数理解析研究所講究録
第171巻 1973年 151-165

混相系の熱対流

農工大教養　高木 隆司
東大宇宙研　神部 勉

§1. はじめに

大気運動などで実際に見かける熱対流の現象では，大気が液相あるいは固相の粒子を含んでいるばあいが多い。特に液相粒子のばあいには，蒸発して蒸気になったり，逆に蒸気が凝縮して粒子が成長したりして，その際潜熱の吸収あるいは放出が起り，混合流体の熱的性質が‘dry’のばあいと異なってくる。

上昇気流の中でいったん雲が発生すると，そのとき放出された潜熱のために，さらに上昇運動が促進されることは一般に知られている。また台風では，中心の低圧部に向って風が吹きこむとき，海面の水蒸気を持ちこみ，中心のまわりの高空で雲をつくって潜熱を放出する。これが台風維持の主因と考えられるため，台風は一種の熱機関であると呼ばれるわけである。一方，scaleがずっと小さくなると，蒸気密度が一様でないとき起る拡散現象は，必ずしも無視できない。これが室内実験で，ある種の不安定性に導くことは後で明らか

1 :

となろう。

以下では，粒子を含む混合気体の熱対流を，詳しくいうと温度差のある上下の壁の間にある静止流体層の安定性を，理論を主として述べる。

§2. 混相系の支配方程式

主体となる inert gas (index i)，凝縮を起す蒸気(v) および凝縮粒子(p) の3種からなる混合流体(例えば大気中の雲)を考えるとき，各構成要素に対する質量・運動量・エネルギーの保存式は以下のようになる。

質量の保存：

$$\left(\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\right)^i \rho^i = 0, \quad \left(\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\right)^v \rho^v = \eta, \quad \left(\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\right)^p \rho^p = -\eta. \qquad (1), (2), (3)$$

ここで，η は蒸気の発生率である。また

$$\left(\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\right)^i f \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla\cdot(f\mathbf{V}^i), \quad \text{etc.}$$

である。運動量の保存：

$$\left(\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\right)^i \rho^i \mathbf{V}^i = \nabla\cdot\Pi^i + \rho^i \mathbf{g} + \mathbf{f}^i, \qquad (4)$$

$$\left(\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\right)^v \rho^v \mathbf{V}^v = \nabla\cdot\Pi^v + \rho^v \mathbf{g} + \mathbf{f}^v + \eta\tilde{\mathbf{V}}, \qquad (5)$$

$$\left(\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\right)^p \rho^p \mathbf{V}^p = \qquad + \rho^p \mathbf{g} + \mathbf{f}^p - \eta\tilde{\mathbf{V}}. \qquad (6)$$

ここで，Π は stress tensor, $\mathbf{f}$ は他の成分による friction

force ($\Sigma \boldsymbol{f} = 0$), $\boldsymbol{g}$ は重力加速度ベクトル($|\boldsymbol{g}|=g$),
$\tilde{\boldsymbol{v}}$ は vapor発生のときの単位質量当りの exchange momentum.

エネルギー保存:

$$\left(\frac{D}{Dt}\right)^i \rho^i E^i = -\nabla\cdot \boldsymbol{q}^i + h^i + \nabla\cdot(\Pi^i \boldsymbol{v}^i) + \rho^i \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v}^i + \Omega^i , \qquad (7)$$

$$\left(\frac{D}{Dt}\right)^v \rho^v E^v = -\nabla\cdot \boldsymbol{q}^v + h^v + \nabla\cdot(\Pi^v \boldsymbol{v}^v) + \rho^v \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v}^v + \Omega^v + \eta\tilde{e} , \qquad (8)$$

$$\left(\frac{D}{Dt}\right)^p \rho^p E^p = h^p + \rho^p \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v}^p + \Omega^p - \eta\tilde{e} . \qquad (9)$$

ここで, $E = \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 + e$ (e: 内部エネルギー), $\boldsymbol{q}$ は heat flux, h は他の成分との heat exchange rate , Ω は他の成分から friction force によってなされた仕事, $\tilde{e}$ は vapor発生のときの単位質量当りの exchange energy で

$$\tilde{e} = e^p(\tilde{T}) + \lambda + \tfrac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{v}}^2 = e^v(\tilde{T}) + p^v/\rho^v + \tfrac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{v}}^2 ,$$

また λ は単位質量当りの潜熱である($\Sigma h = 0$, $\Sigma\Omega = 0$)。

主成分の気体と蒸気とは理想気体の状態方程式に従うとする:

$$p^i = R^i \rho^i T^i , \qquad p^v = R^v \rho^v T^v . \qquad (10)$$

方程式を簡単化するため, 次の量を導入しよう:

$$\left.\begin{aligned} &\rho^g = \rho^i + \rho^v , \qquad r = \rho^p/\rho^g , \\ &\boldsymbol{v} = (\rho^i \boldsymbol{v}^i + \rho^v \boldsymbol{v}^v)/\rho^g , \qquad \pi^i_{ij} + \pi^v_{ij} = -p\,\delta_{ij} + \tau^g_{ij} \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

以下で index の g は particles を除く気体部分に対して使う。
Vapor の拡散および heat flux を次のようにおく,

$$\rho^v(\boldsymbol{v}^v - \boldsymbol{v}) = -D_m \nabla\rho^v ,$$

$$\mathbf{q} = -k_T \nabla T.$$

Vaporの密度が一様でないために inert gas 中を拡散する効果を第1式は表わしている。D_m および k_T は相互拡散および熱伝導の係数である。また

$$T^i = T^v \equiv T$$

を仮定する。これらによって方程式を2つ減らすことができる。(1)～(9)の式は次のようになる。

$$\begin{cases} \dfrac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\rho^g = \eta, & (12) \\ \dfrac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\rho^v = \eta + \nabla(D_m \nabla \rho^v), & (13) \\ \dfrac{D}{Dt} r = -\dfrac{1+r}{\rho^g}\eta + \dfrac{1}{\rho^g}\nabla\cdot(\rho^p(\mathbf{v}-\mathbf{v}^p)) & (14) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho^g \dfrac{D}{Dt}\mathbf{v} = -\nabla p + \nabla\cdot\sigma + \rho^g\mathbf{g} + \mathbf{f} + \eta(\tilde{\mathbf{v}}-\mathbf{v}), & (15) \\ \rho^p \left(\dfrac{D}{Dt}\right)^p \mathbf{v}^p = \rho^p\mathbf{g} - \mathbf{f} - \eta(\tilde{\mathbf{v}}-\mathbf{v}^p), & (16) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\rho C_p)^g \dfrac{D}{Dt} T = \nabla(k_T \nabla T) + h + \eta(e^v(\tilde{T}) - e^v(T)), & (17) \\ \rho^p C^p \left(\dfrac{D}{Dt}\right)^p T^p = -h - \eta(\lambda + e^p(\tilde{T}) - e^p(T^p)). & (18) \end{cases}$$

ここで $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)$ であり、(17)式で $de + p\,d(\frac{1}{\rho}) = C_p dT$, $\rho^i C_p^i + \rho^v C_p^v \equiv (\rho C_p)^g$ とおき、(18)で $de^p = C^p dT$ とした。ここでは inert gas と vapor は連続の式でのみ区別されている。(12), (14), (16) は省略なしに最初の保存式から得られる。以下では静止した混合流体層の安定性を扱うので、(15), (17), (18)

で $O(v^2)$ を省略した。また(17)では，拡散による熱の輸送 $\left(\frac{\rho^i\rho^v}{\rho^g}(C_p^i-C_p^v)(\mathbb{V}^i-\mathbb{V}^v)\cdot\nabla T\right)$ を，(17),(18)では内部 friction による熱の発生 $(O(v^2))$ を，省略した。

平衡状態からのずれが小さいばあいだけを考え，また蒸気は飽和状態に非常に近いとするので

$$\left.\begin{aligned} h &= (\rho C_p)^g\,(T^p-T)/\tau_T \\ q &= (\rho_s(T^p)-\rho^v)/\tau_v \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

と仮定する。Relaxation の時定数 τ_T, τ_v は十分小さいとする。$\rho_s(T)$ は温度Tでの飽和蒸気密度である。

密度あるいは圧力変化の scale height にくらべて，我々の扱う流体層の厚さが十分小さく，また運動が非常にゆっくりのばあいには，Boussinesq 近似がなりたち，浮力の項以外は密度を一定とおくことができる。このとき

(12) は $$\nabla\cdot\mathbb{V}=0 \qquad (20)$$

また，(14) の中で $$\nabla\cdot\tau=\nabla(\mu\nabla\mathbb{V})$$

とおける。(12) の中の q は，常温あるいはそれ以下では，密度変化と同程度の寄与を与えるだけである。半径 1～10 μ 程度の粒子では，沈降速度あるいは速度スリップは非常に小さく，かなりの精度で $\mathbb{V}^p=\mathbb{V}$ とおける。このとき (15) と(16)を加え合わせると

$$\rho\frac{D}{Dt}\mathbb{V}=-\nabla p+\rho\boldsymbol{g}+\nabla\cdot(\mu\nabla\mathbb{V}), \qquad (21)$$
$$\rho=\rho^g+\rho^p=\rho^g(1+r).$$

1

また(14)は
$$\frac{D}{Dt}r = -\frac{1+r}{\rho^g}\eta \tag{14'}$$

大気圧のもとで数cmの流体層の実験では，全圧 $p^i + p^v = p_* =$ 一定としてよいだろう。このとき(10)を使うと

$$\begin{aligned}\rho^g = \rho^i + \rho^v &= \frac{p^i}{R^iT} + \frac{p^v}{R^vT}\\ &= \frac{p_*}{R^iT} - \gamma\rho^v\\ &= \hat{\rho}_* - \alpha^g\rho^g_*(T - T_*) - \gamma\rho^v \end{aligned}\tag{22}$$

を得る。ここで $\hat{\rho}_* = p_*/(R^iT_*)$， $\gamma = (R^v/R^i) - 1$，
$\alpha^g = (1 + \frac{\rho^v_*}{\rho^g_*}\gamma)/T_*$ である。記号 $*$ は基準温度 T_* に対応する量を表わす。方程式(20)，(13)，(14)'，(21)，(17)，(18)を基礎式とし，(19)，(22)を補助関係式とする閉じた方程式系が得られた。

気体中に solid particles が浮遊しているばあいは，$\eta = 0$ とおき，(13)式を省略すればよい。

§3．安定性の解析

簡単のために，輸送係数 μ，k_T，D_m は定数とする。座標系 (x, y, z) の z 軸を鉛直上向きにとる。次の定常解が存在する(index 0 で表わす)。

3-1．定常状態 ($v = 0$，$\frac{\partial}{\partial t} = 0$)

$$T_0 = T_0^p \equiv T_0(z),$$
$$T_0(z) = T_* - a(z - z_*),$$

$$\rho_0^v = \rho_s(T_0) = \rho_{s*} + K(T_0 - T_*) \qquad (K：定数)$$

$$dp_0/dz = -\rho_0 g,$$

$$\rho_0 = \rho_0^g(z)\,(1 + r_0(z)),$$

$$\eta = h = 0,$$

(22)式より $\qquad \rho_0^g(z) = \hat{\rho}_* - \alpha^g \rho_*^g (T_0 - T_*) - \gamma \rho_0^v$

$r_0(z)$は任意であるが，以下では線型分布のみを扱う，

$$r_0(z) = r_* - b(z - z_*)。$$

3-2．Perturbation

上の定常状態に対する small perturbation を index 1 で表わし，次のようにおく，

$$T = T_0 + T_1, \qquad T^p = T_0^p + T_1^p,$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_1, \qquad r = r_0 + r_1,$$

$$\mathbf{v}_1 \equiv \mathbf{v} = (u, v, w).$$

§2で導いた支配方程式を perturbation に関して線型化すると

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{23}$$

$$\frac{\partial \rho_1^v}{\partial t} - a\left(\frac{d\rho_s}{dT}\right)_* w = \eta + D_m \nabla^2 \rho_1^v \tag{24}$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial t} - b\,w = -\frac{1 + r_*}{\rho_*^g}\,\eta \tag{25}$$

$$\rho_* \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p_1 + \rho_* \hat{\nu}\, \nabla^2 \mathbf{v} + \rho_1 \mathbf{g} \tag{26}$$

$$(\rho C_p)^g \left(\frac{\partial T_1}{\partial t} - a\,w\right) = (\rho C_p)_*^g \kappa^g\, \nabla^2 T + h \tag{27}$$

$$(\rho c)^p \left(\frac{\partial T_1^p}{\partial t} - a\,w\right) = -h - \lambda \eta \tag{28}$$

ここで $\hat{\nu} = \mu/\rho_* = \frac{\rho_*^g}{\rho_*}\nu^g$, $\kappa^g = k_T/(\rho c_p)^g$. (11) と (22) を使って

$$\rho_1 = (1+r_*)\rho_1^g + \rho_*^g r_1$$
$$= -(1+r_*)(\alpha^g \rho_*^g T_1 + \gamma \rho_1^v) + \rho_*^g r_1$$

を得る。また (19) より

$$q = \left(\left(\frac{d\rho_s}{dT}\right)_* T_1^p - \rho_1^v\right)/\tau_v,$$
$$h = (\rho c_p)^g (T_1^p - T_1)/\tau_T.$$

次の関係式によって，ρ_1^vの代りに変数T_1^dを導入する

$$\rho_1^v = \left(\frac{d\rho_s}{dT}\right)_* (T_1 + T_1^d). \qquad (29)$$

このとき，もし $\frac{(\rho c)^p}{(\rho c_p)^g}\tau_T$ および $\frac{(\rho c)^p}{\lambda \frac{d\rho_s}{dT}}\tau_v$ ≪ 代表的時間 とすると，(28)は $h + \lambda q \approx 0$ となり，蒸発に使われた熱は気体から補充されることになる。このとき

$$h = (\rho c_p)^g L T_1^d/\tau_0, \quad q = -\left(\frac{d\rho_s}{dT}\right)_* T_1^d/\tau_0 \qquad (30)$$

となる。ここで $L = \lambda\left(\frac{d\rho_s}{dT}\right)_*/(\rho c_p)^g$, $\tau_0 = \tau_v + L\tau_T$。(29)を使って，(24) と (27) から $\partial T_1/\partial t$ を消去すると

$$\frac{\partial T_1^d}{\partial t} = (D_m - \kappa^g)\nabla^2 T_1 + D_m \nabla^2 T_1^d - \frac{1+L}{\tau_0} T_1^d. \qquad (31)$$

従って，τ_0が十分小さいとき，$T_1^d = O(\tau_0)$ となり，(31)で$O(\tau_0)$を省略すると，(30)の関係式を使うことにより

$$q = -\left(\frac{d\rho_s}{dT}\right)_* \frac{D_m - \kappa^g}{1+L}\nabla^2 T_1 \qquad (32)$$

を得る。(30) の ん からわかるように, $T_1^p - T_1 = O(\tau_0)$ である。(27) と (28) を加えて, $T_1^p = T_1$ とおき, 全体を $\overline{\rho c}$ $\left(\equiv (\rho c_p)^g + (\rho c)^p\right)$ で割ると

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = a w + \frac{(\rho c_p)^g}{\overline{\rho c}} \kappa^g \nabla^2 T_1 - \frac{\lambda}{\overline{\rho c}} \eta$$

となる。(32) を使って, η を消去すると

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial t} &= a w + \hat{\kappa} \nabla^2 T_1 \\ \hat{\kappa} &= \kappa^g \frac{(\rho c_p)^g}{\overline{\rho c}} \left(1 + \frac{L}{1+L} \frac{D_m - \kappa^g}{\kappa^g} \right) \end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

を得る。(25) の η に, (32) を使うと

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial r_1}{\partial t} &= b w + \hat{\beta} \nabla^2 T_1 \\ \hat{\beta} &= \alpha^g \Phi \frac{1+r_*}{1+L} (D_m - \kappa^g) \\ \Phi &= \left(\frac{d\rho_s}{dT}\right)_* \Big/ \alpha^g \rho_*^g \end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

を得る。潜熱の影響はLを通して, $\hat{\kappa}$, $\hat{\beta}$ の中に入っている。

$\nabla^2 (26)_z - \frac{\partial}{\partial z} \nabla \cdot (26)$ の微分操作により と(23)式を使うこと, u, v を含まない式が得られる,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w &= \hat{\nu} \nabla^2 \nabla^2 w - \frac{g}{\rho_*} \nabla_{xy}^2 \rho_1, \\ \nabla_{xy}^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\ \rho_1 &= -\alpha^g \rho_*^g (1 + \gamma \Phi)(1 + r_*) T_1 + \rho_*^g r_1 \\ &= -\hat{\alpha} \rho_* T_1 + \rho_*^g r_1, \\ \hat{\alpha} &= \alpha^g (1 + \gamma \Phi). \end{aligned}\right\} \qquad (35)$$

ここで

このようにして，変数 T_1; r_1, w に対する3コの式 (33), (34) (35) を得た。

長さおよび時間の単位を，それぞれ層の厚さ d および $d^2/\hat{\nu}$ として，(x, y, z) と t を無次元化すると（以下でも同じ記号を使う），

$$\left.\begin{aligned} \hat{P}\frac{\partial}{\partial t}T_1 &= \hat{H}\,w + \nabla^2 T_1 \\ \frac{\partial}{\partial t}\,\psi &= \frac{\hat{S}}{\hat{P}}\hat{H}\,w + \hat{Q}\,\nabla^2 T_1 \\ \frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 w &= \nabla^2\nabla^2 w + \frac{\hat{R}}{\hat{H}}\left(\nabla_{xy}T_1 - \frac{1}{1+r_*}\nabla_{xy}\psi\right) \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

となる。ここで $\psi = r_1/\hat{\alpha}$, $\hat{P} = \hat{\nu}/\hat{\kappa}$,

$$\hat{H} = a d^2/\hat{\kappa}, \qquad \hat{S} = b/a\hat{\alpha},$$
$$\hat{Q} = \hat{\beta}/\hat{\alpha}\hat{\nu}, \qquad \hat{R} = g a \hat{\alpha} d^4/\hat{\kappa}\hat{\nu}.$$

Normal mode の安定性を調べるために

$$(T_1, \psi, w) = (\Theta(z), \Psi(z), W(z))\, e^{\sigma t + i(k_x x + k_y y)}$$

とおいて，(36) に代入すると

$$\left.\begin{aligned} (D^2 - \hat{P}\sigma)\,\Theta &= -\hat{H}\,W \\ \hat{Q}\,D^2\Theta - \sigma\psi &= -\hat{S}\,\hat{P}^{-1}\hat{H}\,W \\ (D^2-\sigma)D^2 W &= \hat{R}\,\hat{H}^{-1}k^2\left(\Theta - \frac{1}{1+r_*}\Psi\right) \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

を得る。ここで $D^2 \equiv \frac{d^2}{dz^2} - k^2$, $k^2 \equiv k_x^2 + k_y^2$ である。

(37) で W と Ψ を消去すると，Θ だけの式を得る，

$$D^6\Theta - (1+\hat{P})\sigma D^4\Theta + \left(\hat{P}\sigma^2 - \left(\hat{Q} - \frac{\hat{S}}{\hat{P}}\right)\frac{\hat{R}\,k^2}{(1+r_*)\sigma}\right)D^2\Theta + \left(1 - \frac{\hat{S}}{1+r_*}\right)\hat{R}\,k^2\,\Theta = 0 . \quad (38)$$

潜熱λおよび拡散係数D_mは$\hat{\kappa}$, $\hat{\beta}$を通して$\hat{R}$, $\hat{Q}$, $\hat{p}$に含まれており，particlesの分布は$\hat{s}$を通して入ってきている。

また

$$\left.\begin{aligned} \hat{R} &= R^g \cdot \frac{1 + \gamma\bar{\Phi}}{1 + \frac{L}{1+L}\frac{(D_m - \kappa^g)}{\kappa^g}} \cdot \frac{\overline{\rho c}}{(\rho C_p)^g} \cdot \frac{\rho_*}{\rho_*^g} \\ R^g &\equiv \frac{g\alpha^g a d^4}{\kappa^g \nu^g} \end{aligned}\right\} \qquad (39)$$

と表わすことができる。R^gは蒸発・凝縮がない（あるいはparticle suspensionがない）ときのRayleigh数である。

（38）を一般的に解く前に，次の2つの特別のばあいを注意しておく。

（I）$\hat{s} = \hat{p}\hat{Q}$のばあい：　このとき（38）は$\hat{p}$をPrandtl数，$(1 - \frac{\hat{s}}{1+r_*})\hat{R}$をRayleigh数としたclassicalな熱対流の式と同じになる。したがってconvectionの起る限界は

$$\left(1 - \frac{\hat{s}}{1+r_*}\right)\hat{R} = R_c \qquad (40)$$

で与えられる。ただしR_cはclassical theoryにおける臨界Rayleigh数である。これからわかるように，particle分布の影響は，$b>0$のとき安定性が増し，$b<0$のとき安定性が減少することが知られる。ここでいう安定性の増減とは，(39)で定義したR^gの大小をいうのと同じである。潜熱の影響は$(D_m - \kappa^g)$の正負によって逆になり，ここで考えているようなscaleの小さいばあいには必ずしも不安定に導かない。

（II）Particlesがsolidでvaporを伴わないばあい：

このときは $\hat{Q}=0$, $\hat{\beta}=0$; $\Phi=0$, $L=0$ etc. とすればよいが, (38)では$\hat{Q}=0$とするだけでよい。$\hat{P}$, $\hat{R}$はvaporがないときの対応する量である。

3-3. 境界条件

上下の境界上で次の条件を仮定する:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\text{温度一定} \longrightarrow \Theta = 0, \\
&w = 0 \longrightarrow \frac{d^2}{dz^2}\Theta = 0, \\
&\left\{
\begin{aligned}
&\text{自由境界}\left(\frac{d^2W}{dz^2}=0\right) \longrightarrow \frac{d^4}{dz^4}\Theta = 0, \\
&\text{または, 固体境界}\left(\frac{dW}{dz}=0\right) \rightarrow \frac{d^3\Theta}{dz^3} - (k^2+\sigma\hat{P})\frac{d\Theta}{dz} = 0.
\end{aligned}
\right.
\end{aligned}
\right\} \quad (41)
$$

§4. 自由境界に対する解

上下の面が自由境界のとき

$$\Theta = \sin n\pi z \qquad (n:\text{整数})$$

が厳密解となり, $N^2 = n^2\pi^2 + k^2$ とおくと, (38) は

$$
\begin{aligned}
f(\sigma) = {} & \hat{P}N^2\sigma^3 + (1+\hat{P})N^4\sigma^2 + \left(N^6 - k^2\hat{R}\left(1-\frac{\hat{S}}{1+r_*}\right)\right)\sigma \\
& - \frac{\hat{R}}{1+r_*}\left(\hat{Q} - \frac{\hat{S}}{\hat{P}}\right)k^2N^2 \\
= {} & 0
\end{aligned}
\qquad (42)
$$

となる。明らかなように, これはσの3次式であり, 定数$\hat{P}$, $\hat{Q}$, $\hat{R}$, $\hat{S}$, r_*をgivenとしたとき, kとnに対して固有値σが決められる。σは一般に複素数であり, $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$ とおく。

(1) $\hat{S} < \hat{P}\hat{Q}$ のばあい

このとき，$f(0) < 0$ であるから，少なくとも1根は正の実根である。また σ を実数としたとき，極大は $\sigma < 0$ にあるから，実根があと2つあるとしても負である。また2根が複素根としても，実部は負であることが示せる。いずれにしても，$\sigma_r > 0$（このとき $\sigma_i = 0$）なる根が1根あり，このばあいは不安定である。（定在波型の擾乱が不安定）

(2) $\hat{S} > \hat{P}\hat{Q}$ のばあい

$\hat{R} < \frac{N^6}{k^2} \Big/ \left(1 - \frac{S}{1+r_*}\right) \equiv R_u$ とすると，$f(\sigma)$ の係数はすべて正となり，少なくとも1つ負の実根があることがわかる。このばあい複素根があり，中立安定を調べるために $\sigma = i\sigma_i$（σ_i は実数）とおいてみる。このとき (42) の実部から

$$\sigma_i^2 = \frac{\hat{R}(\hat{S} - \hat{P}\hat{Q})\,k^2}{(1+r_*)\hat{P}(1+\hat{P})N^2} \tag{43}$$

となり，虚部の σ_i^2 にこれを代入すると

$$\hat{R}_0 = \frac{N^6}{k^2}\cdot\frac{1}{1 - \frac{\hat{P}}{1+\hat{P}}\frac{1}{(1+r_*)}(\hat{Q}+\hat{S})} \tag{44}$$

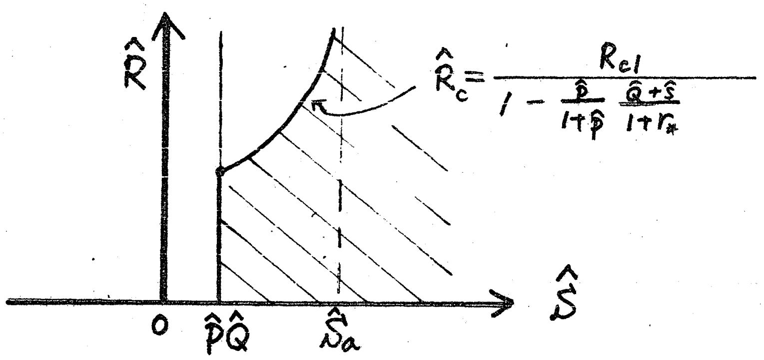
を得る。N^6/k^2 は classical theory での中立の Rayleigh 数を与え，その最小値 R_{cl} は 657.5 である。(44) の N^6/k^2 を R_{cl} でおきかえれば，このばあいの臨界 Rayleigh 数 $\hat{R}_c$ を得る。$\hat{R}_0 < R_u$ は容易に示せる。Classical のばあいと違って，不安定なのは進行波（$\sigma_i \neq 0$）の擾乱である。

(44) を $\hat{S}$ の関数としたときの漸近枝 $\hat{S}_a$ は $\frac{1+\hat{p}}{\hat{p}}(1+r_*)-\hat{Q}$ であり，

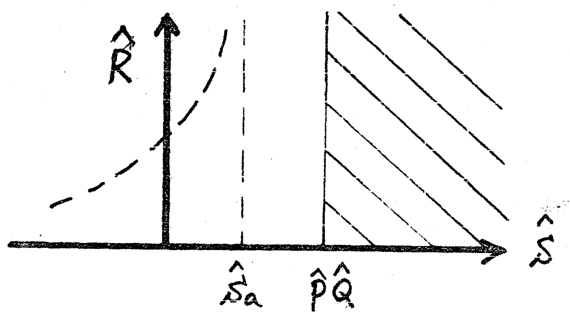
$$\hat{S}_a-\hat{p}\hat{Q}=\frac{1+\hat{p}}{\hat{p}}(1+r_*-\hat{p}\hat{Q})$$

であることに注意して，上の (1) (2) の結果を図示しよう。

(A) $\hat{p}\hat{Q}<1+r_*$



(B) $\hat{p}\hat{Q}>1+r_*$ 斜線部は安定領域



水蒸気，水滴，空気のばあい $\hat{p}\approx0.65$，$\hat{Q}\approx0.015$(常温)，であるから，(A)のばあいに属する。$\hat{p}$が安定化，$\hat{Q}$が不安定化の傾向をもつことが，図からも知られる。

固体境界に対しては，現在計算を続行中であるが，自由境

界のばあいと似た結果が得られている。

§5. 実験

空気－水蒸気－水滴の系に対する室内実験では，$\hat{R}_c$よりも小さい Rayleigh 数で convective motion が観測されている。空気－水蒸気系では，$D_m > \kappa_g$ であるので，$\hat{S} > \hat{P}\hat{Q}$ ならば，$\hat{R}_c$ 以下でも convection が起り得る。

空気－CH_3OH または C_2H_5OH の系の実験では，水蒸気のばあいのような現象は起らなかった。この系では，$D_m < \kappa_g$ であるので，$\hat{Q} < 0$ である。§4 の自由境界に対する解析によれば，$\hat{S} > 0$ のときには，$\hat{R} \geq \hat{R}_c$ でなければ convection は起らない。suspension particles は一般に沈降していくから，$\hat{S} > 0$ は自然に起ると考えてよいだろう。