数理解析研究所講究録
第171巻 1973年 166-179

非線形波動に於けるソリトンの役割

京大 工　矢島信男

§1. 序

無衝突プラズマ中での波動や，水面に生ずる重力波の特徴の一つは分散性にある。すなわち，たとえばイオン音波と呼ばれるプラズマ中の低周波数の波にあっては，その分散関係（振動数 ω と波数 k の関係）は

$$\omega = \pm k\sqrt{T_e/m_i}\Big/\sqrt{1+k^2\lambda_D^2}\,,$$

$$\approx \pm k\sqrt{T_e/m_i}\,(1-k^2\lambda_D^2/2)\,,\qquad (k\lambda_D \ll 1)$$

と書かれる。こゝで T_e は電子温度，m_i はイオン質量，λ_D はデバイの長さである。また，重力波では，

$$\omega = \pm\sqrt{k(g+\gamma k^2/\rho)\tanh(kh_0)}$$

$$\approx \pm k\sqrt{gh_0}\left\{1-\frac{1}{6}k^2h_0^2\left(1-\frac{3\gamma}{\rho g h_0}\right)\right\},\qquad (kh_0 \ll 1)$$

となる。こゝでh_0は水深，gは重力加速度，ρは密度，γは表面張力係数である。 これらの分散関係式は小さな波数のところでは，

$$\omega \approx \pm k c_0 (1 + \beta k^2 \ell^2) \qquad (1)$$

の形をしていて，ωはkに比例せず，位相速度v_{ph}と群速度v_gは一致しない。こゝでc_0は音速であり，ℓは分散の長さと呼ばれ，波の波長がこのオーダーとなるとv_gはv_{ph}から顕著にずれてくる。βは± 1の符号を与えている。

このような分散性をもった媒質を非線形波動が伝播する場合，solitary wave と呼ばれる特別なクラスの解が重要な役割をはたしているのではないかということが，最近になって判ってきている。こゝでは，以下 solitary wave が非線形波動現象で演ずる特別な役割を簡単にまとめ，さらに非線形分散波動の solitary wave による記述の可能性について述べる。

参考文献； 角谷典彦，日本物理学会会誌 72年1月号

Kadomtzev, B.B. and Karpman, V.I., Sov.Phys. Uspekhi, 40 ('71) 40.

§2 長波長ソリトン．

solitary wave は安定であることが知られているので，粒子になぞらえてソリトンと呼ばれている。こゝでもこの名稱に

したがうことにする。非線形波動の音速を $C(a)$ （ a は波の振幅）とし，非線形性が弱いとして $C(a) \approx C_0 + C_1 a$ と近似しよう。分散がなければ，波動を特徴づける特性曲線は

$$\frac{dx}{dt} \approx \pm (C_0 + C_1 a) \qquad (2)$$

と書ける。一方(1)のような分散関係を考える場合，分散のために C_0 が変化しているとして，(2)を

$$\frac{dx}{dt} \approx \pm (C_0 + C_1 a - \beta l^2 a'''/a') \qquad (3)$$

と拡張して書こう。こゝで $a''' = \frac{\partial^3 a}{\partial x^3} \sim -k^2 a'$ と考えている。(3)から判るように，非線形項（$C_1 a$）によって波の *steepening* がおこり，分散項（$-\beta l^2 a''/a$）によって波の *spreading* が生じる。波形が適当な形に与えられていると，これらの相反する効果，*steepening* と *spreading*，が丁度つりあって波形が変化せずに一定のスピードで伝播する可能性が生じる。これがソリトンである。この場合，(3)で $\frac{dx}{dt} = u$ （一定）として積分をすると，（(3)で + 符号の波に着目して）

$$\left.\begin{aligned} a &= A \,\mathrm{sech}^2 \{(x - ut)/\Delta\} \\ u &= C_0 + \frac{C_1}{3} A \\ \Delta &= \sqrt{-\frac{12 \beta l^2}{C_1 A}} \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

なる。これがソリトンの波形を与えている。一方，特性曲線が与えられているとき，simple wave の方程式は $a_t + \frac{dx}{dt} a_x = 0$ を満すことから，(3)から，

$$\frac{\partial a}{\partial t} \pm c_0 \frac{\partial a}{\partial x} \pm c_1 a \frac{\partial a}{\partial x} \mp \beta \ell^2 \frac{\partial^3 a}{\partial x^3} = 0 \qquad (5)$$

を得る。(5)は Korteweg - de Vries 方程式（KdV Eq.）と呼ばれている。逆に言えば，KdV Eq. として知られているものは，分散がある場合の simple wave のふるまいを記述すると言ってよいであろう。じっさいに(5)の定常解は(4)に一致している。

(4)から判るように，$\beta / c_1 A < 0$ のときにのみソリトンが存在し得るのであって，$c_1 > 0$ ならば negative dispersion（$\beta < 0$）ならば positive A のソリトンが，positive dispersion（$\beta > 0$）ならば negative A のソリトンが存在し得る。

一般に，初期にある disturbance（その振幅 A_0，幅 Δ_0）を与えたとき，どのように波動はふるまうであろうか．(4)から判るように，もし

$$A_0 \Delta_0^2 < 12 |\beta| \ell^2 / c_1$$

であれば，非線形性よりも分散性がよく利くので波はどんどんひろがっていって，その幅 Δ が丁度

$$A \Delta^2 \sim 12 |\beta| \ell^2 / c_1$$

になるあたりまでその拡散がつづく。そして一端，上の条件がみたされると，そこでは非線形性と分散性がバランスを保って一つのソリトンができあがることとなる。この場合ソリトンになりきらなかった部分は small oscillation として分散によって拡散していく。もし，逆に

$$A_0 \Delta_0^2 > 12|\beta| l^2/c_1$$

がみたされると，非線形効果がより強く利いて steepening がおこる。その結果，波形の曲率はふえその部分では分散がよく利くため，分散波動に特徴的な傾向が波形に生じて，つぎつぎにソリトンがつくられていく。このような波動発展の様子は，はじめに Zabusky－Kruskal（1965）が，ついで Berezin－Karpman（1966）が（3）のより簡単な形の方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \delta^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \qquad (6)$$

なる方程式に対して，数値的に示した。この数値解によると，与えられた初期値は，そのパラメーターによって定まる個数のソリトンに崩れ，その際発生したソリトンは非常に安定な実体としてふるまうことが判っている。これは言ってみれば，分散性非線形波動の中にはソリトンがひそんでいて，波のエネルギーはこのソリトンによって運搬されるということにな

るであろう。つまり，ソリトンは連続体の中に含まれる離散的性格と言える。

(6)を $|x| \to \infty$ で $\dot{u} \to 0$ となっている場合に初期値問題として解く処法は，Gardner - Green - Kruskal - Miura (1967) によって見出され，Lax (1968) によって一般化された。こゝでは詳しくは述べないが，(6)の解 $u(x,t)$ を用いて

$$\left[6\delta^2 \frac{d^2}{dx^2} + \{\lambda + u(x,t)\} \right] \psi = 0 \qquad (7)$$

なる固有値問題を考えると，彼等によれば，λは時間的に不変であって，且つψは時間的には

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -4\delta^3 \frac{\partial^3}{\partial x^3}\psi - \frac{\delta}{2}\left(u\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}u\right)\psi \qquad (8)$$

に従って発展する。(6)をとくかわりに，$u(x,t)$ は (7)の *inverse scattering problem* としてとくことができる。(7) の離散的固有値λに対応して，

$$\left.\begin{aligned} u(x,t) &= A\,\mathrm{sech}^2((x-ct)/\Delta), \\ \Delta &= \delta\sqrt{12/A}, \quad c = A/3 \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

なるソリトンが存在していて，Aとλは

$$A = -2\lambda$$

で結びついている。したがって，ある初期値に対して，(7)の

1 :

離散的固有値（$\lambda_1, \cdots, \lambda_N$）が求まり，その$\lambda_i$に対応した$A_i = -2\lambda_i$　（$i=1,2,\cdots,N$）なるN個のソリトンにその初期値がこわれていくことになる。ソリトンの個性の保存はλ_iが時間によらないことから示される。初期値$u(x,t=0)$の振幅と幅をそれぞれA_0, Δ_0とすると固有値の数は$A_0\Delta_0^2$が大きくなればふえてくる。したがって，波動の全エネルギーのうちで，soliton にいくエネルギーの割合は$A_0\Delta_0^2$が大きくなると殆ど1に等しくなる。このことは，波動は漸近的にソリトンの和として記述される可能性がでてくることを意味している。

じっさいに，非線形分散性波動をソリトンによって記述する試みは，Zakharov (1971) や Zaslavsky－Filonenko (1970) によってなされた。彼等はソリトンの集団に対する *kinetic equation* を導いて，非線形分散系での波動の統計的なふるまいを論じた。二つのソリトンは衝突によって，その個性を保存し，たゞ位相を変えるにすぎない。振幅AのソリトンとA_1のソリトンの衝突に於て，前者がうける位相の変化を$\delta(A;A_1)$とすると，単位時間当りのAの位相変化すなわち速度の変化は

$$\Delta\tilde{S} = \int_0^\infty \delta(A;A_1)\,(A/3 - A_1/3)\,f(x,A_1)\,dA_1 \qquad (10)$$

と書けるであろう。こゝで$f(x,A)$はx点での振幅Aのソリトンの分布函数であり，$(A-A_1)/3$なる因子は二つのソリトン

の相対速度を与えている。したがって，x 点での A ソリトンの速度は

$$\tilde{S}(A) = A/3 + \Delta\tilde{S} \tag{11}$$

となる。これらを用いて，Zakharov 達はソリトンに対する kinetic equation として

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\tilde{S}(A)\, f(x, A)\right) = 0 \tag{12}$$

を得ている。

§ 3　Wave Modulation

振幅変調をした平面波を考えよう。その振幅が充分小さいと，非線形性による振動数のずれも小さく，分散関係式は

$$\omega = \omega_0(k) + \alpha a^2 \tag{13}$$

と書ける。こゝで $\omega_0(k)$ は線形分散関係を与え，αa^2 はその非線形補正である。$\alpha > 0$ ならば，振幅の大きいところでの伝播速度（＝位相速度）は大きく，従って振幅が極大になるところでの前面では波数 k は圧縮により増加し後面では減少する。群速度 $v_g = \frac{d\omega_0}{dk}$ が $\frac{dv_g}{dk} < 0$ を満せば，振幅極大のところの前面では v_g はへり後面では v_g が増すので，結局振幅が極大のところに波動エネルギーが集中して極大はますます大きく

なり，平面波は不安定となる。逆に v_g が $\frac{dv_g}{dk} > 0$ をみたせば極大はならされて安定となる。すなわち，$\alpha \cdot \frac{dv_g}{dk} \gtrless 0$ によって平面波は変調に対して安定もしくは不安定となる。これは Lighthill (1965) によって見出された不安定性である。

この問題は，Karpman − Krushkal' (1968) Taniuti − Yajima (1969) によって，次の型の方程式によって記述されることが示されている。すなわち，

$$\left.\begin{aligned} i\frac{\partial a}{\partial t} &= -\frac{1}{2}\frac{dv_g}{dk}\cdot\frac{\partial^2 a}{\partial x'^2} + \alpha |a|^2 a \\ x' &= x - v_g t \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

これは，非線形自己相互作用をもった Schrödinger 方程式であって，$\alpha \cdot \frac{dv_g}{dk} > 0$ の場合には非線形項は斥力としてきき，$\alpha \frac{dv_g}{dk} < 0$ の場合には引力として作用する。この引力と分散項（(14)の右辺才1項）による波束の拡散とがバランスすると，solitary wave（envelope soliton と呼ばれる）が存在し得る。それに相当する解は，

$$a = e^{icx + i\left(\frac{\omega_0''}{2}c^2 - \frac{\alpha A^2}{2}\right)t} A\,\mathrm{sech}\left(A\sqrt{\frac{-\alpha}{\omega_0''}}(x'-ct)\right) \quad (15)$$

となる。(15) の solitary wave solution が衝突に対して安定であることは，数値計算によって示されている。（Yajima − Ôuti (1970)）

(14)の解の発展に於て，その長時間挙動を考える限り，(15)の

soliton 解が重要な役割を果すということが，Zakharov－Shabat (1971) によって示されている。彼等は，KdV方程式の場合のLax の処法を用いることによって (14) を解析的に扱う処法を示した。それによれば，初期に与えた擾乱は時間発展とともに (15) で与えられる soliton に分解し，この soliton はきわめて安定であることが判る。

このようにして，分散系に於ける非線形波動の伝播においては，波動エネルギーがソリトンという形で局所化されて運搬され，必ずしも全空間に拡散してしまわないという特徴をもっているように見える。

§4．一般化．

§§2,3 で述べた話は，一次元的，且一方向に伝播する波動に関するものであった。しかし，一般の系では，たとえそれが一次元波動であったとしても左右に伝播する波が存在し得るので，これまでの議論は用いられない。すなわち，異るモードに属する simple wave 間の相互作用は，これまでの議論では考えられていないからである。

しかし乍ら，異るモードに属する波の位相速度は異っているので，これらの波の間の非線形相互作用の時間は分散効果や非線形性によって変形する時間にくらべてきわめて短いこ

1

とが予想されるので，一種の摂動として考えることが可能となるであろう。以下，Oikawa - Yajima (1972) による考察を述べる。簡単のために，次の方程式を考えよう。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u^2 - \epsilon\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \qquad (16)$$

この方程式は，浅水波を記述するものとして Boussinesq (1872) により，また一次元非線形格子の連続体近似として Toda (1967) により導かれた。

いま，互いに逆向きに伝播する二つの solitary wave を考える。(16) で (x, t) の変数のかわりに (ξ, η) なる新変数を次のとおり導入する。

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x - (1+\epsilon\lambda)t - \epsilon\varphi(x,t) \\ \eta &= x + (1+\epsilon\mu)t - \epsilon\psi(x,t) \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

(17) で $(1+\epsilon\lambda)$，$-(1+\epsilon\mu)$ はそれぞれ右，左に伝播する波の位相速度であり　$\epsilon\varphi$，$\epsilon\psi$ は両者の相互作用によって速度が変化する効果をあらわしている。solitary wave は前に述べたように，分散項と非線形項のバランスによってその波形を保っているので，(16) に於て分散項が微小パラメーター ε を含んでいることから u は ε のオーダーのものでないといけないことが判る。そこで u を

$$u = \varepsilon u^{(0)} + \varepsilon^2 u^{(1)} + \cdots\cdots \qquad (18)$$

と展開しておこう。(17), (18) を (16) に代入して ε の一次の項を考えると、

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} u^{(0)} = 0 \tag{19}$$

を得る。これから

$$u^{(0)} = f(\xi) + g(\eta) \tag{20}$$

を得る。これは、第一近似で解は右に進む波と左向きの波の重ね合せであることを意味する。(17), (18), (20) を (16) に入れると、ε^2 のオーダーでは

$$\begin{aligned}
-4\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} u^{(1)} = &\left\{-2\lambda f'' + \left(\frac{f^2}{2}\right)'' + f^{(\mathrm{IV})}\right\} \\
&+ \left\{-2\mu g'' + \left(\frac{g^2}{2}\right)'' + g^{(\mathrm{IV})}\right\} \\
&+ 4\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}\Big[\frac{1}{2}fg + \left(\frac{1}{4}\int^{\eta} g(\eta')d\eta' - \varphi\right)f' \\
&\qquad + \left(\frac{1}{4}\int^{\xi} f(\xi')d\xi' - \psi\right)g'\Big]
\end{aligned} \tag{21}$$

なる方程式を得る。$u^{(1)}$ が non secular であることを要求すると、

$$\left.\begin{aligned}
f^{(\mathrm{IV})} + \left(\frac{f^2}{2}\right)'' - 2\lambda f'' = 0 \\
g^{(\mathrm{IV})} + \left(\frac{g^2}{2}\right)'' - 2\mu g'' = 0
\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

を得る。$|\xi| \to \infty$ で $f \to 0$、$|\eta| \to \infty$ で $g \to 0$ を要求すれば、(22) から *solitary wave solution* は、$A = 6\lambda$, $B = 6\mu$ として、

$$\left.\begin{aligned}
f &= A\,\mathrm{sech}^2\sqrt{A/12}\,\xi \\
g &= B\,\mathrm{sech}^2\sqrt{B/12}\,\eta
\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

となる。更に，

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{4}\int^{\eta} g(\eta')\,d\eta' \\ \psi &= \frac{1}{4}\int^{\xi} f(\xi')\,d\xi' \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

とすれば，

$$u^{(1)} = -\frac{1}{2} f g + k(\xi) + l(\eta) , \qquad (25)$$

を得る。$k(\xi)$，$l(\eta)$ は次のオーダーで nonsecular という条件から求められる。（じっさいに求めれば $k \propto f'$，$l \propto g'$ が得られるので，initial phase をうまくえらぶことによつて，$k = l = 0$ とすることができる。）

(23)〜(25) で判ることは，(16) の解は二つの solitary wave の重ね合わせとして才一近似で書かれ，その solitary wave の速度は相互作用のために一定でなくなるということである。そして重ね合せからの解のずれは，二つの solitary wave が接近したところでのみ 0 でなくなるが，その大きさのオーダーは ε^2 の程度のものである。(23) を (24) に代入すると，

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{\sqrt{3B}}{2}\tanh\sqrt{\frac{B}{12}}\,\eta \\ \psi &= \frac{\sqrt{3A}}{2}\tanh\sqrt{\frac{A}{12}}\,\xi \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

となる。したがって，振幅 A の solitary wave の $t=-\infty$，から $+\infty$ までの間の phase shift δ_A は

$$\delta_A = \epsilon\{\varphi(\eta=\infty) - \varphi(\eta=-\infty)\} = \varepsilon\sqrt{3B} , \qquad (27)$$

全様にして δ_B は

$$\delta_B = \varepsilon\{\psi(\xi=-\infty) - \psi(\xi=\infty)\} = -\varepsilon\sqrt{3A} \tag{28}$$

となる。

(16)は，反対向きに走る二つのソリトンの衝突に関しては正確な解が解析的に求められている。これと(23)～(28)をくらべると我々の近似は非常によく成立していることが判る。

§5　まとめ

今までの議論で，分散系に於ける非線形波動伝播，とくにその長時間挙動ではソリトンと呼ばれる特別な解が重要な役割を果すことが判った。したがって，このような波動をソリトンの集合として記述することが可能であるかという問題が当然生じる。いまのところ，これに対する答は得られていない。§2の終りのところで与えたZakharovやZaslavsky-Filonenkoなどの議論は一つの手がかりになるかもしれないが，それはまだ一方向に伝わる波しか記述できていない。これを拡張するには，§4でやったような議論を行っておく必要があるであろう。

(1972/3/17)