数理解析研究所講究録
第169巻 1972年 33-48

測度代数のL-イデアルについて

北大 応電　清水誓宏
東教大 理　泉池敬司

§1. 序

測度代数のL-イデアルの研究は今までにJ.L. Taylor [9], N.T. Varopoulos [11], C.C. Graham [1], T. Shimizu [8] 等がある。しかしながら maximal ideal space の構造があまりわかっていないこともあって，まだL-イデアルについて十分にわかっているとはいえない。ここでは Taylor [9] の maximal ideal space が semigroup になるという結果を利用して，L-イデアルの Gelfand 変換の共通ゼロ点集合の性質とその応用について今までわかっている結果を述べてみたいと思う。§2ではL-イデアルのゼロ点集合が maximal ideal space の中でイデアルになることを示し，それに関係する話題について述べたい。§3においては§2での結果を応用して，特殊なL-イデアル，つまり non-symmetric homo からなる集合上で vanish しているものからなるL-イデアルについて

の結果を述べる。

§2. L-idealの共通ゼロ点集合.

Gをnondiscrete L.C.A. groupとし，Γをそのdual groupとする。$M(G)$, $L^1(G)$をそれぞれG上のbounded regular Borel measureからなる集合，G上のHaar measureに関して絶対連続なbounded regular Borel measureからなる集合とする。両者ともtotal variation normとconvolution productでsemisimple commutative Banach algebraと考えることができる。

$M(G)$のclosed subspace NがL-subspaceであるとはNの元μに対して絶対連続な$M(G)$の測度がすべてNに含まれる時にいう。特にclosed ideal (closed subalgebra)でL-subspaceになっているものをL-ideal (L-subalgebra)という。L-ideal Iに対して

$$I^{\perp} = \{\mu \in M(G) : \mu\text{は}I\text{のすべての元と互いにsingular}\}$$

がsubalgebraをなす時にIをprime L-idealと呼ぶことにする。まず初めにJ. L. Taylor [9]による所の$M(G)$のmaximal ideal spaceの構造定理を紹介する。

定理 (Taylor). $M(G)$に対して次の性質をもつcompact topological semigroup Sと写像θが存在する。

① $\theta : M(G) \longrightarrow M(S)$ は isometric into isomorphism.

② θ の像は $M(S)$ で weak $*$ dense な L-subalgebra.

③ $M(G)$ の maximal ideal space は S 上の continuous semicharacter ($f(xy) = f(x)f(y)$) の集合 $\hat{S}$ と1対1の対応があって，その対応は次の形をしている。

$$\mu \longrightarrow \hat{\mu}(f) = \int_S f \, d\theta\mu \ , \quad {}^{\forall}\mu \in M(G) \ 。$$

以後，$M(G)$ の maximal ideal space は $\hat{S}$ で考えることにする。$\hat{S}$ は pointwise product で semigroup をなすことは容易にわかり，weak $*$ topology で separately continuous topological semigroup になっている。G の dual group Γ は $\hat{S}$ の中にうめ込めて $\{f \in \hat{S} : |f| = 1\}$ と isomorphic になっている。詳しいことは Taylor[9] を参照。又 ② より $\mu \in M(G)$, $f \in \hat{S}$ に対して $d\theta\mu_f = f d\theta\mu$ をみたす $\mu_f \in M(G)$ が存在することがわかる。

命題 2.1. $M(G)$ の closed subspace N が次の (*) の条件をみたせば，N は L-subspace である。

(*) ${}^{\forall}\mu \in N$, ${}^{\forall}f \in \Gamma$ に対して $\mu_f \in N$ 。

証明. $\bar{G}$ を G の Bohr compactification (Γ_d の dual group) とする。$\mu \in M(G)$ と $\bar{G}$ の任意の Borel set E に対して $\Phi\mu(E) \equiv \mu(E \cap G)$ とおくことによって $M(G)$ から $M(\bar{G})$ の中

への isometric isomorphism Φ を得る。又 Γ を $\hat{G}$ 上の関数と考えれば，Γ より生成される subalgebra は Stone－Weierstrass の定理より $C(\hat{G})$ で dense になっている。$f\in\Gamma$ に対して，$d\Phi(\mu_f)=fd\Phi\mu$ であることから $\Phi(N)$ が $M(\hat{G})$ で L-subspace になることがわかり，N は $M(G)$ でも L-subspace になっていることがわかる。

系 2.2. $M(G)$ の closed ideal I に対して次は同値である。

① I : L-ideal。

② 命題 2.1 の (*) の条件をみたす。

③ $^\forall\mu\in I$, $^\forall f\in\hat{S}$ に対して $\mu_f\in I$。

二つの L-ideal I_1, I_2 に対して $\{\mu*\nu : \mu\in I_1, \nu\in I_2\}$ より生成される closed subalgebra を $[I_1*I_2]$ で表わすことにする。

系 2.3. 二つの L-ideal I_1, I_2 に対して $[I_1*I_2]$ は L-ideal である。

証明。 $[I_1*I_2]$ は (*) の条件をみたす closed ideal になっている。

$\mu\in M(G)$ に対して $L(\mu)=\{\nu\in M(G) : \nu$ は μ に対して絶対連続$\}$ とおく。

系 2.4 closed ideal I に対して，もし $\mu\in I$ ($\mu\neq 0$)

$L(\mu)\subset I$ なるものが存在するならば $\hat{I}=\{\nu\in I: L(\nu)\subset I\}$ は L-ideal である。

次に L-ideal の Gelfand 変換について調べるためにいくつかの定義をする。

定義. $\Sigma\subset\hat{S}$ が Γ-invariant であるとは $\forall f\in\Sigma$, $\forall g\in\Gamma$ に対して $f\cdot g\in\Sigma$ であるときにいう。

定義 $M(G)$ の subset N に対して
$Z(N)\equiv\{f\in\hat{S}: \hat{\mu}(f)=0, \forall\mu\in N\}$ とおく。$\hat{S}$ の subset Σ に対して $I(\Sigma)\equiv\{\nu\in M(G): \hat{\nu}(g)=0, \forall g\in\Sigma\}$ とおく。

定理 2.5. L-ideal I に対して $Z(I)$ は Γ-invariant である。それ以上に closed ideal でもある。又 $\hat{S}$ の Γ-invariant subset Σ に対して $I(\Sigma)$ は L-ideal である。

証明. $\forall f\in\Gamma$, $\forall\mu\in I$ に対して $\mu_f\in I$ である。$g\in Z(I)$ に対して $\hat{\mu}_f(g)=\hat{\mu}(f\cdot g)=0$ であることから $f\cdot g\in Z(I)$ を得る。よって $Z(I)$ は Γ-invariant である。$Z(I)$ が ideal になることも同様にやればよい。

逆に Γ-invariant subset Σ に対して，系 2.2 により $I(\Sigma)$ が L-ideal になることは明らかである。

次に L-ideal が Γ-invariant subset に対して定理 2.5 より決定される L-ideal であるための同値条件をあげる。証明は定理 2.5 を吟味すればよい。

定理2.6. $M(G)$ の L-ideal I に対して次は同値である。

① $I = I(\Sigma)$ となる Γ-invariant subset Σ が存在する。

② I は maximal ideal のいくつかの intersection で表わされられる。

③ I は prime L-ideal のいくつかの intersection で表わされられる。

④ $I = I(Z(I))$。

注意、定理2.6の条件をみたさない L-ideal も存在する。たとえば $L^1(G)$ がそうである。

定理2.5 の前者の逆について次の事がわかっている。

定理2.7. $M(G)$ の L-ideal I に対して $[M_c * I] \neq I$ ならば L-ideal ではない closed ideal I_0 で $Z(I_0) = Z(I)$ となるものが存在する。ただし M_c は continuous measure よりなる L-ideal とする。

実際に N. T. Varopoulos [11] によって $[M_c * M_c] \neq M_c$ であることがわかっているから、L-ideal ではない closed ideal でそのゼロ点集合が Γ-invariant になるものが存在することがわかる。つまり Γ-invariant であることが closed ideal が L-ideal であるための十分条件にはなり得ないことがわかる。

最後にいくつかの問題を述べることにする。

(1)（group algebra における Helson の定理と関係して）
I_1, I_2 を L-ideal で $I_1 \subsetneqq I_2$, $Z(I_1) = Z(I_2)$ とする。その時に
$I_1 \subsetneqq I_0 \subsetneqq I_2$, $Z(I_0) = Z(I_1)$ をみたす L-ideal（又は closed ideal）I_0 は存在するか？ 特に I_2 として $L^1(G)$ の radical の場合には存在するのか？

(2) 次の条件をもつ L-ideal I は存在するのか？

(#) I と異なる L-ideal I_1 に対していつでも $Z(I) \neq Z(I_1)$

又は

(#′) いかなる closed ideal I_2 $(I_2 \neq I)$ に対しても $Z(I) \neq Z(I_2)$

(3) closed ideal I に対して，もし $Z(I)$ が proper closed ideal ならば系2.4の仮定がみたされ $\tilde{I}$ は L-ideal である。
その時に $Z(I) = Z(\tilde{I})$ か？

§3. $M(\Delta)$ について.

$M(G)$ に involution が次の様に定義できる。

$$\mu^*(E) \equiv \overline{\mu(-E)}, \quad E \text{ は任意の } G \text{ の Borel set.}$$

その involution で $M(G)$ を Banach $*$ algebra と考える時，
Δ を symmetric homo 全体の集合とする。つまり

$$\Delta \equiv \{f \in \hat{S} ; \hat{\mu^*}(f) = \overline{\hat{\mu}(f)}, \ {}^\forall \mu \in M(G)\}。\text{そして}$$

$M(\Delta) \equiv \{\mu \in M(G) ; \hat{\mu}(f) = 0, \ {}^\forall f \in \hat{S} \setminus \Delta\}$ とおく。この $M(\Delta)$ は最初 J.H. Williamson [12] によって導入され，T. Shimizu [8] に

よってproper L-idealになっていることが示された。§2の結果を使ってその事を示す。

命題3.1. $\hat{S}\setminus\Delta$はΓ-invariantである。

証明. $f\in\Gamma$, $\mu\in M(G)$に対して次がなりたつ。$\forall g\in\Gamma$に対し,

$$\widehat{\mu^*_f}(g)=\overline{\int_G g\,d\mu_f}=\overline{\int_G g\cdot f\,d\mu}=\int_G g f\,d\mu^*=\int_G g\,d(\mu^*)_f\text{。}$$

よってRudin[7] Th.1.3.6によって$(\mu_f)^*=(\mu^*)_f$, $\forall f\in\Gamma$である。次に$f\in\Gamma$, $g\in\Delta$, $\mu\in M(G)$に対して

$$\begin{aligned}\widehat{\mu^*}(f\cdot g)&=\int_S f\cdot g\,d\theta(\mu^*)=\int_S g\,d(\mu^*)_f=\int_S g\,d(\mu_f)^*\\&=\overline{\int_S g\,d\mu_f}=\overline{\int_S g\cdot f\,d\mu}=\overline{\hat{\mu}(f\cdot g)}\text{。}\end{aligned}$$

よって$f\cdot g\in\Delta$である。これはΔがΓ-invariantであることを示している。これより$\hat{S}\setminus\Delta$がΓ-invariantであることは明らかである。

注意. Δがclosed subsemigroupになることも,命題3.1の証明と同様にしてわかる。$\hat{S}\setminus\Delta$はidealにはなり得ない。

命題3.1と定理2.5より$M(\Delta)$がL-idealであることを知ることは容易である。又これはWilliamsonの問題([12])に対する肯定的な解答でもある。

定理3.2. $M(\Delta)$はproperなL-idealである。特に

$M(\Delta)\subset M_c$。

これから定理3.2の拡張を考えてみることにする。G_dでGにdiscrete topologyが備わったL.C.A. groupを表わすことにする。すると$M_c = (M_d)^{\perp} = M(G_d)^{\perp}$である。$G_\tau$でもとのtopologyより真に強い$G$をL.C.A. groupにするtopology τを備えたものとするとき、自然に$M(G_\tau) \subset M(G)$と考えることができるのであるが(J. Inoue [3])、
$M(\Delta) \subset M(G_\tau)^{\perp}$が成立するであろうという予想がたつ。
もう少し一般化するためにRaikov systemを考えることにする。

定義. F_σ-setのcollection $\mathfrak{F}$がRaikov systemであるとは次の条件をみたすときにいう。

① $A \in \mathfrak{F}$に対してAのsubsetでF_σ-setはすべて$\mathfrak{F}$に属している。

② $A \in \mathfrak{F} \Rightarrow A + x \in \mathfrak{F}$ ($\forall x \in G$).

③ $A \in \mathfrak{F} \Rightarrow A + A \in \mathfrak{F}$.

④ $A_n \in \mathfrak{F}$ $(n = 1, 2, \cdots) \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{F}$.

特に次の⑤の条件をみたす時にsymmetric Raikov systemという。

⑤ $A \in \mathfrak{F} \Rightarrow -A \in \mathfrak{F}$.

1つのF_σ-setを含む最小のRaikov systemであるものをone generated Raikov systemという。

Raikov system $\mathfrak{R}$ に対して $M(\mathfrak{R})$ を次の様に定義する。

$M(\mathfrak{R}) \equiv \{\mu \in M(G) : \mu$ はある $\mathfrak{R}$ の元上に concentrate している$\}$

すると $M(\mathfrak{R})^{\perp}$ は prime L-ideal になる。所で $M(G_\tau)$ に対して one generated Raikov system $\mathfrak{R}$ で $M(G_\tau) = M(\mathfrak{R})$ となるものが存在する。このことから定理3.2は一般の Raikov system $\mathfrak{R}$ に対して $M(\Delta) \subset M(\mathfrak{R})^{\perp}$ が成立するのではないかという予想もできる。

定義. G の subset $E(\ni 0)$ に対して, $F \subset G$ が $(E,1)$-indep であるとは, 相異なる $x_1, \cdots, x_N \in F$ と正整数 $n_1, \cdots, n_N$ に対して $\sum_{i=1}^{N} n_i x_i \in E$ が成立するのは $n_i = 0$, $1 \leq i \leq N$ の時だけのときにいう。

補題3.3. $\mathfrak{R}$ が one generated proper symmetric Raikov system ($G \neq \mathfrak{R}$ のとき proper と呼ぶ) とする。$\mathfrak{R}$ の生成元を H とする時 (group と考えてよい), もし perfect compact $(H,1)$-indep set P が存在するならば $M(\Delta) \subset M(\mathfrak{R})^{\perp}$ である。

証明. μ_0 を positive continuous measure で P に concentrate していて $\|\mu_0\| = 1$ とする。$\mu \equiv \frac{1}{2}(\mu_0 + \mu_0^*)$ とおくと $\mu = \mu^*$ であり μ は $Q = P \cup (-P)$ に concentrate している。一方 $\omega_0 \in M(\mathfrak{R})$ positive measure で $\|\omega_0\| = 1$ なるものに対して $\omega \equiv \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega_0^*)$ とおく。Williamson [13] Prop 2 より)

$\mu^{n_1}\omega^{m_1}$と$\mu^{n_2}\omega^{m_2}$は$(n_1, m_1) \neq (n_2, m_2)$であるときには互いにsingularであることから $\|(\omega^2-\mu^2)^n\| = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2$となり$|(\omega^2-\mu^2)^\wedge(f)| = 2$となる$f \in \hat{S}$が存在する。又このことは$f \notin \Delta$であり$\hat{\omega}(f) \neq 0$であることを示している。よって$M(\Delta) \not\ni \omega$である。$M(\Delta)$がL-idealであることより$\omega \perp M(\Delta)$であることがわかり、よって$M(\Delta) < M(\mathfrak{F})^\perp$を得る。

この補題によって後者の予想に関してGがmetrizableの時には成立することを証明することができる。

定理3.4. Gがmetrizableのときにはproper Raikov system $\mathfrak{F}$に対して$M(\Delta) < M(\mathfrak{F})^\perp$である。

証明。$\mu \in M(\mathfrak{F})$に対して、$A \in \mathfrak{F}$が存在してμはAにconcentrateしている。Aより生成されるRaikov systemを$\mathfrak{F}_0$とする。すると$\mu \in M(\mathfrak{F}_0)$である。もし$\mathfrak{F}_0$がsymmetricでなければ$M(\Delta) < M(\mathfrak{F}_0)^\perp$は容易にわかる。もし$\mathfrak{F}_0$がsymmetricならばWilliamson [13] prop 1の証明よりperfect compact $(H, 1)$-index setが存在することがわかる。よって補題3.3より$M(\Delta) < M(\mathfrak{F}_0)^\perp$である。つまり$\mu \perp M(\Delta)$であることであるから$M(\Delta) < M(\mathfrak{F})^\perp$を得る。

注意。Gがmetrizableでない時は一般に成立することはまだ証明されていない。

次に前者の予想が一般に成立することを示す。Gの

closed subgroup H に対して自然な写像 $\varphi: G \to G/H$ が考えられる。φ より誘導される $M(G)$ から $M(G/H)$ への写像 Φ を次の様に定義する。

$\Phi\mu(E) \equiv \mu(\varphi^{-1}(E))$, E は任意の G/H の Borel set.

補題3.5. H を G では closed subgroup であり G_τ では σ-compact subset であるものとする。

$\Rightarrow$ ① $\Phi(M(G_\tau)) = M(G_\tau/H)$

② $\Phi(M(G_\tau)^{\perp}) = M(G_\tau/H)^{\perp}$。

補題3.6. K を G_τ の σ-compact open subgroup とする。

$\Rightarrow$ G_τ の compact subgroup H が存在して G/H が perfect compact $(\varphi(K), 1)$ - index set を含むようにできる。

以上の補題のもとに次の定理を得ることができる。

定理3.7. $M(\Delta)$ は $M(G_\tau)^{\perp}$ に含まれる。

証明. K を G_τ の σ-compact open subgroup とする。補題3.6が成立する様な H と φ をとる。$\mathcal{F}$ を $\varphi(K)$ より生成される Raikov system とすると $M(\mathcal{F}) = M(G_\tau/H)$ である。任意の $\mu \in M(G_\tau)$ に対して補題3.3と3.5より $M(G/H)$ 上の non-symmetric homo f が存在して $f\circ\Phi(\mu) \equiv f(\Phi\mu) \neq 0$ となるものがある。又 $f\circ\Phi$ が $M(G)$ 上の non-symmetric homo になることが容易にたしかめられて $\mu \notin M(\Delta)$ を得る。

$M(\Delta)$とM(G_τ)がL-idealであることより$M(\Delta) \subset M(G_\tau)^+$。

$\mu \in M(\Delta)$に対して$\hat{\mu^*}(f) = \overline{\hat{\mu}(f)}$, $\forall f \in \hat{S}$が成立する。つまり$M_1 \equiv \{\mu \in M(G) : \hat{\mu^*}(f) = \overline{\hat{\mu}(f)}, \forall f \in \hat{S}\}$とおくとき、$M(\Delta) \subset M_1$である。$M_1$に関してJ.L.Taylor[9]は次の事を示した。

「Sのmaximal group K_α $(\alpha \in \Lambda)$のすべての合併集合を$K \equiv \bigcup_{\alpha \in \Lambda} K_\alpha$とするとき$K \subsetneqq S$であり
$\mathfrak{M}(K) \equiv \{\mu \in M(G) : \theta\mu$はKにconcentrateしている$\}$とすると
$M_1 \subset \mathfrak{M}(K)$である」

このことから$M(\Delta) \subset \mathfrak{M}(K)$であることがわかる。又
$M_2 \equiv \sum_{\alpha \in \Lambda} \mathfrak{M}(K_\alpha)$とおくとき，$\mathfrak{M}(K_\alpha) \neq \{0\}$ならば$\mathfrak{M}(K_\alpha)$に対してもとのtopologyより真に強いGをL.C.A.groupにするtopology τ_αが存在して$\mathfrak{M}(K_\alpha)$と$\mathrm{Rad}\,L^1(G_{\tau_\alpha})$と同型になっている(Taylor[10])。　$M_1 = M_2$であるかどうかまだわかっていないのであるが(Taylor[10]の問題)，もし$M_1 = M_2$である事が証明されれば，$M(\Delta) \subset M_1$であることと定理3.7.によって$M(\Delta) = \mathrm{Rad}\,L^1(G)$であることがわかる。これは又Williamson[12]の問題に他ならない。

最後に$\hat{S}$の中でのΔがどの様にあるか注意しておきたい。まず$H \equiv \{f \in \hat{S} : |f|^2 = |f|\}$とおく。Taylor[9]によって$H \subsetneqq \hat{S}$であることがわかっている。又Johnson[6]によ

って $\Delta \setminus H \neq \phi$ であることも得られており，$H \setminus \Delta \neq \phi$ であることは容易にわかる。$\Delta \setminus H$ と Δ の関係について次の事が得られている。

命題 3.8. $\Delta \setminus H \subset \overline{\hat{S} \setminus \Delta}$，ここで $\overline{}$ は $\hat{S}$ の weak* closure を表わす。

この命題は $\mu \in M(\Delta)$ の Gelfand 変換は $\hat{S} \setminus H$ で vanish していることを示している。

$M(\Delta)$ についての問題は次のものが考えられる。

① （C.C. Graham[1] の M_0 が prime L-ideal でないということに関係して）

$M(\Delta)$ は prime L-ideal ではない。

② $M(\Delta) = \mathrm{Rad}\, L^1(G)$ （Williamson[12] の問題）。

文　献

[1] C.C. Graham: $M_0(G)$ is not a prime L-ideal, Proc. A.M.S., 27 (1971), 557-562.

[2] E. Hewitt and K.A. Ross: Abstract harmonic analysis I, Springer-Verlag, 1963.

[3] J. Inoue: Some closed subalgebras of measure algebras and a generalization of P.J. Cohen's theorem, J. Math. Soc. Japan, 23 (1971), 278-294.

[4] K. Izuchi : On a zero set of Gelfand transforms of L-ideals of measure algebras, to appear.

[5] K. Izuchi and T. Shimizu : Topologies on groups and a certain L-ideal of measure algebras, to appear.

[6] B. E. Johnson : Symmetric maximal ideal in M(G), Proc. A.M.S., 18 (1967), 1040-1045.

[7] W. Rudin : Fourier analysis on groups, New York, 1962.

[8] T. Shimizu : L-ideals of measure algebras, Proc. Japan Acad., 48 (1972), 172-176.

[9] J. L. Taylor : The structure of convolution measure algebras, Trans. A.M.S., 119 (1965), 150-166.

[10] ———— : L-subalgebra of M(G), Trans. A.M.S., 135 (1969), 105-113.

[11] N. T. Varopoulos : A direct decomposition of the measure algebra of a locally compact abelian group, Ann. Inst. Fourier Grenoble, 16 (1966), 121-143

[12] J. H. Williamson : Banach algebra elements with idempotent powers and theorem of Wiener-Pitt Type, Function algebra, Chicago (1966), 186-198.

[13] ———— : Raikov systems and the pathology

of M(G), Studia Math., 31 (1968), 399-409.

[14] ____________ : Raikov systems, Symposia on theoretical physics and mathematics, 8 (1968), 173-183.