、 $\exists \{\tilde{f}_n\} \subset H$ でつぎをみたす。

$$(1) \quad \tilde{f}_n = f_n \text{ on } F \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

$$(2) \quad \|\tilde{f}_n\| = \|f_n\|_F.$$

(3) 有界な複素数列 $\{\lambda_n\}$ で $\sum \lambda_n f_n$ が F の上で一様収束すれば $\sum \lambda_n \tilde{f}_n$ も X の上で一様収束する。

定理 3.1 の略証. $H \cap F$ の basis を $\{f_n\}$ としたとき、上の補題で求められた関数列を $\{\tilde{f}_n\}$ とする。 $\forall f \in H \cap F$ に対して $f = \sum \lambda_n(f) f_n$ の形となる。線型汎関数の列 $\{\lambda_n\}$ は一様有界なるゆえ、上の (3) より $\sum \lambda_n(f) \tilde{f}_n$ は一様収束する。ゆえに $Tf = \sum \lambda_n(f) \tilde{f}_n$ とおけば、 $T: H \cap F \rightarrow H$ は linear extension operator となる。

いま H を $C(X)$ の閉線型部分空間とし、つぎをみたすとする。 (*) $\forall \mu \in H^\perp$ に対して $\mu_F = 0$ 。このとき F は H の sharp peak extension set かつ $H \cap F = C(F)$ となる。ゆえに sharp peak extension set の性質 (1) より $(C(F), H)$ は dominated extension property をみたす。これは Rudin-Carleson-Bishop の定理として知られている (cf. [3])。

定理 3.3 X を compact metric space とし、 H を

$C(X)$ の閉線型部分空間とする。もし F が (*) をみたせば、 $T: C(F) \rightarrow H$, $\|T\| = 1$ となる linear extension operator T が存在する。

これは F が sharp peak extension set かつ $H|_F = C(F)$ となることから定理 2.2 より明らか。

§ 4. Function algebra の場合

A を compact Hausdorff space X の上の function algebra とし、 F を A の interpolation set、すなわち $A|_F = C(F)$ となる X の閉部分集合とする。 F を extension constant $C \in \mathbb{R}$ に対する interpolation set (type $I(C)$) であるとは、 $\forall f \in C(F)$ に対して $\exists g \in A$ が $g = f$ on F , かつ $\|g\|_X \leq C \|f\|_F$ となることとする。 F が type $I(1^+)$ であるとは、 $\forall f \in C(F)$, $\forall \varepsilon > 0$ に対して $\exists g \in A$ が $g = f$ on F かつ $\|g\|_X \leq (1 + \varepsilon) \|f\|_F$ のようになることである。 F が p -set である interpolation set たる type $I(1)$, F が Gamelin [9] の意味で $e(A|_F) = 1$ のような interpolation set たる type $I(1^+)$ となる。

つぎの 2 つは Varopoulos [19] によって与えられた。

定理 4.1 A を compact Hausdorff space X の上の function algebra, F を metric かつ type $I(1)$ とする。そのとき $T: C(F) \rightarrow A$, $\|T\| = 1$ となる linear

extension operator T が存在する。

定理 4.2 A は X の上の function algebra, F は metric かつ type $I(1^+)$ とする。そのとき $\forall \varepsilon > 0$ に対し $T_\varepsilon: C(F) \rightarrow A$, $\|T_\varepsilon\| < 1 + \varepsilon$ となる linear extension operator T_ε が存在する。

任意の interpolation set については、一般に linear extension operator は存在しない。

例 3 ある compact metric space X と、その上の function algebra A 、そして A のある interpolation set F で、 $C(F) \rightarrow A$ となる linear extension operator が存在しないことを示す ([6])。

$X = \{z = (z_1, z_2, \dots) : |z_i| \leq 2\}$ に weak topology を入れる。これは compact metric space である。 A は z_1, z_2, z_3, \dots のすべての多項式の集合の X の上での閉包とする。 A は X の上の function algebra である。つきに $\{f_1, f_2, f_3, \dots\} \in C_0$ の unit ball の中で dense にとる。ここで $(f_j)_i = 0$ (十分大きな i で) と仮定出来る。 $x_i \in X$ は $(x_i)_j = (f_j)_i$ で定義する。 $\forall j$ で $(x_i)_j \rightarrow 0$ ($i \rightarrow \infty$) なる中、 $x_i \rightarrow 0 = (0, 0, 0, \dots)$ 。ここで $F = \{0\} \cup \{x_1, x_2, \dots\}$ とおけば F は A の interpolation set かつ $C(F) \rightarrow A$ となる linear extension operator

が存在しないことが証明出来る。

さて A を X の上の function algebra, $X \supset F$ を metric 上の interpolation set とする。また F_0 を X の 閉部分集合で $F \supset F_0$ とする。もし $C(F) \rightarrow A$ となる linear extension operator T が存在すれば、 $C(F_0) \rightarrow A$ となる linear extension operator T_0 も $\|T_0\| = \|T\|$ のように存在することは容易にわかる。これは 定理 2.1 により $\varphi: C(F_0) \rightarrow C(F)$, $\|\varphi\| = 1$ となる linear extension operator φ が存在するからである。では和集合の場合はどうなるか。つぎの 2 つの定理がそれに答える。

定理 4.3 A を compact metric space X の上の function algebra, F を type I(C) の集合とする。 $\exists M > 0$ で peak point でない $\forall x \in F$ で、ある x の 近傍 $V(x)$ で $F \cap \overline{V(x)}$ が $\|L\| \leq M$ の linear extension operator をもつとする。そのとき F も linear extension operator (その $\|L\|$ は M と C とに depend する) をもつ。

定理 4.4 A を compact metric space X の上の function algebra, F を interpolation set で $F = F_1 \cup F_2$ (F_1, F_2 とともに X の 閉部分集合) とする。もし F_1, F_2 がともに linear extension operator をもてば、 F も linear extension operator をもつ。

すでに示されたように、interpolation set は linear extension operator をもつとは限らない。つきに concrete な function algebra の interpolation set が linear extension operator をもつかどうか考えて見る。

D を \mathbb{C}^n の中の bounded open subset. $A(D)$ を D の上で連続で D で analytic な関数全体の function algebra とする。

定理 4.5. A を $A(D)$ を含む D の上の function algebra で $\forall p \in \partial D$ は A の peak point とする。そのとき A の任意の interpolation set は linear extension operator をもつ。

(注) D が "strictly pseudoconvex domain" で C^2 boundary をもてば $A = A(D)$ は定理 4.5 の条件をみたす (cf. [2]).

つきに $D = \Delta^n$ (polydisc, $n \geq 2$) としたとき、 D は定理 4.5 の条件をみたさない。しかしつきが成立つ。

定理 4.6. $A(\Delta^n)$ の任意の interpolation set は linear extension operator をもつ。

また X を compact plane set で、 $R(X)$ を X の外側に pole をもつ rational function 全体の X の上での閉包とする。

定理 4.7. $R(X)$ の任意の interpolation set は linear

extension operator をもつ。

(注) 定理 4.3 — 4.7 は Davie [6] による。Dufresnoy [7] も類似な結果を得た。

さて function algebra の linear extension operator を論ずる場合、 X または F に metric space の条件がつけられているが、それをはずして任意の位相空間または compact Hausdorff space で考える際は、別に強い条件を入れなければ成立しない。例之は A を compact Hausdorff space X の上の function algebra とし、その essential set E_A が $\partial A|E_A$ に一致すると仮定する。そのとき interpolation set F が閉かつ閉ならば F は linear extension operator をもつ。つぎに interpolation set F が G_δ set となる場合を考えて見る。いま X を compact F -space とする。位相空間 X が F -space であるとは、disjoint な 2 つの F_σ open set が disjoint closure をもつときをいう。自然数全体 \mathbb{N} の Čech compactification $\beta\mathbb{N}$ は F -space である。ところで X の上の function algebra A が $E_A = \partial A|E_A$ をみたせば、 G_δ set となる interpolation set F は peak interpolation set となる ([20])。しかし F が peak interpolation set となつても F が linear extension operator をもつとは限らない。 A を $\beta\mathbb{N}$ の上の Hoffman-Ramsay ([13]) に

よって与えられた function algebra とする。ここで $E_A = \partial A \in E_A$ かつ E_A は $\beta N - N$ の proper subset とする。ゆえに E_A と disjoint な open から closed な infinite subset $F \subset \beta N$ が与えられる。ゆえに $\exists N_1 \subset N$ として $F = \overline{N_1}^{\beta N}$ (cf. [1])。ここで $F_0 = F - N_1$ とおく。勿論 $F_0 \subset X - E_A$ である。よって F_0 は peak interpolation set。しかし F_0 は linear extension operator をもたない。なぜなら $F = \beta N_1$, $F_0 = \beta N_1 - N_1$ と考えられることから例1より明らか。ゆえに linear extension operator を考える際は F -space を含めた広範囲な空間で考えることは出来ない。

Davie [6] は上記のような興味ある問題を出している： A を finitely generated function algebra とする。すなわちある n で \mathbb{C}^n の compact subset X として $A = P(X)$ となるとき、 A のすべての interpolation set は linear extension operator をもつか？ 今までに示したように、特別な場合には問題は解けている。

文 献

- [1] T. Ando: Closed range theorems for convex sets and linear liftings, to appear (Pacific J. Math).
 [2] 安藤毅: Dominated extension と linear lifting,

"Function Algebra" 数理解析研究所講究録 143 (1972年5月).

[3] E. Bishop: A general Rudin - Carleson theorem,
Proc. Amer. Math. Soc., 13 (1962) 140-143.

[4] K. Borsuk: Über Isomorphie der Funktionalräume,
Bull. Int. Acad. Polon. Sci., (1933) 1-10.

[5] P. C. Curtis: Topics in Banach Spaces of Continuous
Functions, Lecture Notes Series NO. 25 (University of Aarhus)
1970.

[6] A. M. Davie: Linear extension operators for spaces
and algebras of functions, to appear.

[7] A. Dufresnoy: Sur les compacts d'interpolation
du spectre d'une algèbre uniforme et la propriété
d'extension linéaire bornée, C. R. Acad. Sc., t 273
(1971) 568 - 571.

[8] J. Dugundji: An extension of Tietze's theorem,
Pacific J. Math., 1 (1951) 353-367.

[9] T. W. Gamelin: Restrictions of subspaces of
 $C(X)$, Trans. Amer. Math. Soc., 112 (1964) 278-286.

[10] ———: Uniform Algebras, Prentice-Hall,
1969.

[11] L. Gillman and M. Jerison: Rings of Continuous

Functions, Van Nostrand, 1960.

[12] R. C. Gunning and H. Rossi: *Analytic Functions of Several Complex Variables*, Prentice-Hall, 1965.

[13] K. Hoffman and A. Ramsay: *Algebras of bounded sequences*, *Pacific J. Math.* 15 (1965) 1239-1248.

[14] S. Kakutani: *Simultaneous extension of continuous functions considered as a positive linear operation*, *Japan. J. Math.* 17 (1940) 1-4.

[15] E. Michael and A. Pełczyński: *A linear extension theorem*, *Illinois J. Math.* 11 (1967) 563-579.

[16] A. Pełczyński: *On simultaneous extensions of continuous functions*, *Studia Math.*, 24 (1964) 285-304.

[17] ———: *Supplement to my paper "On simultaneous extensions of continuous functions"*, *Studia Math.*, 25 (1964-5) 157-161.

[18] Z. Semadeni: *Banach Spaces of Continuous Functions*, Vol. 1, 1971 (Monografie Matematyczne 55, Warszawa).

[19] N. Th. Varopoulos: *Un problème d'extension linéaire dans les algèbres uniformes*, *Ann. Inst. Fourier* 21 (1971) 263-270.

[20] J. Wada: *On the union of interpolation sets*, *Yale Univ. に お け る 研 究 報 告* (1971).