

## 可附番自由度の力学系の統計流体力学

東大 工学部 桑原 真二

### § 1. 序論

乱流の場を確率過程として定式化すれば、位相空間をなす、流れの場の有限空間にはる確率分布密度汎関数に対する確率保存の式となる。

我々が解きたい問題はまず、この確率保存の式の定常解であるが、特別な非現実的な解（非粘性の場合の白いスプロクトル）以外に解は求まっていない。この問題と困難にしている原因は、現実の一樣な乱流では、必ず粘性散逸が存在し、定常解を予想することができず、粘性散逸をおさむるために、常にエネルギー供給を行っているような系、たとえば、管中の乱流、平板乱流境界層等、複雑な系でなければ、定常解が存在しないことに基固している。

次にとぎたい問題は、空間的一樣な乱流に対応する初期分布を与えて解く、初期値問題である。このでの困難は初期分布を如何にとるかという問題である。等重率のようなア・ポリアリな仮定はもちろぬ成りたっている。なるべく簡単で、

確率分布の諸条件を満足するものモエラフといふ経験的を方法がとられり。

簡単のため、可附番の変数であらわされる力学系に対する確率保存の式を求めよう。例之ば第1図のように、2つのピストンで境された円柱に流体が満たされ、時刻  $t < 0$  では速度は殆ど0 :

$$v \doteq 0 \quad (\sqrt{v^2} \ll \sigma) \quad (1.1)$$

とする。  $t=0$  で壁を急に速度  $-\sigma$  で動かし始めり。この系では、境界条件は定常である。このように流れる場が

$$v(x, t) = \sum_{l=0}^{\infty} a_{3l+2}(t) v_l^l(x) \quad (t > 0) \quad (1.2)$$

で表わされるものとする。ここで

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} v^0 &= 0 && \text{流れる場で} \\ v^0 &: \text{定常な境界条件を満足する} \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} v^l &= 0 && : \text{流れる場で} \\ v^l &= 0 && : \text{境界で} \end{aligned} \right\} \quad l \geq 1 \quad (1.4)$$

であり、 $\{v^l\}_{l=0}^{\infty}$  は  $L_2$  の意味で完備な関数系とする。

Navier-Stokes の方程式は、連続の方程式と共に、適当な方法で、たとへば、Galerkin法で

$$\frac{\partial a_m}{\partial t} = \mathcal{H}_m(a) + \mathcal{L}_m(a) \quad (1.5)$$

の形に帰着される。  $\mathcal{H}_m$  は  $a$  について二次(非線形項)、  
 $\mathcal{L}_m$  は  $a$  について一次と存する。この式により力学系は無次元  
 元のベクトル  $a$  によって表わされたことと存する。それ故、 $a$   
 空間を位相空間と考へ、そこに確率分布密度汎関数

$$D = D(a, t) \quad (1.6)$$

を導入する事ができる。1つの力学系を時間的に追跡す  
 れば、運動方程式(1.5)によって、位相空間中を自然運動  
 natural motion する。色々な初期値に対応する力学系を考  
 へ、位相空間の各点から出発する自然運動がえられる。初め  
 にこの各点の確率を分布させれば、(1.5)の助けをかりて、  
 その後の確率分布はおめられるはずである。確率保存の式は

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial a_l} (\dot{a}_l D) = 0 \quad (1.7)$$

と存する。ここで  $\dot{a}_l$  は(1.5)の右辺である。

## §2. 確率保存の式の種分と平均量

$\{a_l\}$  の  $l$  の大きいものは、いわば高周波をあらわし、粒  
 性散逸による減衰がはげしいと考へられる。そこで  $D$  を

$$D = D(a_0, a_1, \dots, a_L, t) \quad (2.1)$$

のように  $a$  を有限次元にする近似が許されよう。そこで

(1.7)  $\varepsilon$  有限次之  $u_1, \dots, u_L$

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \sum_{l=1}^L \frac{\partial}{\partial v_l} (u_l D) = 0 \quad (2.2)$$

$$\left. \begin{aligned} D &= D(v_1, \dots, v_L, t) \\ u_l &= u_l(v, t) \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

$$\text{初期値} \quad D(v, 0) = \hat{D}(v, 0) \quad (2.4)$$

の積分を考へよ。

今、運動方程式の初期条件:

$$v_l = \hat{v}_l \quad (t=0) \quad (2.5)$$

のもとに

$$\frac{\partial v_l}{\partial t} = u_l(v, t) \quad (2.6)$$

とくと、

$$v_l = v_l(v, t) \quad (2.7)$$

がえられる。そこで、 $v \in \hat{v}$  からの変換とみせし

$$\left\{ \begin{aligned} v_l &= v_l(v, s) \\ t &= s \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} \hat{v}_l &= \hat{v}_l(v, t) \\ s &= t \end{aligned} \right. \quad (2.8)$$

とおくと、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{l=1}^L u_l \frac{\partial}{\partial v_l} \\ \frac{\partial}{\partial v_l} &= \sum \frac{\partial v_m}{\partial \hat{v}_l} \frac{\partial}{\partial v_m} \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

から、(2.2) は

$$\frac{\partial}{\partial s} J D = 0 \quad (2.10)$$

と等しい。ここで

$$J = \frac{\partial(v_1, \dots, v_L)}{\partial(\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_L)} \quad (2.11)$$

は、 $v \rightarrow \hat{v}$  の変換のヤコビ行列である。

(2.10)は

$$J D = \hat{D} \quad (2.12)$$

と等しい。今  $f = f(v, t)$  の量の統計平均値は

$$\begin{aligned} \langle f \rangle(t) &= \langle f \rangle(s) \\ &= \int \dots \int f(v, t) D(v, t) dv \\ &= \int \dots \int f(v(\hat{v}, t), t) \hat{D}(\hat{v}) d\hat{v} \end{aligned} \quad (2.13)$$

と等しい。

§3. Burgers 方程式に対するフーリエ級数展開

Burgers 方程式:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad (3.1)$$

を簡単のため

$$v(0, t) = v(1, t) = 0$$

の境界条件を課して,

$$v = \sum_{l=1}^{\infty} v_l(t) \sin \pi l x \quad (3.2)$$

の形の展開でできるとすると、(3.1)から

$$\dot{v}_1 + \pi^2 \bar{v} v_1 + \frac{\pi}{2} \left[ v_1 v_2 - \sum_{m=2}^{\infty} m v_m (v_{m-1} - v_{m+1}) \right] \quad (3.3a)$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_l + \pi^2 l^2 \bar{v} v_l + \frac{\pi}{2} \left[ \sum_{m=1}^{l-1} m v_m v_{l-m} - \sum_{m=l+1}^{\infty} m v_m v_{m-l} \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^{\infty} m v_m v_{l+m} \right] = 0 \quad l \geq 1 \quad (3.3b) \end{aligned}$$

が之うたさ。 (3.3a), (3.3b) において、 $v_l \in L^2 \mathbb{R}^+$  とお  
ると

$$\dot{v}_1 + \pi^2 \bar{v} v_1 + \frac{\pi}{2} (v_1 v_2 + v_2 v_3 + \dots + v_{L-1} v_L) = 0 \quad (3.4a)$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_l + \pi^2 l^2 \bar{v} v_l - \frac{\pi}{2} \left[ l (v_1 v_{l+1} + v_2 v_{l+2} + \dots + v_{L-2} v_L) \right. \\ \left. - v_1 v_{l-1} - 2 v_2 v_{l-2} - \dots - (l-1) v_{l-1} v_l \right] = 0 \quad (3.4b) \end{aligned}$$

が之うたさ。

2) (3.4a) の  $v_1 \in L^2$ , (3.4b) の  $v_l \in L^2$  かつ  $\bar{v} = 0$  の場合

$$\frac{d}{dt} \sum_{l=1}^L v_l^2 = 0 \quad (3.5)$$

すなわち、エネルギー保存  $\frac{1}{2} \sum_{l=1}^L v_l^2 = \text{一定}$  が之うたさ。

7-1 I 2 成分だけ  $\varepsilon < \eta$

$$v_1 = a \cos \theta \quad v_2 = a \sin \theta$$

とおくと  $\dot{v} = 0$  の場合  $(3.4a), (3.4b)$  は

$$\left. \begin{aligned} \dot{a} &= 0 \\ \dot{\theta} + \frac{\pi}{2} a \cos \theta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

初期条件:  $a = \hat{a}, \theta = \hat{\theta}$  に対する解は

$$\sin \theta = - \frac{\sinh \frac{1}{2} \pi \hat{a} t - \cosh \frac{1}{2} \pi \hat{a} t \sin \hat{\theta}}{\cosh \frac{1}{2} \pi \hat{a} t - \sinh \frac{1}{2} \pi \hat{a} t \sin \hat{\theta}} \quad (3.7a)$$

$$\cos \theta = \frac{\cosh \frac{1}{2} \pi \hat{a} t}{\cosh \frac{1}{2} \pi \hat{a} t - \sinh \frac{1}{2} \pi \hat{a} t \sin \hat{\theta}} \quad (3.7b)$$

となる。

次に確率保存の式  $\Sigma(a, \theta, t)$  でかくと

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial a} (a \dot{a} D) + \frac{\partial}{\partial \theta} (a \dot{\theta} D) = 0 \quad (3.8)$$

となる。  $\therefore (3.6)$  を代入すると

$$\frac{\partial D}{\partial t} - \frac{\pi}{2} a \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta D) = 0 \quad (3.9)$$

がえられる。  $\Sigma$  の定常解は

$$\left. \begin{aligned} D &= f_1(a) \delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + f_2(a) \delta\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right) \\ \int_0^{\infty} (f_1 + f_2) a da &= 1, \quad f_1, f_2 \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

である。

初期分布  $D(a, \theta, 0) = \hat{D}(a, \theta)$  とし

$$\hat{D}(a, \theta) = \frac{1}{2\pi a} \delta(a - \hat{a}) \quad (3.11)$$

とすれば、程合でよす。

$$\left. \begin{aligned} \langle v_1 \rangle(t) &= 0 \\ \langle v_2 \rangle(t) &= -\frac{\hat{a}}{\sinh \frac{1}{2} \pi \hat{a} t} (\cosh \frac{1}{2} \pi \hat{a} t - 1) \end{aligned} \right\} (3.12)$$

がえられる。そこで

$$\begin{aligned} \langle v \rangle(t) &= \langle v_1 \sin \pi x + v_2 \sin 2\pi x \rangle \\ &= -\frac{\cosh \frac{1}{2} \pi \hat{a} t - 1}{\sinh \frac{1}{2} \pi \hat{a} t} \sin 2\pi x \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\langle v(x) v(x') \rangle(t) = \hat{a}^2 \frac{\cosh \frac{1}{2} \pi \hat{a} t - 1}{\sinh \frac{1}{2} \pi \hat{a} t}$$

$$\left[ \sin \pi x \sin \pi x' + \cosh \frac{1}{2} \pi \hat{a} t \sin 2\pi x \sin 2\pi x' \right] \quad (3.14)$$

がえられる。

$\bar{v} \neq 0$  についての (3.6) に対応する式は

$$\left. \begin{aligned} \dot{a} + \pi^2 \bar{v} a (1 + 3 \sin^2 \theta) &= 0 \\ \dot{\theta} + 3\pi^2 \bar{v} \cos \theta \sin \theta + \frac{\pi}{2} a \cos \theta &= 0 \end{aligned} \right\} (3.15)$$

となる。これは数値計算でとくおはす。  $a=1$  の初期条件で  $\bar{v} = 0.01$  ( $R=100$ ) の場合にとくとお2図のようになる。

$\bar{v} = 0$  の場合の3成分を



$$v_1 = \omega \theta \quad v_2 = a \sin \theta \cos \varphi \quad v_3 = a \sin \theta \sin \varphi \quad (3.16)$$

とおくと、

$$\dot{a} = 0$$

$$\dot{\theta} = -\frac{\pi}{2} (\omega \theta + \sin \theta \sin \varphi) \omega \varphi$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{\pi}{2} [\sin \theta (2 + \cos^2 \varphi) - \omega \theta \sin^2 \varphi] \omega \theta$$

となる。上の微分方程式から予想される解の形式は次の図のようである。

#### §4. まとめ

この論文であつた問題をまとめると次のようになる。

(1) 連続無限次元の力学系は完備な関数系に展開でき、可附番次元の方程式であらわされる(運動方程式)。しかも、高次のモードは粘性減衰が大きく省略可能で力学系は有限次元で近似できる。

(2) 統計は、位相空間(速度ベクトル場空間)にはる確率分布密度汎関数により導入される。分布関数は確率保存の式により、決定論的に求められる。

(3) 平均量は、運動方程式の初期値問題の解と、初期の確率分布から求められる。

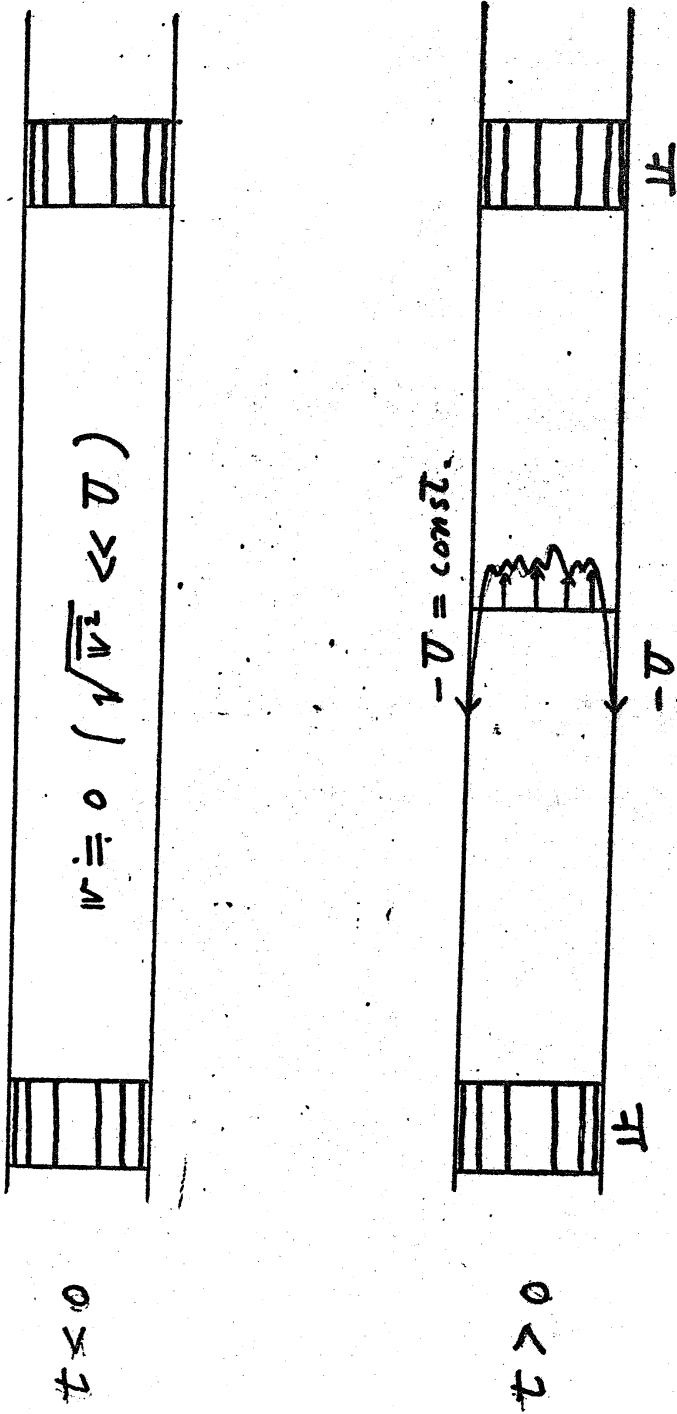
(4) 運動方程式の近似(次元)を小さくすることによって近似をすることができる。運動方程式の解析(連立常微分方

式)は必ずかくないが、平均量を求めるとき、必要毎積分が次元数だけの多重積分となりため、次元を小さくすることによって非常な困難ともなる。

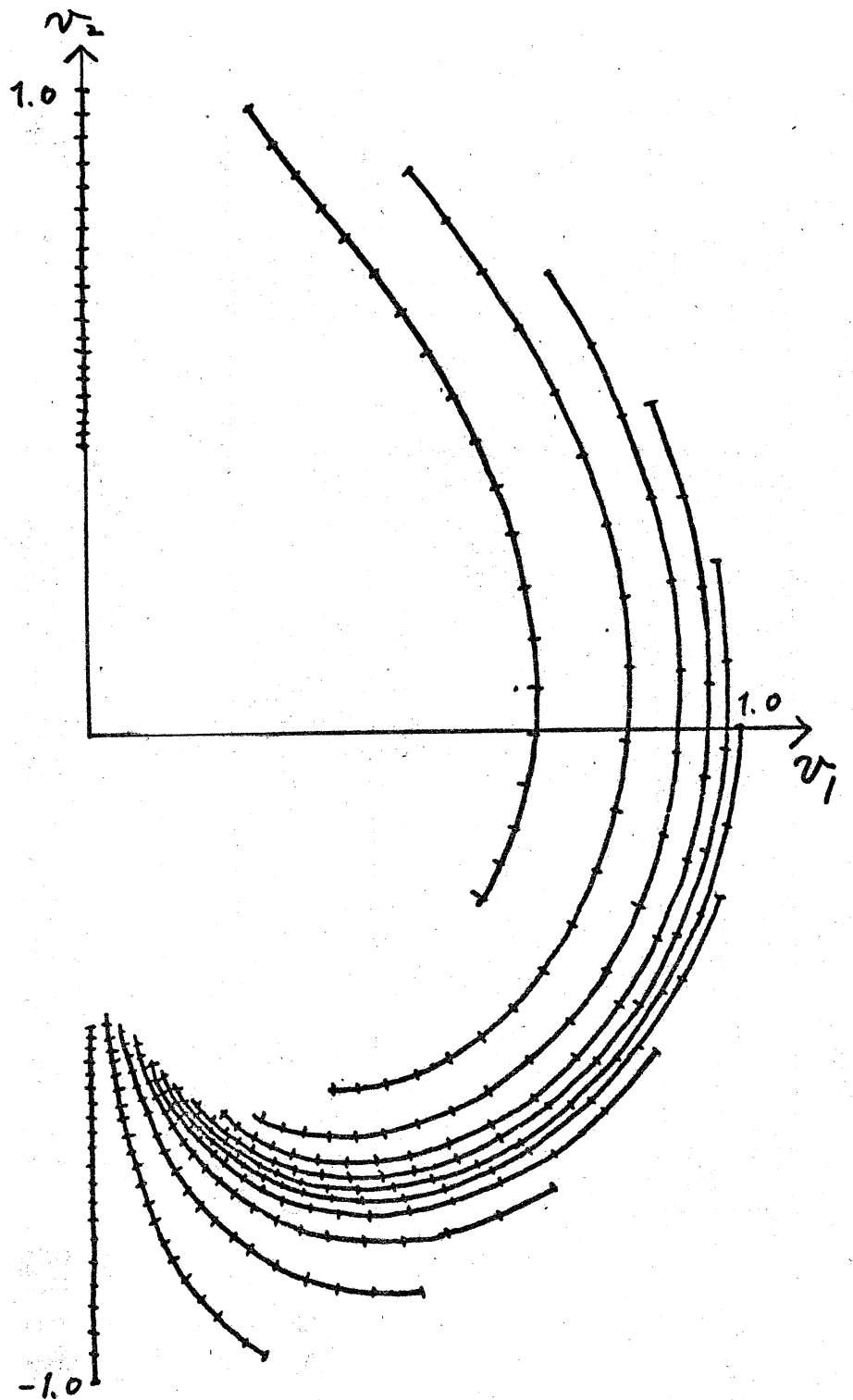
なお、初期エネルギー分布  $\hat{E}_m = E(k_m, 0)$  とあるときの最も適切な初期確率分布は

$$\hat{P}(W) = \frac{1}{(2\pi)^{L/2} (\hat{E}_1 \hat{E}_2 \dots \hat{E}_L)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^L v_k^2 / E_k^2}$$

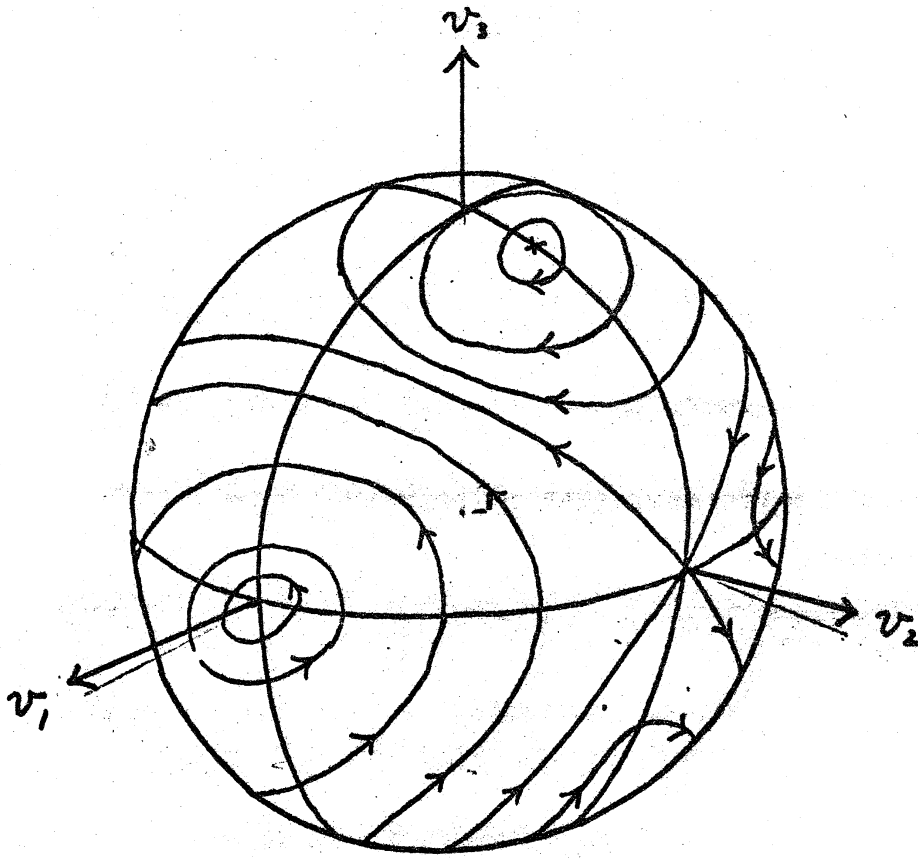
と考えられるが、これによって平均量は求められていない。



才11圖. 乱流場についての思考実験



才2図. Burgers 方程式, 2フーリエ成分モデル  
 $\nu = 0.01$  の時の解曲線.



第3図 Burgers 方程式, 3 フーリエ成分  
モデル  $\bar{v} = 0$  の時の解曲線