

Milnor fiber の連結性
と Singularity の次元.

東大 教養 加藤 十吉
東大 理 松本 幸夫

§ 1. 序

$\mathbb{C}^{(n+1)}$ 中の Algebraic hypersurface の, 局所的な性質を調べるための有力な道具に, Milnor の導入した fibering の構造がある. $f: \mathbb{C}^{(n+1)} \rightarrow \mathbb{C}$ を $f(0) = 0, (\text{grad } f)_0 = 0$ をみたす多項式とする. (もっと一般に正則函数としてよい.) $V^{(n)} = f^{-1}(0)$ と書く. S_ε^{2n+1} で原点 0 を中心とし半径 $\varepsilon > 0$ の球面を表わし, $K = S_\varepsilon^{2n+1} \cap V^{(n)}$ とおく.

$\varepsilon > 0$ を充分小にとると

$$\varphi = \frac{f}{\|f\|} : (S_\varepsilon^{2n+1} - K) \longrightarrow S^1$$

は fiber bundle の構造を持つというのが Milnor の主要定理であった. 以後 F で φ の fiber を表わす.

f の critical points set を $\Sigma(f)$ としよう.

$$\Sigma(f) = \{ z \in \mathbb{C}^{(n+1)} \mid (\text{grad } f)_z = 0 \}.$$

$\Sigma(f)$ の原点 0 に於ける germ の複素次元を μ とするとき, 我

この主な定理は次のように述べられる。

定理 1. $\pi_i(F) = 0$ for $i \leq n - \delta - 1$ である。

とくに $\delta = 0$ の場合 (i.e. isolated critical point), F は $n-1$ -connected となり、Milnor の結果 [2] に一致する。上の定理の最初の形は K. Saito によって予想された。

系: $M^{(n+1)}$ を complex manifold, $T \subset \mathbb{C}^1$ を原点を含む領域, $p: M^{(n+1)} \rightarrow T$ を proper holomorphic map とする。 p の critical value は原点だけとする。 $F_t = p^{-1}(t)$ と置く。そのときもし $t \neq 0$ が 0 に充分近ければ, $(n-\delta)$ -connected map $F_t \rightarrow F_0$ が存在する。ただし $\delta = \dim_{\mathbb{C}} \{z \in F_0 \mid (\text{grad } p)_0 = 0\}$ 。

Hypersurface の Whitney stratification の構造を利用して、 n に関する induction を行うことが証明の方針である。

§ 2. Whitney stratification. (cf. Mather [3].)

N 次元 Euclid 空間 \mathbb{R}^N (又は C^∞ -manifold M^N) の subset W が Whitney-stratified set であるとは

- 1) W は smooth submanifolds の族 $\mathcal{X} = \{X_i\}$ によって cover される: $W = \bigcup_i X_i$, 但し $X_i \cap X_j = \emptyset$ ($i \neq j$).

各 X_i は connected と仮定する。各々の X_i は stratum と呼ばれる。

2) \mathcal{A} は locally finite family である。

3) frontier condition: $\forall X \in \mathcal{A}$ について, $\bar{X} - X$ は strata の和集合として表わせる。 $Y \in \mathcal{A}$ が $\bar{X} - X$ に含まれることを記号で $Y < X$ と書く。

4) Whitney conditions: (a) $Y < X$ とする。 X の点列 $\{p_i\}$ が Y の点 p に収束し, p_i に於ける X の tangent space $T_{p_i}X$ が $\text{Grass}(N, \dim X)$ の中である plane τ に収束したとする。 Y のとき $\tau \supset T_p Y$ でなければならぬ。

(b) $Y < X$ とする。 X の点列 $\{p_i\}$ と, Y の点列 $\{q_i\}$ がともに Y の点 q に収束したとする。 $T_{p_i}(X)$ が plane τ に収束し, 直線 $\overline{p_i q_i}$ が直線 ℓ に収束すれば, $\ell \subset \tau$ でなければならぬ。

Whitney-stratified set を以後 W.S. set とよぶ。

補題 1. $W \subset \mathbb{R}^N$ を W.S. set とし, $p \in W$ を W の 1 点とする。 p を中心とし, 半径 ε の充分小さい sphere S_ε^{N-1} をとると,

$$K = W \cap S_\varepsilon^{N-1}$$

は再び W.S. set の構造を持つ。

証明: X を W の任意の stratum とするとし, $X \cap S_\varepsilon^{N-1}$ は

Smooth manifold に居ることを示す。 $p \in X$ は明らかから $p \in Y < X$ として示せばよい。もし ε をどんなに小さくしても、 X と S_ε^{N-1} とが transverse でない点 p_ε が存在したとすれば、 $\exists v_\varepsilon \in T_{p_\varepsilon}(\mathbb{R}^N)$ s.t. $v_\varepsilon \perp T_{p_\varepsilon}(S_\varepsilon^{N-1})$ かつ $v_\varepsilon \perp T_{p_\varepsilon}(X)$ 。点 p と p_ε を結ぶ直線 l_ε は v_ε を含むこと、は明らかである。ゆえに $l_\varepsilon \perp T_{p_\varepsilon}(X)$ 。このような点列 $\{p_\varepsilon\}$ から部分列をえらんで $\{p_i\}$ と名付け、 $l_{p_i} \rightarrow l$, $T_{p_i}(X) \rightarrow T$ とおけるようにできる。すると、 $l \perp T$ であるから、Whitney condition (b) に反する。結局 $\varepsilon > 0$ を充分小にとれば、 S_ε^{N-1} と X は transverse に交わる。Smooth manifold $K_X = X \cap S_\varepsilon^{N-1}$ 達が K の strata に居るのである。W.S. set の他の条件も同様に示される。

Tubular neighbourhood system.

W.S. set $W \subset \mathbb{R}^N$ に対して次の条件を満足する tubular neighbourhood system が構成される。(Mather [3].)

$$1) \mathcal{J} = \{ \{T_X\}, \{\pi_X\}, \{P_X\} \}.$$

$\pi_X: |T_X| \rightarrow X$ は closed disk bundle.

$P_X: |T_X| \rightarrow \mathbb{R}_+$ は tubular function. $\mathbb{R}_+ = \{x \mid x \geq 0\}$.

$$2) \pi_X \circ \pi_Y = \pi_X, P_X \circ \pi_Y = P_X \quad (\forall X < Y.)$$

3) Compact sets の family $\{C_X\}$ を、 $C_X \subset X$ とおけるように任意に与えたと、 $T_X|C_X \rightarrow C_X$ は \mathbb{R}^N の Riemann metric に関する

る X の orthogonal bundle にとることができる。i.e. $\forall x \in C_X$ に対し $|T_x| \rightarrow X$ の x 上の fiber disk は, Riemann metric に対して $T_x(X)$ に直交する。

(性質 3) は Mather には無いが, tubular neighbourhood System を構成するとき, 3) がみたされるように inductive に構成してゆくことができる。))

$$4) |T_x| \cap |T_y| \neq \emptyset \Rightarrow X < Y \text{ or } X = Y \text{ or } X > Y.$$

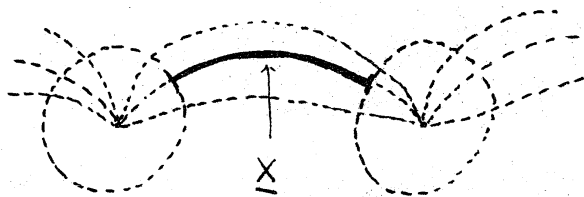
以下の議論に便利なように, いくつかの記号を導入する。

"total space" ; $T = \bigcup_{x \in \mathcal{S}} |T_x|.$

X の frontier ; $\partial X = \{Y \in \mathcal{S} \mid Y < X\}, |\partial X| = \bigcup_{Y \in \partial X} Y$
 $= \bar{X} - X.$

X の "co-frontier" ; $\delta X = \{Z \in \mathcal{S} \mid X < Z\}, |\delta X| = \bigcup_{Y \in \delta X} Y.$

X の "compact part" ; $\underline{X} = X - \bigcup_{Y \in \partial X} \text{Int} |T_Y|$



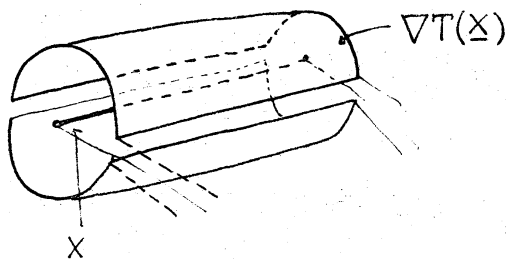
T_x の \underline{X} の制限 : $T(\underline{X}) = T_x|_{\underline{X}}.$

$T(\underline{X})$ の sphere bundle ; $\partial T(\underline{X})$

最後に $\nabla T(\underline{X})$ を

$$\nabla T(\underline{X}) = \text{closure} \left(\partial T(\underline{X}) - \bigcup_{\substack{Y \in \delta X \\ (\text{i.e. } X < Y)}} |\tau_Y| \right)$$

と定義する。



Total space T は角をもった smooth manifold であり、 ∂T でその boundary を表わす。次の補題は明らかである。

補題 2. $\partial T = \bigcup_{X \in \delta} \nabla T(\underline{X})$.

次に

補題 3. (1) $\pi_X : \partial T(\underline{X}) - |\delta X| \rightarrow \underline{X}$ は fiber bundle.

(2) inclusion $\nabla T(\underline{X}) \rightarrow \partial T(\underline{X}) - |\delta X|$ は deformation retract であり、その deformation は \underline{X} 上の fiber を保つ。

証明 (1). $\partial T(\underline{X})$ は $\{ \partial T(\underline{X}) \cap Z \}_{X < Z}$ を strata の system とする W.S. set である。各 stratum $\partial T(\underline{X}) \cap Z$ から X への "写像 π_X の制限" が full-rank を言えは (1) は Thom の isotopy lemma から従う。 $p \in \partial T(\underline{X}) \cap Z$ を任意にとる。 $\partial T(\underline{X}) \rightarrow X$ は fiber bundle 中え、 $\lambda : U_{\pi_X(p)} \rightarrow \partial T(\underline{X})$ なる local cross section で $\lambda(\pi_X(p)) = p$ なるものがある。 Tubular nbd system の条件 (2) により、 $q = \pi_X \lambda(q) = \pi_X \pi_Z \lambda(q)$ となり、 $\pi_Z \lambda : U_{\pi_X(p)} \rightarrow \partial T(\underline{X}) \cap Z$ は $\partial T(\underline{X}) \cap Z \rightarrow X$ の cross-section となる。

従って $\partial T(X) \cap Z \rightarrow X$ は full rank となり (1) が言えた。

(2) の証明: $\# \delta X < \infty$ と仮定して証明する。あとで必要なものをこの時だけ。 δX の strata に番号をつけ Z_1, Z_2, \dots, Z_r とする。但し, $Z_i < Z_j \Rightarrow i < j$ としておく。

記号: $Q_i = \text{closure}(\partial T(X) - \bigcup_{\nu=1}^i |T_{Z_\nu}|)$ とおく。

$Q_i \cap |T_{Z_{i+1}}|$ は $Q_i \cap Z_{i+1}$ の disk bundle であるから, $Q_{i+1} = \text{closure}(Q_i - Q_i \cap |T_{Z_{i+1}}|)$ は $Q_i - Z_{i+1}$ の deformation retr. であり, X に関する fiber を保つ。(Tub. nbd の条件 (2).) 従って induction (w.r.t. i) により $Q_r = \nabla T(X)$ は $Q_0 - \bigcup_{\nu=1}^r Z_\nu = \partial T(X) - |\delta X|$ の deformation retract である。 Q.E.D.

§3. 定理1の証明.

3.1. 特別な場合の証明: $\delta = \dim_{\mathbb{C}} \Sigma(f) = 0$ のときは O.K. (Milnor). $\delta = n$ のときは証明すべきことなし。 $\delta = n-1$ のとき, Milnor fiber が connected を示そう。 $\delta < n$ 中え。 $K = S_{\varepsilon}^{2n+1} \cap V^{(n)}$ の点 p で $p \notin \Sigma(f)$ なるものをとる。 p において $V^{(n)}$ の topdim. stratum (i.e. non-singular stratum) と直交する complex line L をとると, $f|_L: L \rightarrow \mathbb{C}$ は non-singular であり, これを利用して $\varphi: S_{\varepsilon}^{2n+1} - K \rightarrow S^1$ の cross section $\lambda: S^1 \rightarrow S_{\varepsilon}^{2n+1} - K$ をとることができる。従って次の homotopy exact seq に於て φ_* は onto である:

$$\pi_1(S_\varepsilon^{2n+1} - K) \xrightarrow{q_*} \pi_1(S^1) \longrightarrow \pi_0(F) \longrightarrow \pi_1(S_\varepsilon^{2n+1} - K) \cong 0.$$

従って、 $\pi_0(F) = 0$ を示すことができた。

3.2. 前節により、 $\delta = 0, n-1, n$ の場合は示せたから、以後 $1 \leq \delta \leq n-2$ の場合について証明する。

Whitney の定理[4]によれば $V^{(n)}$ は W.S. set の構造をもつ。よって補題 1 により、 $K = S_\varepsilon^{2n+1} \cap V^{(n)}$ も W.S. set となる。但し、 $\varepsilon > 0$ は充分小: $K = \bigcup_{x \in \delta} X$. 我々は、 K の S_ε^{2n+1} の sub set としての tubular nbd system $\{T_x, \pi_x, \rho_x\}$ を考えることにする。§2 の記号は X のまま用いる。更に次の記号を追加する: $f: \partial T \rightarrow S^1$ による ∂T の \mathbb{Z} -covering を $\tilde{\partial T}$ とする。また $f: \nabla T(X) \rightarrow S^1$ による $\nabla T(X)$ の \mathbb{Z} -covering を $\tilde{\nabla T}(X)$ とする。勿論 $\tilde{\partial T} = \bigcup_{x \in \delta} \tilde{\nabla T}(X)$. (Cf. 補題 2.)

$p: \tilde{\nabla T}(X) \rightarrow \nabla T(X)$ を \mathbb{Z} -covering の projection. $j: \nabla T(X) \rightarrow T(X)$ を inclusion とする。 $p: \tilde{\partial T} \rightarrow \partial T, j: \partial T \rightarrow T$ も同様。

補題 4. 我々は n に関する帰納法で定理 1 を示すのだが、帰納法の仮定を正しいとすれば、§2 補題 3 (1) の fiber bundle の fiber の \mathbb{Z} -covering は $n-\delta-1$ connected である。

この補題 4 は次の § で示す。この § では 補題 4 を仮定した上で定理を示す。

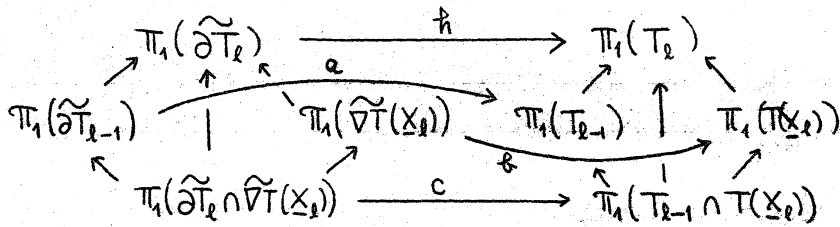
補題 5. $j \circ p: \tilde{\partial T} \rightarrow T$ は map として $n-\delta$ -connected. すなわち $\pi_i(j \circ p) = 0, i \leq n-\delta. (1 \leq \delta \leq n-2, n \geq 3.)$

証明. K の strata \mathcal{J} を $\tau \in \mathbb{N}^r$ として X_1, X_2, \dots, X_r とする。但し各 X_i は connected かつ $X_i < X_j \Rightarrow i < j$ と仮定する。

$\tilde{\partial T}_i = \bigcup_{\nu \leq i} \tilde{\partial T}(X_\nu)$, $T_i = \bigcup_{\nu \leq i} T(X_\nu)$ とおく。自然数 l に関する induction を 1) $\pi_1(\tilde{\partial T}_l) \simeq \pi_1(T_l)$, 2) $H_i(\tilde{\partial T}_l) \rightarrow H_i(T_l)$ は iso ($i \leq n-s-1$), onto ($i \leq n-s$) を示そう。

1). $\tilde{\partial T}_l = \tilde{\partial T}_{l-1} \cup \tilde{\partial T}(X_l)$, $T_l = T_{l-1} \cup T(X_l)$. である。

Van Kampen の定理によつて



a が同型なことは l に関する induction から。 b と c との同型は、それらが $n-s-1$ connected な fiber を持つ bundle と同じ homotopy type を持つ maps $\tilde{\partial T}(X_l) \rightarrow T(X_l) \simeq X_l$, と $\tilde{\partial T}_{l-1} \cap \tilde{\partial T}(X_l) \rightarrow T_{l-1} \cap T(X_l) \simeq \partial X_l$ とから導かれる。補題 5 の仮定から $n-s-1 \geq 1$ と仮定するからである。こうして a, b, c は同型となり h も同型となる。

2). $n-s-1$ - connected な fiber を持つ bundle に関する Serre の exact sequence 及び l に関する帰納法の仮定を次の diagram に応用する :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \rightarrow H_i(\tilde{\partial T}_{l-1} \cap \tilde{\partial T}(X_l)) & \rightarrow & H_i(\tilde{\partial T}_{l-1}) \oplus H_i(\tilde{\partial T}(X_l)) & \rightarrow & H_i(\tilde{\partial T}_l) & \rightarrow & \\
 \text{(Mayer-Vietoris)} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \rightarrow H_i(T_{l-1} \cap T(X_l)) & \rightarrow & H_i(T_{l-1}) \oplus H_i(T(X_l)) & \rightarrow & H_i(T_l) & \rightarrow &
 \end{array}$$

five lemma を使って (2) が示せる。 $\ell = \mathbb{Z}$ とおけば結局, $\pi_1(\tilde{\partial T}) \cong \pi_1(T)$, $H_i(\tilde{\partial T}) \rightarrow H_i(T)$ は iso ($i \leq n-1$), onto ($i \leq n$).
 ここでは次の Milnor の定理 [2] を思い出す.

補題 6. $K = S_\varepsilon^{2n+1} \cap V^{(m)}$ は $n-2$ -connected である。

いま, 補題 5 では $n \geq 3$ を仮定して 11 から, $\pi_1(K) = 0$.
 加之 $\pi_1(T) \cong \pi_1(K) \cong 0$ となり, 上に示したことから $\pi_1(\tilde{\partial T}) = 0$.
 故に J.H.C. Whitehead の定理により $\tilde{\partial T} \rightarrow T$ は $n-1$ -connected.

補題 5 の証明終.

補題 5 の系 (i). $\pi_i(\tilde{\partial T}) = 0 \quad i \leq n-1$. である.

さて \mathbb{C} の原点を中心とする充分小さな円周 S_δ^1 をとる。 δ が充分小さく $f: S_\varepsilon^{2n+1} - K \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ は S_δ^1 に関して t -regular となり, そのひきもどし $M_\delta \subset S_\varepsilon^{2n+1} - K$ を考えることができる。 M_δ は $2n$ -manifold である。 $M_\delta \subset \text{Int } T$ としてよい。
 K の S_ε^{2n+1} における tubular nbd system の各 disk bundle を充分細くとることにより, total space T' をとると,

$$M_\delta \subset \text{Int}(T - T')$$

とすることができる。 また更に δ' を充分小にとると, $\partial T'$ を M_δ と $M_{\delta'}$ の間の, S_ε^{2n+1} 内の cobordism W に含まれるようにすることができる。 W は明らかに product であり, $T - \text{Int } T'$ も product のことが示せる。(Cf. 加藤 [1]) 従って, S_ε^{2n+1} の

中の、 M_δ と ∂T との間の cobordism は "invertible cobordism" であり、従って h -cobordism である。故に $M_\delta \simeq \partial T$.
とくに

$$\text{補題5の系(ii)} \quad \pi_i(\tilde{M}_\delta) = 0 \quad i \leq n-d-1.$$

δ を充分小さく とれば " $S_\varepsilon^{2n+1} \cap f^{-1}(\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \delta\}) = F_\delta$ が Milnor-fiber F と同じ homotopy type を持つことが知られている。(cf. Milnor [2]). 更に Milnor [2] によれば"

$$\text{補題7:} \quad \pi_i(F_\delta, \partial F_\delta) = 0 \quad i \leq n-1.$$

我々の定理1は次のように示される:

$\tilde{M}_\delta = \partial F_\delta \times \mathbb{R}$ に注意する。補題5の系(ii)より $\pi_i(\partial F_\delta) = 0$
 $i \leq n-d-1$, よって補題7より $\pi_i(F) \cong \pi_i(F_\delta) = 0, i \leq n-d-1$.

定理1の証明終.

§4. 補題4の証明.

C_X を Tubular neighbourhood System の性質(3) (cf. §2) によって compact set とする。 $p \in C_X$ をとると、 p の近傍で $T_X \rightarrow X$ は real analytic としてよい。 $T_{X,p}$ は fiber は、 S_ε^{2n+1} の natural metric に関して X と直交している。 X を含む、 $V^{(n)}$ の stratum を \mathcal{X} とする。 \mathcal{X} は $\mathbb{C}^{(n+1)}$ の complex submanifold である。 $\mathbb{C}^{(n+1)}$ の Hermitian metric に関して、 $p \in \mathcal{X}$ に対して $\tau_p \mathcal{X}$ に直交する \mathbb{C} -linear subspace L_p をとる。 $\dim_{\mathbb{C}} L_p = (n+1 - \dim \mathcal{X})$ である。

補題 8. p の近傍において, $\Sigma(f|L_p) = \Sigma(f) \cap L_p$ である.

証明: Curve selection lemma [2] によつて, $f|L_p$ の critical value は p の近傍では 0 しかないのであるがゆかり, p の近傍で $\Sigma(f|L_p) \subset V^m \cap L_p$ を知る. $\Sigma(f|L_p) \supset \Sigma(f) \cap L_p$ は明らかである. p の近傍では $\Sigma(f|L_p) \cap R = \emptyset$ を示せばよい. ただし R は $R = V^m - \Sigma(f)$ である. もし $\Sigma(f|L_p) \cap R$ が p に収束する点列 $\{p_i\}$ を含むとするならば, $(\text{grad } f)_{p_i} \neq 0$, $(\text{grad } f)_{p_i} \perp L_p$ となる. 但し $\text{grad } f = (\frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_{n+1}})$. $\{p_i\}$ の部分列を適当に選んで, $(\text{grad } f)_{p_i} \rightarrow \ell$, $T_{p_i}(R) \rightarrow \tau$ とできる. $p_i \in R$ 中之 $(\text{grad } f)_{p_i} \perp T_{p_i}(R)$ によつて $\ell \perp \tau$. 一方 $\ell \perp L_p$ 中之 $\ell \in T_p(X)$. これは $T_p(X) \not\subset \tau$ を意味し, Whitney condition (a) に矛盾. 中之 p の近傍で $\Sigma(f|L_p) \cap R = \emptyset$ が示された. Q.E.D.

補題 8 により, $\dim_{\mathbb{C}} \Sigma(f|L_p) = s + (n+1 - \dim \mathcal{X}) - (n+1) = s - \dim \mathcal{X}$ となる. 故に §3 の n に関する帰納法の仮定が正しければ, $f|L_p: L_p \rightarrow \mathbb{C}$ の Milnor fiber の connectivity は, $(\dim L_p - 1) - \dim_{\mathbb{C}} \Sigma(f|L_p) - 1 = (n - \dim \mathcal{X}) - (s - \dim \mathcal{X}) - 1 = n - s - 1$ - connected となる.

補題 4 を示すには, $f|L_p: L_p \rightarrow \mathbb{C}$ の Milnor fiber と, §2 の 補題 3(1) の fiber の \mathbb{Z} -covering が homotopy equivalence を言えればよい.

"Local bundle" at p .

点 $p \in C_x \subset X \subset K$ を上述のようにとる。 p を通る real dim. $2(n+1 - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{X})$ の \mathbb{R} -linear subspace M と $\tau_p(X)$ とのなす角をはかる目やすとして次の量 θ を導入する。

$$(1 \geq) \theta(M, \tau_p(\mathcal{X})) = 1 - \max_{\substack{(v, w) \\ \in (M, \tau_p(\mathcal{X}))}} \{ | \langle v, w \rangle | / (|v| \cdot |w|) \} \geq 0$$

$\theta(M, \tau_p(\mathcal{X})) = 0 \iff M$ と $\tau_p(\mathcal{X})$ は transverse でない。 また

$\theta(M, \tau_p(\mathcal{X})) = 1 \iff M \perp \tau_p(\mathcal{X})$ である。

M の中の p を中心とし半径 ε' の球 $S_{p, \varepsilon', M}$ をとる。

$\delta > 0$ に対し $U_\delta = \{ M \in \text{Grass}(2(n+1), 2(n+1 - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{X})) \mid \theta(M, \tau_p(\mathcal{X})) > \delta \}$

とおく。 $E = \{ (v, M) \mid M \in U_\delta, v \in S_{p, \varepsilon', M} - \{ \delta \mathcal{X} \} \}$, $\pi: E \rightarrow U_\delta$

を $\pi(v, M) = M$ と定義する。 U_δ は Grass. の open set である。

補題 9 $\delta > 0$ に対し $\varepsilon' > 0$ を充分小に選ぶは、 $\pi: E \rightarrow U_\delta$

は U_δ 上の fiber bundle の構造をもつ。

証明は Whitney conditions (a)(b), と Thom の isotopy lemma

を使ってなされる。詳細は省略する。

p に於て球面 S_ε^{2n+1} (原点中心, 半径 $\varepsilon > 0$, Milnor fiber の定義に現われたもの) に接し, $\tau_p(X)$ に直交する \mathbb{R} -linear space を

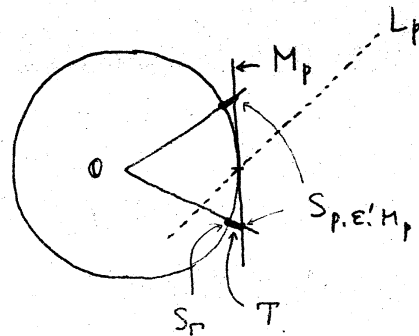
M_p とする。 $\dim_{\mathbb{R}} M_p = 2(n+1 - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{X}) = \dim_{\mathbb{R}} L_p$.

$\delta > 0$ を充分小にとれば $L_p, M_p \in U_\delta$ となることに注意する。
すると補題9により次を得る。

補題 10. $S_{p, \varepsilon, L_p} - |\delta \varepsilon| \cong S_{p, \varepsilon, M_p} - |\delta \varepsilon|$ (diffeo.)

$\mathbb{C}^{(n+1)}$ の原点 0 を頂点とする S_{p, ε, M_p} 上の cone Γ を考え、これと S_ε^{2n+1} の交わりを S_Γ とする。 $\Gamma \cap S_\Gamma$ と S_{p, ε, M_p} の間の部分を T とする。 r を原点 0 からの距離関数とし、 $r(S_{p, \varepsilon, M_p}) = r_0$, $r(S_\Gamma) = r_1$ とすれば、 $r: T \rightarrow [r_1, r_0]$ は線分上の fiber bundle である。 更に

補題 11. $r: T - |\delta \varepsilon| \rightarrow [r_1, r_0]$ は fiber bundle である。



補題11により $S_{p, \varepsilon, M_p} - |\delta \varepsilon| \cong S_\Gamma - |\delta \varepsilon|$. (diffeo.)

§2 補題(3)の(1)の bundle の fiber は $S_\Gamma - |\delta \varepsilon|$ と一致するとしよ 11. (Tubular nbd system の性質 3). よって r の \mathbb{Z} -covering は $S_{p, \varepsilon, L_p} - |\delta \varepsilon|$ の \mathbb{Z} -covering に diffeo である。(補題10を使っ た.) $S_{p, \varepsilon, L_p} - |\delta \varepsilon|$ の \mathbb{Z} -covering は $f|L_p: L_p \rightarrow \mathbb{C}$

の Milnor fiber $X \times \mathbb{R}$ に diffeo 中え. 補題 8 の次に述べた注意に
よって $n-1-1$ -connected である. こうして補題 4 は完全に
示されたことになる. Q.E.D.

References

- [1] 加藤十吉: 解析的集合の初等位相幾何学 (to appear in 「数学」)
- [2] J. Milnor: Singular points of complex hypersurfaces
annals of Math. studies N° 61. (Princeton)
- [3] J. Mather: Notes on topological stability. (Lecture note.
Harvard Univ. 1970.)
- [4] H. Whitney: Local properties of analytic varieties
Differential and Combinatorial Topology