数理解析研究所講究録
第169巻 1972年 124-133

極大イデアル空間の analytic structure

奈教大　神 保 敏 弥

§1. 序

極大イデアル空間に analytic structure が存在する為の十分条件は，たくさん与えられているが，ここでは1次元の analytic structure の中でも特に，H. Alexander，E. Bishop，J.-E. Björk と J. Wermer 等の結果を紹介致します．

§2. $\mathbb{C}^n$ に於いて

T を単位円周 $\{z \in \mathbb{C}^1 : |z| = 1\}$ とし，$f, g \in C(T)$ は以下の条件を満たすとする：(a) $\{f, g\}$ は T の点を分離する，(b) f, g は T の或る近傍で正則な関数の T へのそれぞれ制限である，(c) $g'(z) \neq 0$ on T．f と g によって生成された function algebra を $[f, g]$ で表わす．

定理 1．(Wermer [6])　A を上述の $[f, g]$ とし，$A \neq C(T)$

とする $\Longrightarrow$ 次の条件を満たす Riemann 面 R と 単一閉曲線 Γ が存在する： $\Gamma \subset R$ は領域 D を囲み，$D \cup \Gamma$ はコンパクトであり，Γ から T の上への位相同形写像 Φ が存在し，任意の $h \in A$ に対して T 上の関数 $h \circ \Phi$ は D に正則に，$D \cup \Gamma$ 上に連続に拡張できる．

この定理は次のように拡張される．

定理 2．（Alexander [1]） A を T 上の function algebra とする，かつ A は局所的に 1-1 なる関数を含むとする．
$\Longrightarrow$ 次のいづれかが成立する： a) $T = M_A$，このときは $A = C(T)$， b) $M_A \setminus T \neq \phi$，このときは $M_A \setminus T$ は 1 次元 analytic space の構造をもつ．

この証明の b) は 次の定理 3 からわかる．定理 3 の証明は Stolzenberg の定理 [5] を実にうまく用いている：
X を $\mathbb{C}^n$ のコンパクト polynomially convex set とし，K を smooth curves の有限和とする $\Rightarrow (X \cup K)^{\wedge} \setminus X \cup K$ は空か又は $\mathbb{C}^n \setminus X \cup K$ の 1 次元 analytic subset である．

定理 3．[1] $K_1, \cdots K_s$ は $\mathbb{C}^n$ 内の arcs とし，各 K_i 上で z_1 は 局所的に 1-1 であるとし， $K = K_1 \cup \cdots \cup K_s$ とする．
$\Longrightarrow$ $\hat{K} \setminus K$ は 空又は $\mathbb{C}^n \setminus K$ の純 1 次元 analytic subset である． ここで $\hat{K}$ は K の polynomially convex hull とする．

証明．z_1は各K_i上で1−1と仮定して良い．このとき各$K_i \cap K_j$のK_i内の境界点をJ_{ij}とし，K_iの端点をJ_{ii}とする．さらに$\mathbb{C}^1$内で各$z_1(K_i) \cap z_1(K_j)$の$z_1(K_i)$内の境界点をJ'_{ij}とし，$J = \bigcup z_1(J_{ij}) \cup z_1(J_{ii}) \cup J'_{ij}$，$L = \overset{n}{\bigcup} z_1(K_i)$とおく．$\lambda \in \mathbb{C} \setminus J$と$\infty$とを結ぶ$\mathbb{C} \setminus J$内の曲線が$L$と交わる最小回数を$N(\lambda)$で表わす．$p \in \hat{K} \setminus K$，$z_1(p) \in \mathbb{C} \setminus J$に対して帰納法（$N(z_1(p))$の）で証明する．

i) $N(z_1(p)) = 0$のとき，$p \notin \hat{K}$となり証明すべき事はない．

ii) $N(z_1(p)) = k-1$のとき成立するとする．まず

① $z_1(p)$が$\mathbb{C} \setminus L$の2つの成分Ω_1, Ω_2の共通境界にあるとき．$N(\lambda) \geq k-1$，$\lambda \in \Omega_1$；$N(\lambda) = k-1$, $\lambda \in \Omega_2$としてよい．$z_1(p)$の近傍をJordan curve Γで囲まれた十分小さい内Jordan domain Dとする．Γの一部は線分αを含み$\alpha \in \Omega_2$とする．今$X_0 = (z_1^{-1}(\Gamma - \alpha^\circ) \cap \hat{K}) \cup (z_1^{-1}(\gamma) \cap K)$とおき$X = \widehat{X_0}$とする．ここで$\gamma = D \cap L$．一方$C = z_1^{-1}(\alpha) \cap \hat{K}$とおくと帰納法の仮定より$\hat{K} \cap z_1^{-1}(\Omega_2)$は$z_1^{-1}(\Omega_2)$の純1次元analytic subsetであるのでCは有限個のreal analytic curvesの和であるのでStolzenbergの定理によって$(X \cup C)^\wedge \setminus X \cup C$は$\mathbb{C}^n \setminus X \cup C$の1次元analytic subsetである．$p \notin X \cup C$であり，$p \in z_1^{-1}(D) \cap \hat{K} = (X \cup C)^\wedge$であるので結果は成立する．

② $z_1(p)$ が $\mathbb{C}\setminus L$ の2つの成分の境界点でないときで，

a) $z_1(p)\in\mathbb{C}\setminus L$ のとき．$N(z_1(p))=k$ である $z_1(p)$ と ∞ とを結ぶ曲線と L とが最初に交わる点を λ_1 とする．$z_1(p)$ を含む成分を Ω_1，隣りあう成分を Ω_2 とする．$N(\lambda_1)=k$, $N(\lambda)=k-1$, $\lambda\in\Omega_2$ である．①によって，λ_1 を含む十分小さい subarc $\gamma\subset L\setminus J$ をとると $p'\in\hat{K}\setminus K$ ($z_1(p)\in\gamma$) で $\hat{K}$ は局所的に1次元 analytic set であるので，z_1 の 1−1 を用いて $z_1^{-1}(\gamma)=\gamma_1\cup\cdots\cup\gamma_s$ の各 γ_i は相交わらず，各 γ_i は z_1 で γ と位相同形となる．γ を Ω_1 に延ばして $\gamma\cup\delta$ によって囲まれた Jordan domain D を作る．各 γ_i が $z_1^{-1}(D)\cap\hat{K}$ の異なる成分にあるようにできる．そのとき [5] の Lemma 8 を用いて，γ_i を含む $z_1^{-1}(D^\circ)\cap\hat{K}$ の成分は $z_1^{-1}(D^\circ)$ の analytic subset となる．

次に D° 内に線分 α をとりそれを延ばして Jordan curve Γ が Ω_1 内で $z_1(p)$ を囲むようにする．このとき $X=z_1^{-1}(\Gamma\setminus\alpha^\circ)\cap\hat{K}$，$C=z_1^{-1}(\alpha)\cap\hat{K}$ とおくと，X は polynomially convex で，C は real analytic arcs の有限和であるので，又 Stolzenberg の定理が使え証明される．

b) $z_1(p)\in L\setminus J$ のときは十分小さい $z_1(p)$ を含む Jordan domain D をとる．その境界は2つの線分 α_1, α_2 を含み，互に $z_1(p)$ の反対側にある Jordan curve とする．このとき
$X=[z_1^{-1}(\Gamma\setminus(\alpha_1\cup\alpha_2)^\circ)]\cap\hat{K}\cup(z_1^{-1}(\gamma)\cap K)^\wedge$，$C=z_1^{-1}(\alpha_1\cup\alpha_2)$

$\cap \hat{K}$ とすると 又 Stolzenberg の定理が使える．

最後に $p \in \hat{K} \setminus K$ で，$z_1(p) \in J$ については，$z_1(p)$ の十分小さい閉近傍 D をとり $(z_1^{-1}(D) \cap K)^\wedge \ni p$ とする．J は totally disconnected であるので $\mathring{D}$ に含まれる開かつ閉集合 $\tilde{J} \subset J$ がある．$\mathring{D}$ 内にあり $\tilde{J}$ を囲み L と有限回交わる polygonal Jordan curve Γ で $J \setminus \tilde{J}$ が Γ の外部にあるような Γ をとる．$C = z_1^{-1}(\Gamma) \cap \hat{K}$ とすると，C は real analytic curves の有限和である．B を Γ によって囲まれた閉領域とし，$X = (z_1^{-1}(B) \cap K)^\wedge$ とすれば $p \notin X$ で $p \in (X \cup C)^\wedge \setminus X \cup C$ であるので，又 Stolzenberg の定理により言える．

§3. fibre $f^{-1}(z)$ による条件

A を X 上の function algebra とし，M_A を A の極大イデアル空間，S_A をその Šilov 境界とする．$Y \subset M_A$ の位相境界を bY で表わす．Björk の [4] に述べられた M_A の x での1次元 analytic structure の存在の定義は次のものである：

x の閉近傍 W と或る $f \in A$ が存在して $W \setminus \{x\}$ が交わらぬ閉集合 $V_1, \cdots, V_n$ の和として表わされ，各 V_i は f によって $D \setminus \{0\}$ と位相同形のときを言う．ここでは $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$，$f(x) = \{0\}$ とする．

このとき Wermer は $g \in A$ に対して $g \circ (f|V_i \cup \{x\})^{-1}$ が

正則である事を示した．

$f\in A$に対して Uを$\mathbb{C}\setminus f(S_A)$の open component とする．$U$が重複度$n$の$f$-regular成分と呼ばれるのは $\forall z\in U$に対して $\# f^{-1}(z)\leq n$，或る$z_0\in U$に対して $\# f^{-1}(z_0)=n$が成り立つときを言う，ここで$\#$は cardinal number を示す．

定理４（Bishop [3]）Aを function algebra とし，$f\in A$とする．Uを重複度$n>0$のf-regular成分とする．
$\Rightarrow$ $f^{-1}(U)$のすべての点で analytic structure が存在する．

定理５（Björk [4]）Aを function algebra とし，$f\in A$とする．Uを重複度nのf-regular成分とし，$z_0\in bU$に対して$f^{-1}(z_0)\cap S_A$が空でないA-convex set とする
$\Rightarrow$ $f^{-1}(z_0)\setminus S_A$は 空又はその各点で1次元の analytic structure を持つ．

証明 $n=0$は明らかなので $n>0$とする．或る$\lambda_0\in U$に対して$\# f^{-1}(\lambda_0)=n$であるので，λ_0を中心とする十分小さい閉円板Dをとると $f^{-1}(D^\circ)=W_1\cup\cdots\cup W_n$ とかけ，各W_iが交わらぬ閉集合で fによってW_iはD°と位相同形とできる．
$Y=M_A\setminus f^{-1}(D^\circ)$とおくと $bY=K_1\cup\cdots\cup K_n$，K_iは交わらぬ閉集合かつ各K_iがbDに位相同形となる．Bを$A|Y$と$1/(f-\lambda_0)$によって生成されたY上の function algebra とすると $M_B=Y$，$S_B\subset S_A\cup K_1\cup\cdots\cup K_n$がわかる．

これから以下に述べる Wermer の結果の f に当たるものを前の B を媒介に作り $y_0 \in f^{-1}(z_0) \setminus S_A$ での analytic structure の存在が言える：

'A を function algebra，S_A を $K \cup K_1 \cup \cdots \cup K_n$ とし $K, K_1, \cdots K_n$ は disjoint closed set とする．或る $f \in A$ に対して，$\|f\|_K < \varepsilon < \frac{1}{2}$ であり，各 K_i は単位円と位相同形であり，$f(K_i)$ は real analytic curve とする．
$f(K_i)$ の囲む領域は $f(K_{i+1})$ の囲むものに含まれ，$f(K_1) \subset \{|z| > 1 + \varepsilon\}$ とする．N を $f(K_i)$ の 0 をとりまく巻数の最大なものとする．U を 1 を含む $\mathbb{C} \setminus f(S_A)$ の open component とするならば，U は重複度 nN 以下の f-regular である'.

定理 6．[4]　A を function algebra とし，或る $f \in A$ に対して，$\mathbb{C} \setminus f(S_A)$ の各 open component は或る重複度 $n \geq 0$ の f-regular とする．$R(f(S_A)) = C(f(S_A))$ かつ $\forall z \in S_A$ に対して $f^{-1}(z) \cap S_A$ は M_A 内の A-convex set とする $\Longrightarrow$ $M_A \setminus S_A$ は analytic structure を持つ．

定理 7．(cf. Wermer [7])．A を S_A 上の function algebra とし S_A を metrigable とする．$f \in A$ とする．U を $\mathbb{C} \setminus f(S_A)$ の一つの成分とし，その部分集合 G で $\# f^{-1}(z) < \infty$ とする．さらに平面測度 μ に対して $\mu(G) > 0$ とする．$\Longrightarrow$ $^\forall p \in f^{-1}(U)$ は p を通る有限個の analytic disksの和である近傍をもつ.

証明. $U_j=\{z\in U : \# f^{-1}(z)=j\}$ とすると, 或るU_kに対して $\mu(U_k)>0$である. U_kの density の点 z_0に対しては z_0を中心とする十分小さい閉円板Dをうまくとれば, $f^{-1}(D)$の各成分はk個で, 次の条件を満たす閉部分集合$B_0\subset bD\cap U_k$が存在する: B_0は linear measure >0で $\forall z\in B_0$に対して $\# f^{-1}(z)=k$である. このことから$f^{-1}(D)$の一つの成分上へAを制限することによって得られる function algebraに Bishop [2] の Lemma 13 を適用して $f^{-1}(D^0)$の点に対して定理の正しい事がわかる.

次に $\# f^{-1}(z)\leq k$, $\forall z\in U$ であることは Banach space間の linear transformation を用いる. 大まかに言えば, M_Aの或る covering $\{V_j\}$に対して 局所的に $A|V_j$ ($\forall j$) の uniform closure に属するM_A上の function algebra $\mathfrak{A}$ を作り, map: $g\xrightarrow{T_\lambda}(f-\lambda)\cdot g$ の性質から codim $T_\lambda(\mathfrak{A})=n$ ならば λに十分近いλ'に対しても codim $T_{\lambda'}(\mathfrak{A})=n$ であるので, codim $T_0(\mathfrak{A})=k$ より上の事が言える. これより $\mu(U\setminus U_k)=0$ となる.

$U\setminus U_k$が discrete であることは; $z\in U_k$ のとき $f^{-1}(z)=\{p_1(z),\cdots,p_k(z)\}$とし, $g\in A$を $p_1(z),\cdots,p_k(z)$では異なる値をとるものとする.

$$\Delta(z) = \prod_{i<j} \left(g(p_i(z)) - g(p_j(z)) \right)^2$$

とし，$\Delta(z) = 0$ on $\sqcup \setminus \sqcup_k$ と定め Δ に Radó の定理を用いて言える．以上で $f^{-1}(\sqcup_k)$ の点については済んだ．

最後に $p \in f^{-1}(\sqcup_k)$ とする．この時は Riemann 面を作って示す．今開円板 $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - f(p)| < r\}$ は $\Delta \neq 0$ on $D' = D \setminus \{f(p)\}$ となるものとする．$z \in D'$ に対して $\sigma_1, \cdots, \sigma_k$ を $g(p_1(z)), \cdots, g(p_k(z))$ の elementary symmetric functions とする．このとき σ_j は D 内の正則関数に接続され次式を満たす．

$$g^k - \sigma_1(f) g^{k-1} + \cdots + (-1)^k \sigma_k(f) = 0 \text{ on } f^{-1}(D').$$

これに対して

$w^k - \sigma_1(z) w^{k-1} + \cdots + (-1)^k \sigma_k(z) = 0$ を考えると

これは D 上の Riemann 面 Σ を定める．この $\Sigma \cap z^{-1}(D')$ から $f^{-1}(D')$ への自然な対応は 1−1 onto となり analytic disk の有限和である事が言える．

参考文献

[1]. H. Alexander, Polynomial approximation and analytic structure, Duke Math. J. 38 (1971), 123 − 135.

[2] E. Bishop, Holomorphic completions, analytic continuations and the interpolation of semi-norms, Ann. Math. 78 (1963), 468–500.

[3] ———, Analyticity in certain Banach algebras, Trans. Amer. Math. Soc., 102 (1962), 507–544.

[4] J.-E. Björk, Analytic structure in the maximal ideal space of a uniform algebra, Ark. Mat. 8 (1971), 239–244.

[5] G. Stolzenberg, Uniform approximation on smooth curves, Acta Math. 115 (1966), 185–198.

[6] J. Wermer, Function rings and Riemann surfaces, Ann. Math. 67 (1958), 45–71.

[7] ———, Banach Algebras and Several Complex Variables, Markham Publishing Company, Chicago, (1971).