

非線型磁気流体波の  
エルゴード性

阪大 基礎工 井上良紀

§ 1. まえがき

プラズマは粒子間の衝突が無視でき、かつ冷たい(熱運動をもたない)ものとする。境界のないそのようなプラズマ中を外部磁場に対してある角度をもって伝播する非線型の1次元定常波を考える。特に、外部磁場に対して垂直に伝わる波は、取扱いが最も簡単な場合であり、厳密に解かれている。<sup>1,2)</sup> よく知られているように、このような波は、孤立波(*solitary wave*)、波列(*wave train*)とよばれ周期性をもっている。<sup>3)</sup>

他方、Saffman<sup>4)</sup>は、磁場に対して斜めに伝わる場合を考え、この力学系に対しては準エルゴード性が成り立つという仮定のもとに、上記の波とは異なった周期性をもたない波が存在しうることを示した。そのような波は準衝撃波(*quasi-shock*)とよばれている。しかしながら、準エルゴード性の

仮定が妥当であるかは問題であり、その証明はなされていなかった。

この論文の目的は、磁場に平行に伝わる波に対するエルゴード性の厳密な証明、および磁場に斜めに伝わる波の準エルゴード的なふるまいを数値計算によって示すことにより非線型磁気流体波の性質を明確にすることである。

以下の節で述べることも含めて、現在までにわかっていることをまとめると、波は下の表のように分類されるであろう。

	一様な状態を初期値とする場合(A)	一様な状態を初期値とする場合(B)
磁場に垂直に伝わる波	<i>solitary wave</i> <sup>1,2)</sup>	<i>wave train</i> <sup>2)</sup>
磁場に平行に伝わる波	<i>solitary wave</i> <sup>8)</sup>	磁場の強さ $B$ は周期的 <sup>5,6,7)</sup> 磁場のベクトル $B$ はエルゴード的(周期的)
磁場に斜めに伝わる波	<i>quasi-shock</i> (?) <sup>4)</sup> ( <i>solitary wave</i> +) <sup>9)</sup>	<i>quasi-wave train</i> <sup>+</sup> <sup>10)</sup> ( <i>wave-train</i> +) <sup>10)</sup>

(注意)

+ は数値計算によることを示す。( ) は特別の場合として存在することを示す。また、(A) は(B)の特別の場合と考えることもできる。肩数字は文献番号を示す。

## § 2. 平行伝播波

外部磁場に対して平行に伝わる波を考える。表に示したように、波と共に進む座標系から見ると無限上流が一様流である（観測系から見ると一様静止状態である）場合には、解は孤立波となる。一様でない場合は、磁場の強さ  $B$ （あるいは波の進む方向の流速  $u$ ）は有限の周期をもつ。しかしながら、このことは磁場ベクトル  $B$  が周期的であることを意味しない。以下で見るように、解の位相面  $(B_y, B_z)$  における軌跡は、ある環状領域を稠密にうめつくし、かつその空間平均と時間平均とは等しい（エルゴード性）ことがわかる。特別な場合には、周期解も存在する。

### 2-1 基礎方程式

連続の式、イオンと電子に対する運動方程式、Maxwell 方程式から他の物理量を消去することによって、磁場の成分  $B_y$ 、 $B_z$  に関する次の微分方程式系を得る。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{B}_y - 2a \dot{B}_z + \partial V / \partial B_y &= 0, \\ \ddot{B}_z + 2a \dot{B}_y + \partial V / \partial B_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ただし、 $a = (\epsilon - \frac{1}{\epsilon}) \frac{\alpha}{2A}$ ,

$$V = \frac{1}{8A^2} \{ B_y^2 + B_z^2 - (1 - \alpha^2) \}^2 - \frac{1}{2} (1 - \frac{\alpha^2}{A^2}) \{ B_y^2 + B_z^2 - (1 - \alpha^2) \}.$$

ここで、磁場の波の進行方向に対して垂直な成分  $B_y, B_z$  は  $B_0$  (初期値を与える点での磁場の強さ) で無次元化されている。また、 $\alpha = B_{x0}/B_0$ ,  $\epsilon^2 = m_e/m_i$  (イオンと電子の質量比),  $A = u_0/V_A$ ;  $V_A = B_0/\sqrt{\mu(m_i+m_e)n_0}$  (Alfvén Mach 数と Alfvén 速度) である。ドット(・)は、 $t = \int dx/u$  で定義された時間についての微分をあらわす。ただし、距離  $x$  はイオンと電子の Larmor 半径の幾何平均 ( $(m_i m_e)^{1/2} V_A / e B_0$ ) で無次元化されている。ただちにわかるように、(1) 式は質点の平面運動をあらわす式と同じである (磁場を空間座標と考えればよい)。すなわち、第1項は慣性項、第2項は Coriolis の力、第3項は保存力をあらわす。

以下の議論で都合のよいように、極座標表示  $B_y = r \cos \theta$ ,  $B_z = r \sin \theta$  を導入しよう。極座標表示の Hamiltonian (エネルギー積分) は、

$$H = \frac{1}{2} \left( P_r^2 + \frac{P_\theta^2}{r^2} \right) + a P_\theta + \frac{1}{2} a^2 r^2 + V \quad (2)$$

で与えられる。ただし、 $P_r, P_\theta$  はそれぞれ  $r$  と  $\theta$  に共役な運動量であり、 $\dot{r}$  と  $r^2 \dot{\theta} - a r^2$  に等しい。したがって、(1) 式を正準形で書くと、

$$\dot{r} = \partial H / \partial P_r = P_r, \quad (3)$$

$$\dot{\theta} = \partial H / \partial P_\theta = P_\theta / r^2 + a, \quad (4)$$

$$\dot{P}_r = -\partial H / \partial r = P_\theta^2 / r^3 - a^2 r - aV / ar, \quad (5)$$

$$\dot{p}_\theta = -\partial H / \partial \theta = 0 \quad (6)$$

のようになる。(6)式から、 $p_\theta = \text{一定} \equiv c$  (角運動量積分) である。したがって、この力学系は、エネルギー積分と角運動量積分をもつ二自由度の力学系であり、解析力学で用いられている手法にならって、簡単にその性質を調べることもできる。

## 2-2 エルゴード性の判別式

相空間  $(r, p_r, \theta)$  で考える。解の軌跡は、この空間内の円筒 (トーラスと考えるとよい) 上にある曲線を描く (図1参照)。ただし、点  $(r, p_r, \theta)$  と点  $(r, p_r, \theta + 2n\pi)$  は物理的に等しい点であるから、たとえば、 $0 \leq \theta < 2\pi$  の領域にすべての領域を重ね合せて考えねばならない。この曲面上を、解の軌跡が一樣にうめつくし、空間平均と時間平均が等しいとき、この力学系はエルゴード性をもつという。これを調べるために、トーラス上の微分方程式をつくろう。ただし、トーラス上には特異点はないものとする。<sup>11)</sup>

$s/l = x$  (図1の曲線のある基準点から測った弧の長さを  $s$ , 一周した全長を  $l$  とする。),  $\theta/2\pi = y$  とおくと、上の方程式系 (3~6式) は、

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 1 \equiv X(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{l}{2\pi} \left( \frac{c}{r^2} + a \right) / \sqrt{P_r^2 + \left\{ \frac{c^2}{r^3} - a^2 r^2 - \frac{dV}{dr} \right\}^2} \\ &\equiv Y(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

となる。ただし、 $\int_0^t dt \left( l / \sqrt{P_r^2 + \left\{ \frac{c^2}{r^3} - a^2 r^2 - \frac{dV}{dr} \right\}^2} \right)^{-1} = \tau$  とい  
いた。このとき、 $\partial X / \partial x + \partial Y / \partial y = 0$  が成り立つ（保測性  
をもつといわれる。）。保測性をもつ系に対しては、簡単な  
エルゴード性の判定式が知られている。すなわち、

$$Y(x, y) = \sum b_{mn} e^{2\pi i(m x + n y)} \quad (8)$$

のように Fourier 級数に展開する。その最初の係数は、

$$\begin{aligned} b_{00} &= \int_0^1 \int_0^1 Y \, dx \, dy \\ &= (1/\pi) \int_{r_1}^{r_2} (c/r^2 + a) / \sqrt{E - a^2 r^2 - c^2/r^2 - 2V} \\ &= \frac{A}{\pi} g [aK + c\pi(\beta^2, k)/e_1] \end{aligned} \quad (9)$$

である。ただし、 $E = 2(H - ac)$ 、 $g = 2/\sqrt{e_1 - e_2}$ 、 $k^2 = (e_1 - e_2) / (e_1 - e_3)$ 、 $\beta^2 = (e_1 - e_2) / e_1$  ( $e_1 > e_2 > e_3$ : 根号内の  $r^2$  に関  
しての多項式の根)、 $K$  および  $\pi(\beta^2, k)$  はそれぞれ第 1 種お  
よび第 3 種の完全楕円積分である。

一般定理<sup>12)</sup> により、

$b_{00}$  が有理数のとき、解は周期性をもち、

$b_{00}$  が無理数のとき、解はエルゴード性をもち、

無理数の濃度は、有理数の濃度よりも大きいから、解は一般  
にエルゴード性をもつといつてよい。変換の 1 対 1 対応性に

より、このような性質は  $(B_y, B_z)$  面でも成り立つ (図 2, 図 3 参照)。

### § 3. 斜め伝播波

外部磁場に対して斜めに伝わる波に対しては、特別な場合を除いて厳密解はない。一般的な場合について数値計算をおこなった結果を述べておく (詳しくは、Ref. 10 を参照して下さい。)。以下に、磁場に垂直に伝わる波、あるいは平行に伝わる波と比較しながらその特徴を書いておこう。

(i) 一般に、波は完全に周期性をもたないように思われる。すなわち、磁場に平行に伝わる波においては、磁場の強さ  $B$  は周期性をもったが、斜めに伝わる場合にはもはや  $B$  も周期的でない。また、位相面  $(B_y, B_z)$  を解の軌跡が一樣にうめつくす傾向にある (図 4 参照)。

(ii) 特別な場合 (パラメタの組がある特定の値をとるとき) には、波は孤立波あるいは波列になる (孤立波の数値解が Kellogg によって得られている。 )。

(iii) 波形はゆっくりと変動する部分とはげしく振動する部分とにわけて考えることができる (おおざっぱにいうと、はげしく振動する部分の平均波形がゆっくりと変動する部分の波形を与える。)。前者の空間的なスケールは電子の Larmor

半径であり、後者の空間的なスケールはイオンの *Larmor* 半径である。磁場に垂直あるいは平行に伝わる波では、空間的なスケールとしては、イオンと電子の *Larmor* 半径の幾何平均のみがあらわれた。はげしく振動する部分は、電子慣性項の特異性によるものである。

(iv) イオンと電子の質量比  $\epsilon^2 (= m_e/m_i)$  が小さくなるにしたがって、波は局所的にみて周期的となる。また、 $\epsilon^2$  が 0 に近づくと波形の振動は、はげしくなるが、 $u_e$ ,  $w_e$  (電子流体の  $y$ ,  $z$  方向の流速) を除いて他の物理量の波形のゆっくり変動する部分ごらのゆらぎの振巾は 0 に近づき、 $\epsilon = 0$  とおいてもとめた周期解に収束する傾向にある。ただし、 $u_e$ ,  $w_e$  に関しては、ゆっくり変動する部分ごらのゆらぎの振巾は 0 にならない。したがって、完全には  $\epsilon = 0$  の解には収束しない。磁場に垂直あるいは平行に伝わる波では、 $\epsilon = 0$  の場合、解は存在しなかった。

最後に、Abe と Niu<sup>13)</sup> によって、マルチビームプラズマ中の *quasi-shock* の数値計算がおこなわれていることを付け加えておく。



- 1) Adlam, J. H. & Allen, J. E. 1958 *Phil. Mag.* 3, 448.
- 2) Davis, L., Lüst, R. & Schlüter, A. 1958 *Z. Naturforsch.* 13a, 916.
- 3) 位相面 ( $B_y, B_z, \dot{B}_y, \dot{B}_z$ ) で, 解の軌跡が閉曲線となるとき, 周期解と定義する.
- 4) Saffman, P. G. 1961 *J. Fluid Mech.* 11, 552.
- 5) Montgomery, D. 1959 *Phys. Fluids* 2, 585.
- 6) Kakutani, T. 1966 *J. Phys. Soc. Japan* 21, 385.
- 7) Kakutani, T. 1968 *J. Phys. Soc. Japan* 24, 660.
- 8) Saffman, P. G. 1961 *J. Fluid Mech.* 11, 16.
- 9) Kellogg, P. J. 1964 *Phys. Fluids* 7, 1555.
- 10) Inoue, Y. 1971 *J. Plasma Phys.* 6, 513.
- 11) 特異点から出発する解は, 孤立波をあらわす解になる.
- 12) Saito, T. 1951 *Math. Soc. Japan* 3, 279.
- 13) Abe, K. & Niu, K. 1972 *J. Phys. Soc. Japan* 32, 1121.

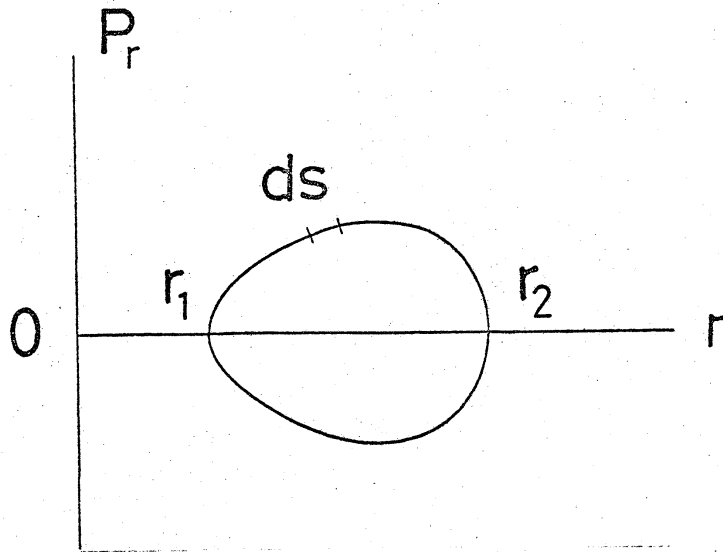


Fig. 1. The phase diagram of  $(r, P_r)$ .

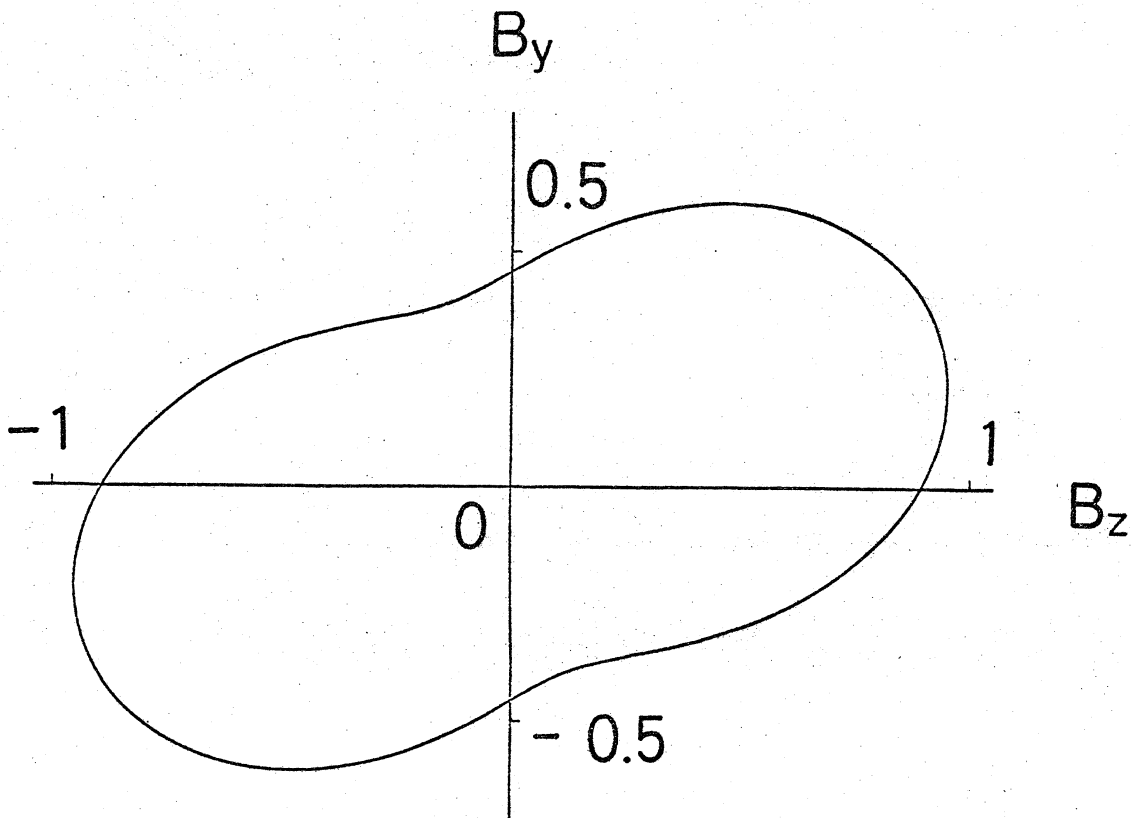


Fig. 2. The trajectory for a wave with periodicity in the  $(B_y, B_z)$  plane.  $A^2 = \alpha^2 = 0.2$ ,  $\epsilon = 0.5$ ,  $c = 0$ ,  $P_0 = 0.374 \dots$ ,  $\underline{b_{00}} = 0.5$ .

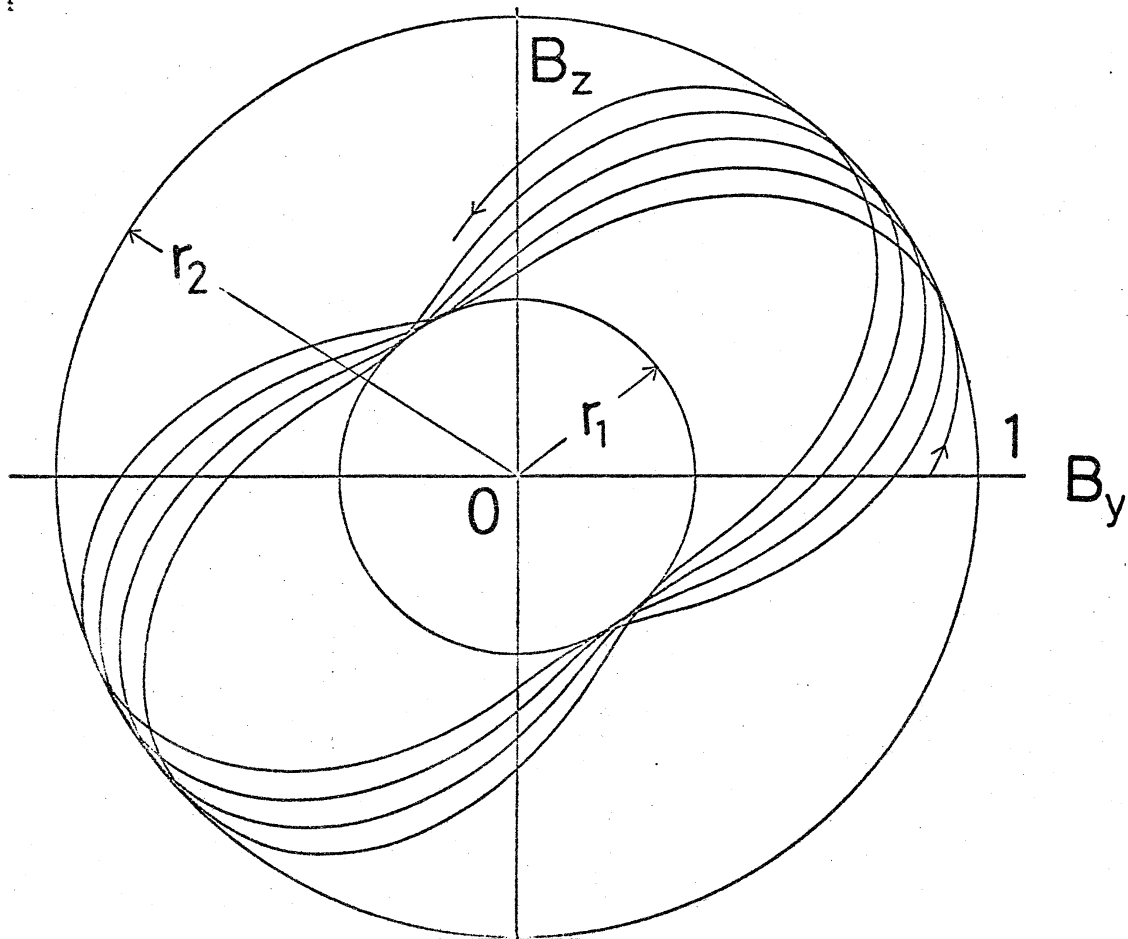


Fig. 3. The trajectory for an ergodic wave in the  $(B_y, B_z)$  plane.

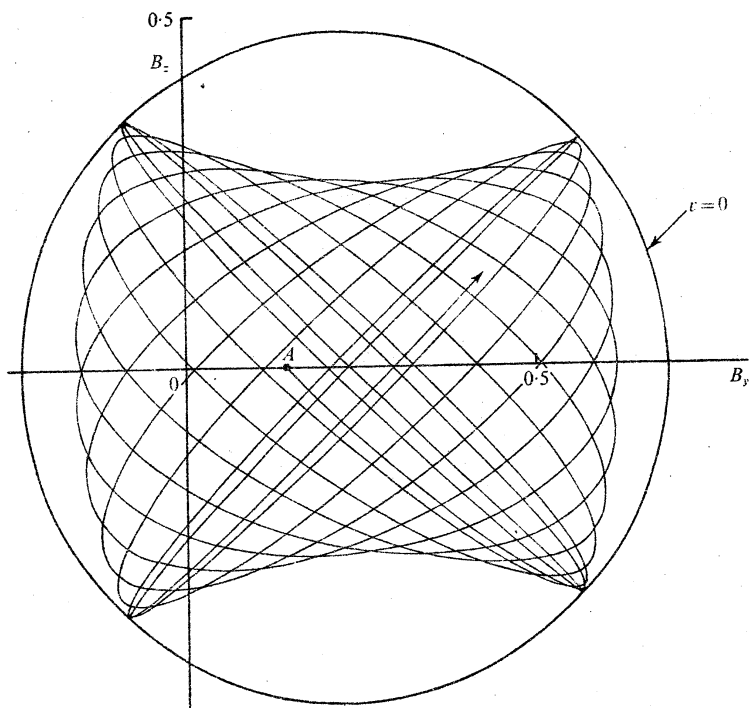


Fig. 4.