

2次元 normal singularity について

都立大 理 渡 辺 敬 一

§ 1. 序

特異点の解消の問題が解かれた現在、次の問題は特異点それ自体に注目し、その性質を調べる事である。2次元の normal singularity については、特に良い性質をもつもの (rational singularity) については、かなり古くから、多くの論文があるが、それ以外の singularity についても、最近 Wagreich, Orlik などの研究により進歩が著しい。本稿では、singularity の「グラフ」の話を中心としてそれらの結果を紹介して行きたい。なお、証明は参照する原論文を見て頂きたい。

§ 2. Resolution. とそのグラフ.

$X \in \mathcal{X}$ が2次元 ^(*) normal singularity とする。簡単の為、 $X - \{x\}$ は特異点をもたないとしておく。 $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ が \tilde{X} は non-singular singularity の resolution であるとは、 π は proper で、 π は

(*) complex analytic space のカテゴリーで考える。

$\tilde{X} \rightarrow \pi^{-1}(x)$ と $X \rightarrow x$ の biholomorphic map をひき起す事をいう。このとき、 $\pi^{-1}(x)$ は (一般に reducible で、特異点をもつ) 一次元 compact connected analytic variety になる。このとき、 $\pi^{-1}(x) = \bigcup_{i=1}^n A_i$ と、 $\pi^{-1}(x)$ を既約成分に分解しておく。

(1) π が X の minimal resolution とは、 $\pi = \varphi \circ \pi_1$ と分解するような X の resolution π_1 が存在しない事。よく知られているように、

π が minimal $\Leftrightarrow A_i \cong \mathbb{P}^1$, $A_i^2 = -1$ なるものが存在しない。

X の minimal resolution は unique である。([L], V章)。

(2) X の resolution π が次の条件をみたとき、 π は good resolution であるという。

(i) A_i は non-singular ($\forall i$)

(ii) A_i と A_j が交わるときは、transversal に交わる。

(iii) $A_i \cap A_j \cap A_k = \emptyset$ (i, j, k は互いに異なり)。

good resolution は必ず存在する。good resolution は一般に minimal ではないが、good resolution たちの中に最小のものが存在する。([L], V章参照)

(3) $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ 又は resolution π に対応する グラフ を次のように定義する。

(i) 各 curve A_i には頂点 (0 であらわす) が対応する。

(ii) A_i と A_j が交わっているとき、 A_i と A_j に対応する頂

点を線で結ぶ (transversal に交わる時 $\bigcirc-\bigcirc$ 、multiplicity 2 の点で交わる時 $\bigcirc \equiv \bigcirc$ と書く。異なる 2 点で transversal に交わっている時、 $\bigcirc \equiv \bigcirc$)

(iii) A_i に対応する頂点の中に A_i^2 を表わす数字を入れる。
($A_i^2 = -n$ のとき $\ominus n$ と書く)。但し、 $A_i^2 = -2$ のときは (これが最も多いので) 何も書かない。($\ominus 2 = \bigcirc$)。

(iv) A_i の genus が g のとき、 $\bigcirc_{[g]}$ と書く。但し、 A_i が non-singular rational のときは何も書かない ($\bigcirc_{[0]} = \bigcirc$)。

(v) 三つ以上の curve が一点で互いに transversal に交わっている時、 $\bigcirc \equiv \bigcirc \equiv \bigcirc$ などと書く事にする。

(説明は面倒だが §6. の例を見れば一目瞭然である。)

★ 与えられたグラフに対し、そのグラフをもつ $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ を 2 次元 manifold の中に実現する事ができる。(Hirzebruch [4] 参照)

(4) M が 2 次元 manifold, $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ を M の 1 次元 compact connected subvariety とする。このとき、

A が contractible $\stackrel{\text{def.}}{\iff} \exists \pi: M \rightarrow X$, X は 2 次元 analytic variety で、 $\pi(A) = \{x\}$, $\pi|_{M-A}: M-A \xrightarrow{\cong} X - \{x\}$ (biholomorphic).

$\pi(A) = x$ が X の normal point である事を要請すれば、このように π は unique に定まる。

Theorem A. (Grauert).

ACM が contractible \Leftrightarrow 交叉行列 $(A_i, A_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ が負定値.

(5) 与えられたグラフに対して、交叉行列 (A_i, A_j) がきまるが、この行列が負定値である事を判定するのに、次の補題が有用である。

Lemma (Artin, [1])

① (A_i, A_j) が negative semidefinite $\Leftrightarrow \exists Z = \sum n_i A_i > 0, \forall i, Z A_i \leq 0$.

② 更にこのとき、 (A_i, A_j) が negative definite $\Leftrightarrow Z^2 < 0$.

($A = \cup A_i$ は連結より、①の Z に於て、 $\forall i, n_i \geq 1$ となる.)

(6) Fundamental cycle.

$Z_1 = \sum n_{1i} A_i, Z_2 = \sum n_{2i} A_i$ があり、 $Z_1 > 0, Z_2 > 0, Z_1 A_i \leq 0, Z_2 A_i \leq 0$ ($i=1, \dots, n$) とする。このとき $Z = \sum n_i A_i, n_i = \min(n_{1i}, n_{2i})$ とすると、 $\forall i, Z A_i \leq 0$ である事がわかる。

即ち、 $\{Z > 0 \mid Z = \sum n_i A_i \text{ \& } Z A_i \leq 0 (i=1, \dots, n)\}$ は最小元をもつ。

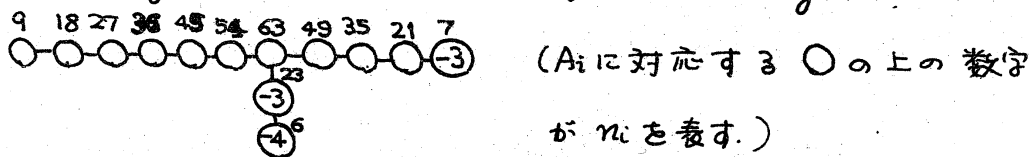
($Z' = \sum n'_i A_i \geq Z = \sum n_i A_i \Leftrightarrow n'_i \geq n_i (\forall i)$)。この最小元

を $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ の (又は対応するグラフの) fundamental cycle

という。グラフに対して fundamental cycle は一意的に決まる

が、グラフが複雑になると、その決め方は易しくないようだ。

例. $x^7 + y^9 + z^{11} = 0$ の resolution の fundamental cycle は



(7) $(X, x), (X', x')$ が x, x' の近傍でそれぞれ $\mathbb{C}^N, \mathbb{C}^{N'}$ に埋め込まれているとし、 $S_\varepsilon^{2N-1} = \{z \in \mathbb{C}^N \mid |z| = \varepsilon\}$, $K = X \cap S_\varepsilon^{2N-1}$, $K' = X' \cap S_\varepsilon^{2N'-1}$ とする。もし (X, x) と (X', x') のある resolution (例えは minimal resolution) が同じグラフをもつならば、 $K \cong K'$ (diffeo) である。(K は $A = \pi^{-1}(x)$ の tubular nbd. の boundary である。) この理由から、resolution のグラフで singularity を分類する事を singularity の topological な分類という。

(8) グラフによる基本群 $\pi_1(K)$ の計算.

グラフは K の topology を決めるから、当然 $\pi_1(K)$ を決める訳だが、 $\pi_1(K)$ の生成群と relation はグラフを用いて容易に決る。(Mumford [7], Wagreich [12] 参照)。Wagreich は [12] で、 $\pi_1(K)$ が solvable とする singularity のグラフをすべて列挙している。

§ 3. Singularity の "genus" について。

Wagreich は [11] に於て singularity について 2 つの "genus" を定義している。彼の "arithmetic genus" については、筆者はその必然性を理解しているとは云い難いのだが、"genus" を最初に定義したのが彼なので、彼に従って定義しておく。

(1) $P_g(\mathcal{O}_x)$ (geometric genus) の定義。

$\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ を X の resolution とし、 $R^1\pi_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}})$ ($UCX \rightarrow$

$H^1(\pi^{-1}(U), \mathcal{O}_X)$ で定義される sheaf). を考える. π は proper より, $R^1\pi_*(\mathcal{O}_X)$ は coherent で, $\text{Supp}(R^1\pi_*(\mathcal{O}_X)) \subset \{x\}$. 故に,

$\dim_{\mathbb{C}}(R^1\pi_*(\mathcal{O}_X))_x < \infty$ である. $P_g(\mathcal{O}_X) = \dim_{\mathbb{C}}(R^1\pi_*(\mathcal{O}_X))_x$ と定義する. $(R^1\pi_*(\mathcal{O}_X))_x = \varinjlim_{\substack{Z \geq 0 \\ \text{Supp } Z \subset \pi^{-1}(x)}} H^1(Z, \mathcal{O}_Z)$ であるから,

$$P_g(\mathcal{O}_X) = \sup(\dim_{\mathbb{C}} H^1(Z, \mathcal{O}_Z)) \quad \text{となる。}$$

(2) $P_a(\mathcal{O}_X)$ (arithmetic genus) の定義.

Z が $\text{supp}(Z) \subset \pi^{-1}(x)$ なる cycle のとき, $P_a(Z) = \frac{Z^2 + KZ}{2} + 1$.

(K は \tilde{X} の canonical bundle) であり Z の arithmetic genus が定まる.

$$\text{定義} \quad P_a(\mathcal{O}_X) = \sup_{\substack{Z \geq 0 \\ \text{supp}(Z) \subset \pi^{-1}(x)}} P_a(Z).$$

$K A_i = 2(P_a(A_i) - 1) - A_i^2$ であり, $P_a(A_i), A_i^2$ はグラフよりわかるから, $K A_i$ はグラフよりわかる. ゆえに, $P_a(\mathcal{O}_X)$ はグラフから計算可能な, 全く「算術的」な種数である.

(3) 更に, 我々は §2.(7) で, "fundamental cycle" Z_0 を定義した. $P_a(Z_0)$ も 'genus' の候補者に採用しよう. これもグラフから決まる算術的な量である. ($P_a(Z_0) \geq 0$ である.)

(4) Singularity (X, x) に対して resolution はたくさんあるから, 上の3つの定義が resolution によらずに well-defined である事を云っておく必要がある. すべての resolution は minimal (最小な) resolution から, 有限回の quadratic transform (一点を blow-up する事) によって得られるから, $\tilde{X}_1 \xrightarrow{\theta} \tilde{X}_2 \xrightarrow{\pi_2} X$ の時, \tilde{X}_1 を用いて定義したものと, \tilde{X}_2 を用い

て定義したものが同じである事を示せば良い。以下の証明は容易である。(Wagreich [11] に書いてある。なお、 $Z_0 = \sum n_i A_i$ が \tilde{X}_2 の fundamental cycle, θ が $p \in Z_0$ を中心とする blow-up, p に於ける Z_0 の multiplicity が μ のとき、 \tilde{X}_1 の fundamental cycle は $\tilde{Z}_0 = \sum n_i \tilde{A}_i + \mu E$ ($E = \theta^{-1}(p)$, $\tilde{A}_i = \overline{\theta^{-1}(A_i - p)}$).

$$\star P_g(\mathcal{O}_x) \geq P_a(\mathcal{O}_x) \geq P_a(Z_0)$$

$$(\because) P_a(Z) = (1 - \dim H^0(Z, \mathcal{O}_Z)) + \dim H^1(Z, \mathcal{O}_Z) \leq \dim H^1(Z, \mathcal{O}_Z) \leq P_g(\mathcal{O}_x)$$

(5) "genus 0" の場合は上の三つの "genus" は一致し、更にこの時この singularity はいさゝか "良い" 性質をもつ。

定理 B. (Artin [1], Storch [13], D. Kirby [5], Brieskorn [2], Tyurin^[10])

singularity (X, x) に関して次の性質は同値である。

$$(i) P_g(\mathcal{O}_x) = 0$$

$$(ii) P_a(\mathcal{O}_x) = 0$$

$$(iii) P_a(Z_0) = 0$$

$$(iv) \forall Z > 0, \text{Supp}(Z) \subset \pi^{-1}(x), P_a(Z) \leq 0.$$

$$(v) C(\mathcal{O}_x) \text{ は有限群 } (C(\mathcal{O}_x): \mathcal{O}_x \text{ の divisor class group}).$$

(vi) (X, x) の resolution は一点を中心とする blow-up を繰り返す事によつて得られる。(Absolute isolatedness).

定義 この性質をもつ特異点を rational singularity とする。

$$(6) \text{例 1. } f: X' \rightarrow X \text{ は finite, } X', X \text{ は normal, } x' \in X', f(x') = x.$$

この時、 $\mathcal{O}_{x'}$ が rational singularity (又は regular) $\Rightarrow \mathcal{O}_x$ も so.

例2. \mathbb{C}^2 に作用する有限群 G に対し、 \mathbb{C}^2/G の singularity と同型 (biholo.) な singularity を quotient singularity とする。

(i) quotient singularity は rational singularity.

(ii) (X, x) が quotient singularity $\Leftrightarrow \pi_1(K)$ は有限群. ([3])
quotient singularity は Brieskorn [3] に全部分類されている。

(7) $\star P_a(z_0) = 1 \Leftrightarrow P_a(\mathcal{O}_x) = 1$ (Wagreich [1], Prop. 4.3).

(8) $(X, x), (X', x')$ が同じ resolution のグラフをもち、更に $\pi^1(x) \cong \pi^1(x')$ (analytic variety として) ならば $P_g(\mathcal{O}_x) = P_g(\mathcal{O}_{x'})$ とは限らない。(後述の例参照)。

§4. Multiplicity と fundamental cycle の関係.

\mathcal{O}_x の最大イデアルを m_x とする. ($m_x = \{f \in \mathcal{O}_x \mid f(x) = 0\}$)

$H_x(n) = \dim_{\mathbb{C}} m_x^n / m_x^{n+1}$ と定義すると、 $n \gg 0$ のとき、

$$H_x(n) = a_0 \binom{n+2}{2} - a_1 \binom{n+1}{1} + a_2 \quad (a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Z})$$

と書ける事が知られている。このとき a_0 を \mathcal{O}_x の multiplicity

(重複度) と呼び、 $\mu(\mathcal{O}_x)$ と書く。 $X = V(f) \subset \mathbb{C}^3$ のときは、

$\mu(\mathcal{O}_x) = \text{ord}_0(f)$ である。($f = \sum a_{ijk} x^i y^j z^k$ と書くとき、

$$\text{ord}_0(f) = \min \{i+j+k \mid a_{ijk} \neq 0\}.$$

\mathcal{O}_x の fundamental cycle を Z_0 とするとき、次の定理が成立する。

定理 C. ($\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ を resolution とする).

(i) $\mu(\mathcal{O}_x) \geq -Z_0^2$.

(ii) $\rho_a(Z_0) = 0$ のとき、 $\mu(\mathcal{O}_x) = -Z_0^2$.

(iii) $m_x \mathcal{O}_x \cong \mathcal{O}(-Z_1)$ (divisor Z_1 を定義する ideal) のとき、 $Z_1 \geq Z_0$ で、 $\mu(\mathcal{O}_x) = -Z_1^2$. (\therefore もし $Z_1 > Z_0$ なら、 $-Z_1^2 > -Z_0^2$).

((i), (iii) は Wagreich [11], (ii) は Artin [1] 参照).

以上の結果によつて、 $-Z_0^2$ をグラフに対する multiplicity のようなものと考えても良いと云える。 $\mu(\mathcal{O}_x) = -Z_0^2$ となる為のもう少し精密な条件が Wagreich [11] §5 に見られる。大雑把に云つて、 $-Z_0^2$ が "十分大きい" 時、 $\mu(\mathcal{O}_x) = -Z_0^2$ である。

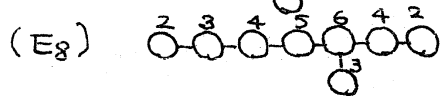
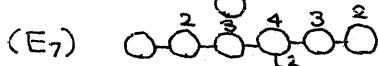
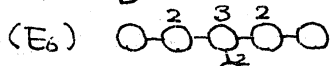
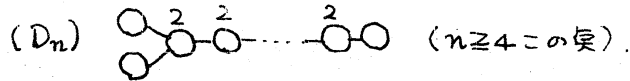
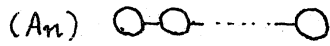
🌀 "十分大きい" を精密に定式化できないか。例えば、 $\rho_a(Z_0)$ のみで決まる数 N があつて、 $-Z_0^2 \geq N \Rightarrow \mu(\mathcal{O}_x) = -Z_0^2$ とか。

§5. グラフの分類.

与えられた数 $p, n > 0$ に対して、 $\rho_a(Z_0) = p$, $-Z_0^2 = n$ となるグラフをすべて示す事は (理論的には) 可能である。

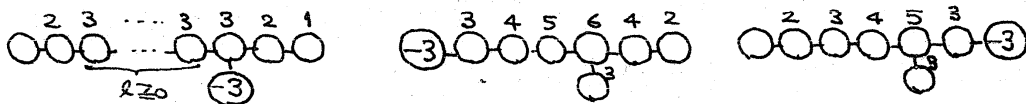
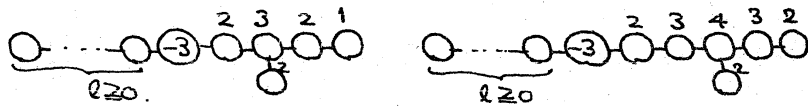
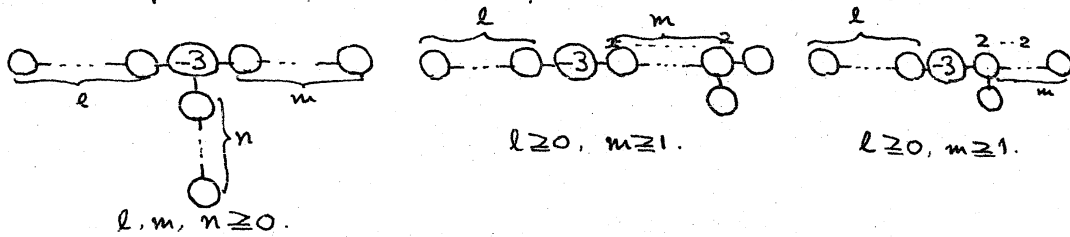
○—○—○ の差を除けば、グラフは有限個である。以下にいくつかの例をならべる。(minimal resolution のグラフを示す。)

例1. $p_a(z_0)=0, z^2=-2$ のグラフは次の5種類.



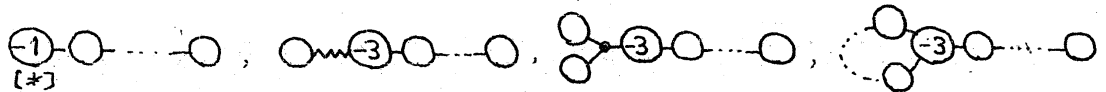
(○の上の数字は fundamental cycle にあらわれるその curve の multiplicity. $\overset{1}{\circ} = \circ$).

例2. $p_a(z_0)=0, z^2=-3$ のグラフは次の8種類.



($p_a(z_0)=0, z_0^2=-4$ なるグラフは $\circ \cdots \circ$ だけの差を除くと 72 種類ある.)

例3. $p_a(z_0)=1, z_0^2=-1$ なるグラフは次の4種類.



[*] は $p_a(A_i)$ なる curve. 即ち、non-sing. elliptic, rational

で、最も簡単な cusp 又は ordinary double point 1つをもちもの。
(Wagreich [11] には c の型が欠落している.)

グラフの分類ができたとする、次の問題は1つのグラフは"何種類"の(同型でない) \mathcal{O}_x に対応するか? という事である。Tyurina [9] は、 $A = \cup A_i \cong A' = \cup A'_i$ なるとき、 $\mathcal{O}_x \cong \mathcal{O}_{x'}$ が常に成立する為の条件を求めているがまだ完全とは云えない。しかし、*rational singularity* で、 $-Z_0^2 \leq 3$ のものに対しては1つのグラフに対して、1つの \mathcal{O}_x しか対応しない事を示している。*quotient singularity* は同じ性質をもつ事が Brieskorn [3] に、また $\pi_1(K)$ が solvable であるグラフに対して Wagreich [12] がある。

★ グラフの分類の具体的な計算方法について。

$Z < Z_0$ とすると、*fundamental cycle* の定義から、 $\exists A_i, Z \cdot A_i > 0$ 。

$$\therefore p(Z + A_i) = p_a(Z) + p_a(A_i) + (Z \cdot A_i) - 1 \geq p_a(Z) + p_a(A_i)$$

より、 $p_a(Z_0)$ なり事と、 $p_a(Z_0)$ に至る chain に次のような事が起る度に、 $p_a(Z_0)$ が増して行く事がわかる。

- 1°. $p_a(A_i) \geq 1$ なる A_i が存在する。
- 2°. $A_i \cdot A_j \geq 2$ なる i, j が存在する。(又は $Z \cdot A_i \geq 2$ となる。)
- 3°. $A_i \cap A_j \cap A_k \neq \emptyset$ なる (i, j, k) が存在する。
- 4°. グラフが cycle をもつ。

故に、例えは $p_a(Z_0) = 0$ のときは、1°~4° は起らない。また、例えは $-Z_0^2 = 2 \Rightarrow K \cdot Z_0 = 0$ 、 $A_i^2 \leq -2$ より $K \cdot A_i = 0$ がわかる。あとは Kodaira [6] §6 と同様にすれば良い。

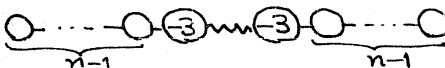
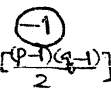
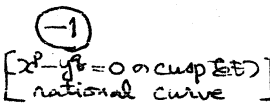

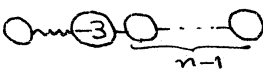
§ 6. 例.

(1) Weighted homogeneous polynomial で定義された singularity のグラフは、Orlik-Wagreich [8] で計算方法が示されている。

グラフは星型 (一つの頂点から何本かの直線がのびてくる形) である。実際に計算してみると色々な面白い図形があらわれ

る。(□) は $x^2-y^3=0$ の cusp をもつ rational curve をあらわす。

$x^2 + y^2 + z^n = 0$		$P_a(z_0) = 0, z_0^2 = -2.$
$x^2 + y^3 + z^3 = 0$		$P_a(z_0) = 0, z_0^2 = -2.$
$x^2 + y(z^2 + y^n) = 0$		$P_a(z_0) = 0, z_0^2 = -2.$
$x^2 + y^3 + z^4 = 0$		$P_a(z_0) = 0, z_0^2 = -2.$
$x^2 + y^3 + z^5 = 0$		$P_a(z_0) = 0, z_0^2 = -2.$
$x^2 + y(y^2 + z^3) = 0$		$P_a(z_0) = 0, z_0^2 = -2.$
$x^2 + y^3 + z^{6n} = 0$		$P_a(z_0) = 1, z_0^2 = -1.$
$x^2 + y^3 + z^{6n+1} = 0$		$P_a(z_0) = 1, z_0^2 = -1.$
$x^2 + y^3 + z^{6n+2} = 0$		$P_a(z_0) = 1, z_0^2 = -1.$
$x^2 + y^3 + z^{6n+3} = 0$		$P_a(z_0) = 1, z_0^2 = -1.$
$x^2 + y^3 + z^{6n+4} = 0$		$P_a(z_0) = 1, z_0^2 = -1.$
$x^2 + y^3 + z^{6n+5} = 0$		$P_a(z_0) = 1, z_0^2 = -1.$
$x^2 + y^4 + z^{4n} = 0$		$P_a(z_0) = 1, z_0^2 = -2.$

$x^2 + y^4 + z^{4n+1} = 0$  $P_a(Z_0) = 1, Z_0^2 = -2.$
 $x^p + y^q + z^{pq} = 0$  (但し, $(p, q) = 1$) $P_a(Z_0) = \frac{(p-1)(q-1)}{2}, Z_0^2 = -1.$
 $x^p + y^q + z^{pq+1} = 0$  (但し, $(p, q) = 1$) $P_a(Z_0) = \frac{(p-1)(q-1)}{2}, Z_0^2 = -1.$
 $x^2 + y^5 + z^5 = 0$  $P_a(Z_0) = 1, Z_0^2 = -2.$
 $x^2 + y^3 + yz^{4n+1} = 0$  $P_a(Z_0) = 1, Z_0^2 = -1.$

(2) weighted homogeneous 7 行の場合、埋め込み次元の
 高い場合。 (但し、与えられた elliptic curve の β -函数に対し)
 $\beta^2 = 4\beta^3 - g_2\beta + g_3$


(2) $\{z_0/z_1 = z_1/z_2 = \dots = z_{n-1}/z_n\} \subset \mathbb{C}^{n+1}$

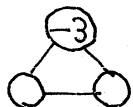
(3) $\{x^2z - 4y^3 - g_2yz^2 - g_3z^3 = 0\} \subset \mathbb{C}^3$

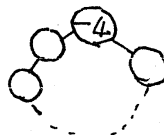
(4) $\begin{cases} z_2^2 - 4z_1z_3 - g_2z_0z_1 - g_3z_0^2 = 0 \\ z_1^2 - z_0z_3 = 0 \end{cases} \subset \mathbb{C}^4$

(5) $\begin{cases} z_1^2 - z_0z_3 = 0 \\ z_2z_4 - 4z_3^2 - g_2z_0z_3 - g_3z_0z_1 = 0 \\ z_1z_2 - z_0z_4 = 0 \\ z_2^2 - 4z_1z_3 - g_2z_0z_1 - g_3z_0^2 = 0 \\ z_1z_4 - z_2z_3 = 0 \end{cases} \subset \mathbb{C}^5$

(6), (7) ... なるべく時間をかければ計算できる ... (12)

 $x^2 + y^3 - 3yz^4 + yz^5 + 2z^6 - z^7 = 0.$

 $z^2 - (x+y^2)(x^2+y^7) = 0.$

 $z^2 + x^3y + x^2y^2 + ty^n = 0 \quad n \geq 5, \text{頂点の数 } n-4 \square.$

(3) $P_a(\mathcal{O}_x) > P_a(\mathcal{O}_z)$ なるグラフ. $\textcircled{-1}$ に於て,

$$P_a(\mathcal{O}_z) = 3 < P_a(2\mathcal{O}_z) = 4 = P_a(\mathcal{O}_x) \quad (\text{こんな例はいくらでも}$$

作れる.)

(4) $P_g(\mathcal{O}_x) > P_a(\mathcal{O}_x)$ なる例. (Wagreich [11])

1° \textcircled{n} で, $-g \geq -n \geq 2-2g$ とすると, $P_g(\mathcal{O}_x)$ は,

$3g-n-1$ と g の間のすべての値をとらせる事ができる.

$$P_a(\mathcal{O}_x) = g.$$

2° $\textcircled{A_1}$ で, $2 = P_g(\mathcal{O}_x) = \dim H^1(\mathcal{O}_{Z_0+A_1}) > P_a(\mathcal{O}_x) = 1.$

§6. あとがき.

Singularity の genus を正当化する材料は今のところ, genus 0 を除いて余りないように思われる. Kodaira [6] の §7 以下に対応する事は言えないうか? また, グラフを与えた時, そのグラフをもつ ~~graph~~ singularity を特徴づける事もまだ一般には出来ていないようだ. 問題は事欠かないが, 解けるかどうか?

References.

[L] Laufer: Normal 2-dimensional singularities.

(Princeton, 1971).

[1]. Artin: On isolated rational singularities of surfaces.

- Amer. J. 88 (1966) 129~136.
- [2] Brieskorn : Über die Auflösung gewisser Singularitäten von holomorphen Abbildungen. Math. Ann. 166 (1966) 76~102.
- [3] Brieskorn : Rational Singularitäten komplexer Flächen. Invention 4 (1968) 336~58.
- [4] Hirzebruch 10 : Quadratic forms and differential manifolds. Dekker 4 (1971).
- [5] D. Kirby : The structure of an isolated multiple point of a surface. I, II, III. Proc. London Math. Soc. 4 (1956)
- [6] K. Kodaira : On compact analytic surfaces II. Annals of math. 77 (1963)
- [7] Mumford : The topology of normal singularities of an algebraic surface. Bull. I.H.E.S. 9 (1961)
- [8] Orlik-Wagreich : Isolated singularities with \mathbb{C}^* -action. Annals of Math. 93 (1971) 205~228.
- [9] G.N. Tyurina : On the tautness of rationally contractible curves on a surface. Izv. 2 (1968) 907~34.
- [10] ——— : Absolute isolatedness of rational singularities and triple rational points. Func. anal. & its app. 2 (1968).
- [11] Wagreich : Elliptic singularities of surfaces.

Amer. J. 92 ('70) 419~454.

[12] — : Singularities of complex surfaces with
solvable local fundamental groups. *Topology* 11 ('72)
51~72.

[13] Storch : Fastfaktorielle Ringe. Schriftenreihe
Math. Inst. Univ. Münster ('67).