数理解析研究所講究録
第172巻 1973年 38-56

38

FFTアルゴリズムについて

東大 理　高橋秀俊

1. 序

Fourier 変換は，物理学や工学で，振動や波の波形のいわゆる時間（空間）領域表示と周波数（波数）領域表示との間の変換ということで，根本的な役割を演じる．理論的な面では，線形系に関するいろいろの問題が，この二つの領域の間を自由に移り動くことによって解かれるが，Cooley-Tukey のいわゆる Fast Fourier Transform (FFT) の出現によって，数値的にもこの二つの領域の間の移り変りが極めて手軽にできるようになり，理論的な計算，実験データの処理等に革命的な変革がおこっている．

FFT についての解説はたくさんあるが必らずしも明晰とはいえないものが多い．実は筆者も Cooley, Tukey とは全く独立に FFT に到達し，HITAC 5020 のプログラムをつくったりしたので，筆者の考え方を中心にして FFT の方法

の原理，問題点などについてのべてみたい．

2. 多次元 Fourier 変換（直積分解）

Fourier 変換には有限区間のもの，無限区間のもの，ランダム信号に対するもの等，いろいろあるが，実際に計算機にかける場合は原則として離散 Fourier 変換（discrete Fourier transform），即ち

$$X_n = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x_m e^{-2\pi i \frac{mn}{N}} \qquad n=0,1,\cdots,N-1 \tag{1}$$

の形のものである．$x(t)$ が T を周期とするもの周期関数であるとき，その第 n Fourier 係数は

$$X_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t) e^{-2\pi i \frac{nt}{T}} dt \tag{2}$$

で与えられるが，(1) は $x(t)$ に対して T/N の間隔でサンプル点をとって (2) を数値積分した式に相当する．このような場合，数値積分には Simpson 則その他どんな式よりも，単純な台形則による (1) 式が良いのである．以後は Fourier 変換といえば (1) で定義されたものとする．また，(1) を x_m について解いた式

$$x_n = \sum_{m=0}^{N-1} X_m e^{2\pi i \frac{mn}{N}} \qquad n=0,1,\cdots,N-1 \tag{3}$$

を逆Fourier変換と呼ぶことにする．もちろんこれも本質的にはFourier変換に過ぎない．なお，x_n, X_n は一般に複素数であるとする

FFTは要するに(1)の計算を適当に段階に分けて行なうことである．そのようにして計算が速くなる例として，まず多次元Fourier変換についてのべよう．一般にn次元でもよいのであるがここでは2次元の場合をのべる．2次元Fourier変換とは

$$(4)\qquad X_{n_1,n_2}=\frac{1}{N_1N_2}\sum_{m_1=0}^{N_1-1}\sum_{m_2=0}^{N_2-1} e^{-2\pi i\left(\frac{n_1m_1}{N_1}+\frac{n_2m_2}{N_2}\right)}x_{m_1,m_2}$$

のような変換である．ところでこの変換の行列は $N_1\times N_1$ 行列と $N_2\times N_2$ 行列の直積になっていることがわかる．言いかえれば，これを2段階に分けて，N_1 組の N_2 元変換

$$(5)\qquad \xi_{m_1,n_2}=\frac{1}{N_2}\sum_{m_2=0}^{N_2-1} e^{-2\pi i\frac{n_2m_2}{N_2}}x_{m_1,m_2}$$

に対して更に N_2 組の N_1 元変換

$$(6)\qquad X_{n_1,n_2}=\frac{1}{N_1}\sum_{m_1=0}^{N_1-1} e^{-2\pi i\frac{n_1m_1}{N_1}}\xi_{m_1,n_2}$$

を行なえばよい。(4)を直接計算すると $(N_1N_2)^2$ の乗算が必要になるが，このように2段に分けると，(5)に $N_1N_2^2$，(6)に $N_2N_1^2$ で合計 $N_1N_2(N_1+N_2)$ 回の乗算ですむ．つまり

(4)の中に出てくる共通のsubexpressionをときに計算してしまうので得をするのである。2次元または3次元のFourier変換はX線結晶解析で普通に使われ，このような直積分解はよく知られている

ところで，普通の1次元のFourier変換でも，Nが互に素な二つの因数に $N=N_1N_2$ のように分解できるときは，直積分解が可能である。いま，与えられた m に対し

$$m \equiv N_2 m_1 + N_1 m_2 \pmod{N} \tag{7}$$

となるような m_1, m_2 が（それぞれ $\bmod N_1$, $\bmod N_2$ で）uniqueにきまるから，それによって x_m を x_{m_1,m_2} と書くと，(1)は

$$X_n = \frac{1}{N}\sum_{m_1=0}^{N_1-1}\sum_{m_2=0}^{N_2-1} e^{-2\pi i\left(\frac{m_1 n}{N_1}+\frac{m_2 n}{N_2}\right)} x_{m_1,m_2} \tag{8}$$

となる。ここで更に

$$\begin{aligned} n &= n_1 \pmod{N_1} \quad (0 \leqq n_1 < N_1) \\ n &= n_2 \pmod{N_2} \quad (0 \leqq n_2 < N_2) \end{aligned} \tag{9}$$

とすると(8)は

$$X_{n_1,n_2} = \frac{1}{N_1N_2}\sum_{m_1=0}^{N_1-1}\sum_{m_2=0}^{N_2-1} e^{-2\pi i\left(\frac{m_1 n_1}{N_1}+\frac{m_2 n_2}{N_2}\right)} x_{m_1,m_2} \tag{10}$$

となり，2次元Fourier変換(4)と全く同じになる。したがって直積に分解される。

3. Fast Fourier Transform の原理

さて，$N=N_1N_2$ の N_1 と N_2 が互に素でない場合は(1)の直積分解はできないが，計算量を減らすという目的は，2段階に分けることによってやはり達することができる．

N_1 と N_2 が互に素でなくても

$$(11)\qquad \begin{aligned} m &= m_1 + N_1 m_2 \qquad (0 \leqq m_1 < N_1,\ 0 \leqq m_2 < N_2) \\ n &= N_2 n_1 + n_2 \qquad (0 \leqq n_1 < N_1,\ 0 \leqq n_2 < N_2) \end{aligned}$$

のように置くことは可能である．そこで前と同様にして

$$(12)\qquad X_n = \frac{1}{N}\sum_{m_1=0}^{N_1-1}\sum_{m_2=0}^{N_2-1} e^{-2\pi i \frac{(N_2n_1+n_2)(m_1+N_1m_2)}{N_1N_2}} x_{m_1+N_1m_2}$$

$$= \frac{1}{N_1}\sum_{m_1} e^{-2\pi i \frac{n_1m_1}{N_1}} e^{-2\pi i \frac{m_1n_2}{N_1N_2}} \left(\frac{1}{N_2}\sum_{m_2} e^{-2\pi i \frac{n_2m_2}{N_2}} x_{m_1+N_1m_2}\right)$$

ここで括弧の中

$$(13)\qquad \xi_{m_1,n_2} = \frac{1}{N_2}\sum_{m_2=0}^{N_2-1} e^{-2\pi i \frac{n_2m_2}{N_2}} x_{m_1+N_1m_2}$$

は前と同様 N_2 元の Fourier 変換である．また

$$(14)\qquad \tilde{\xi}_{m_1,n_2} = e^{-2\pi i \frac{m_1n_2}{N_1N_2}} \xi_{m_1,n_2}$$

と書けば

$$(15)\qquad X_n = \frac{1}{N_1}\sum_{m_1=0}^{N_1-1} e^{-2\pi i \frac{n_1m_1}{N_1}} \tilde{\xi}_{m_1,n_2}$$

であって，これも単なる N_1 元 Fourier 変換にほかならない．

ただ二つのFourier変換の間に乗算(14)が一つ入ったために直積とはいえなかっただけである。(14)は異る m_1, n_2 の組について $N_1 N_2 = N$ 個の式があるが，その中で m_1 または n_2 が0である場合は乗算の必要はないから，$(N_1-1)(N_2-1)$ 回の乗算を必要とする。これを考えに入れても計算量は大幅に減らされる。

こうして，$N_1 N_2$ 元のFourier変換は，

(a) N_2 元のFourier変換を N_1 回行なう。

(b) (a)の結果に $e^{-2\pi i m_1 n_2/N}$ を乗ずる(位相回転)

(c) (b)の結果に N_1 元のFourier変換を行なう。

の3段階に分解された。ここで N_1 または N_2 (または両方)が更に因数に分けられれば，更に同じ方法で簡略化できることはいうまでもない。こうしてできる限り計算量を減らそうというのがFFTの考え方である。

ここで最も有利なのは N が2のべき $N=2^k$ である場合である。そのとき

(16) $$N_1 = 2, \quad N_2 = N/2 = 2^{k-1}$$

とすると，上の(c)の段階の変換行列は2×2行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ であり，乗算は一つもない。N_2 の方から更に因数2を出して同じようにし，同様のことを繰り返して行くと，Fourier変換の部分はすべて2元の変換となってしまう。そこで乗算

の必要なのは(b)の段階の位相回転だけで，これが1段階につき $N/2$ 回の乗算となるので，全部でおよそ $kN/2 = N\log_2 N/2$ の乗算ですむことになる．加算の回数も同じ程度である．こうして，普通にやれば N^2 の程度の乗算が必要になるFourier変換が，飛躍的に高速化される．

4. FFTのいろいろの変形

以上の説明からも想像がつくように，FFTのalgorithmにはいろいろの形が考えられる．まず，Nは2のべキでなくても，3とか5とかの小さい素因数だけからできた数であれば，同じくらいに速いalgorithmをつくることができる．また，Nが2のべキである場合 N_1 として2をとらずに $2^2=4$ をとることが考えられる．この場合の N_1 元の変換は $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}$ となり，やはり乗算の計算はいらない．位相回転に必要な乗算の数は $(4-1)\times N/4 = \frac{3}{4}N$ であるが，全体の繰り返しの数が半分になるので，全体では乗算回数はおよそ $\frac{3}{8}N\log_2 N$ となり，$N_1=2$ とした場合よりも更に有利となる．

同じようにして $N_1=8$ の場合，$N_1=16$ の場合も検討されている．これらの場合は変換行列の部分に1乗算があらわ

れてくるが，それを考慮に入れても，上手にプログラムを組めば $N_1=4$ のときより更によくなることが知られている．しかし同時にプログラムは非常に長くなる．

N の因数分解を逆にして，$N_1=N/2$，$N_2=2$ とすることもできる．こうして，毎回 N_2 の方を小さくとって分解を進めて行って得られるalgorithmは一見したところ前述のものとほとんど違わないが，ただ毎回 (k) の段階で乗じる位相因子の形が違ってくる．こうして得られたalgorithmはSandé-Tukey algorithmと呼ばれている．元のCooley-Tukey algorithmと特に優劣の差は見当らないようである．

逆Fourier変換．FFTのalgorithmが $(X)\to(x)$ の逆変換にも適用できることは(3)式の形からも当然であるが，また2元変換や位相回転から成るFFTのprocessを逆にたどって，それぞれのstepの逆操作を逆の順序で行なえば逆変換が得られることからも明らかである．こうして逆行した場合，Cooley-Tukey algorithmの逆processはSandé-Tukey algorithmであることがわかる．

5. 実数データに対するFFT

今までの話ではデータ x_n も結果 X_n も，その他の中間結果もすべて複素数と考えて来た．つまり1回の乗算とは複素

数と複素数の乗算のことであって，これを実数の乗算になおせば4回の乗算に相当するものであった。だから標準的な1回のFFTに含まれる実数の乗算の数は実は $2N\log_2 N$ である。

ところで実際にはデータ (x) は実数である場合が多い。その場合に複素数データに対するalgorithmをそのまま適用しては損であろうことは直観的にも明らかである。そこで実数データに対するFFTのalgorithmが開発された。

といってもそれは本質的には複素数データに対するものと異るところはない。ただその場合重複して出てくるものを省いたに過ぎない。即ち x_n がすべて実数である場合は，FFTのprocessの途中であらわれるどの数値に対しても，それが本来的に実数である場合を除けば，必らずそれに共役な数値がどこかで計算されている。そこで互に共役な数値の一方に対する計算は全く余分だから省いてしまうようなプログラムを使えば，計算の量をほぼ半分ですますことができる。こうして，実数データに対するCooley-Tukey algorithmに必要な実数の乗算の数はおよそ $N\log_2 N$ であることがわかる。この場合，結果 X_n はもちろん複素数であるが，$X_{N-n}=X_n^*$ という共役関係があるので，X_n は半分の区間，つまり $0\leqq n\leqq N/2$ について求めれば十分である。

別のやり方として，複素数データに対するalgorithmをそのまま使って実数データのFourier変換を無駄なく行うような工夫もある．その一つは，二つの（全く無関係な）データに対するFourier変換を一度に計算するという方法である．二組のデータ(x), (y)があるとき，これから複素数のデータ $z_n = x_n + iy_n$ をつくり，これに対するFourier変換 Z_n をFFTで求める．すると求めたいFourier変換の結果である X_n と Y_n は

(17) $$X_n + iY_n = Z_n \,, \quad X_n - iY_n = Z^*_{N-n}$$

によって求められる．

もう一つの方法は，N個から成る実数データ(x)から，N/2個の複素数データ

(18) $$z_n = x_{2n} + i x_{2n+1} \qquad 0 \leqq n \leqq \frac{N}{2} - 1$$

をつくって，z_n に $\frac{N}{2}$ 元のFFTを行なうのである．すると，その結果の Z_n から，

(19) $$X_n = \frac{1}{4}\left(1 - ie^{-2\pi i \frac{n}{N}}\right) Z_n + \frac{1}{4}\left(1 + ie^{-2\pi i \frac{n}{N}}\right) Z^*_{\frac{N}{2}-n}$$

によって X_n がきまる．

6. 記憶場所の問題

以上のようなalgorithmを実際のプログラムにしようと思うと，計算の途中の数値の入れ場所が問題になる．大きいN

について変換する場合，途中の数値のために別の場所を確保しておくことはできれば避けたいわけであるが，幸いこの algorithm は低次元の変換の繰り返しの形をとっているから，各ステップでいつも変換結果を変換前のデータのあった場所に overwrite するようにすれば，ほとんど余分の記憶場所を使わずに，最初にデータのあった場所に最後に結果が入るようにできる．ところがそうやるとちょっと具合の悪いことがおこる．変換の結果の X_n が，n の順序とは全く違う妙な順序にならぶのである．全部を2元変換に分解する普通のやり方の場合だと，n を2進法であらわして，それを逆読み（最上位を最下位と思う読み方）した値が順序よく並ぶのである．たとえば，$N=8$ ならば

$$X_0, X_4, X_2, X_6, X_1, X_5, X_3, X_7$$

という順に並ぶ．そこで，あとでこれを添字の大きさの順にならべなおすか，そうでなければ値が必要になったときにそのありかを見つけるためのルーチンを用意する必要があるが，いずれにしてもちょっと厄介なことである．しかし，ある種の応用，たとえば「たたみこみ」の場合などは，周波数領域の量 X_n を直接に使うことはなく，同一の n に対する値同志で演算をした後に，逆変換でまた x_n の領域に戻る．そのような場合には，逆変換プログラムをこのような特殊なならび方

のデータに合うようにつくっておけば，わざわざならべかえをすることは必要がなくなる．

[FFTの応用]

7. たたみこみと相関の計算

Fourier 変換がこのようにして非常に速く計算できるとなると，さまざまな応用がひらけてくる．本来の周波数分析に用いられるのはいうまでもないことで，いままでアナログ的に変換していたのをディジタルに切りかえる傾向が顕著である．しかし最も興味ある応用は，二つの数列の間のたたみこみ演算（convolution），つまり a_n, b_n から

$$c_n = \sum_r a_r b_{n-r} \tag{20}$$

を求める演算であろう．(20) を数列 (b) と数列 (c) との間の関係と見ると，それは一つの線形系（線形 filter）の入力信号 $b(t)$ と出力信号 $c(t)$ との関係であり，(a) はその線形系の余効関数（重み関数，遅延スペクトル）と呼ばれるものに相当する．したがって (20) は一つの filter を simulate するもの（digital filter）であり，実際に信号の処理に使うことができる．

さて，a_n, b_n の Fourier 変換を A_n, B_n とすると，c_n の Fourier 変換 C_n は

(21) $$C_n = N A_n B_n$$

のように積になることはよく知られている　そこで C_n は逆変換

(22) $$c_n = \sum_{m=0}^{N-1} C_m e^{2\pi i \frac{mn}{N}}$$

によって求められるから，一つのたたみこみ演算はFourier変換を3回使うことによって実行できる．(20)はこれ以上簡単になりそうに見えない簡単な式であるが，実際はFourier変換が非常に速くできるために，こんなにまわり道をしても，その方が速いのである．

ここで注意しなければならないのは，いま考えている有限Fourier変換では，数列 (a), (b) 等は N を周期として周期的にくりかえすもののように考えているということである．したがって，以上の方法でつくったたたみこみは，いわゆる循環たたみこみ (cyclic convolution) で，正確に書けば

(23) $$c_n = \sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m} + \sum_{m=n+1}^{N-1} a_m b_{N+n-m}$$

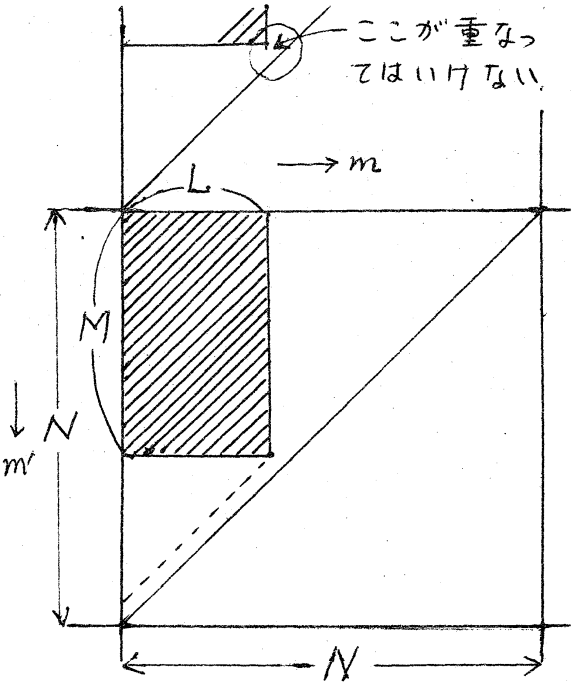
となるものである．ところが普通に求めたいのは(23)の右辺の第一項の方であって，第二項は余分なのである．

この問題はしかし簡単に解決される．データの数列のあとに適当に0のデータを補って，Fourier変換における周期を少し長くしてやればよい．具体的には，データ a_n の数が L，

データ b_n の数が M であれば，周期 N は

$$N \geqq L+M-1$$

となるようにとる．つまり $L+M-1$ より大きい適当な2のべきをとればよい．そうして L より大きい n に対する a_n，M より大きい n に対する b_n はすべて0にしてしまうのである．そうした上で循環的なたたみこみを行えば，数列の終りにとった十分に大きい空白区間のおかげで，"裏側"での重なりが完全に避けられる．即ち(23)の右辺第二項は0になる．



ここで長さ L と M とが甚だしく異るとき，たとえば $L \ll M$ であるような場合は，たたみこみの計算を一度にやらないで，いくつかの区間に分けて行なうことができる．そうすることによって，計算に必要な記憶容量が少なくてすむ．長い時系列を filter するような場合，filter の余効関数の長さの方はあまり長くないというような場合がこれに該当する．

これには N を適当に大きく（少くとも $2L$ より大きく）選

で，$M' = N - L + 1$ として f_n の数列を M' の長さに区切って，それぞれの区間の f_n について a_n とのたたみこみを行ない，それらの結果を，端の重なり合う部分では加え合わせながら一連の数列につなぎ合わせればよい．

この場合，重なり合う部分で加算をすることは，計算量としてはとるに足らないものであるが，そのために前段の結果の一部を主記憶に残しておくか，または補助記憶に書いたものをもう一度読み出すことになる．そこで，はじめのデータ f_n の方を適当に重なるようにとることによって，この後からの加算をなしですます工夫もなされている．

たたみこみと同じようなものに

(24) $$\varphi_n = \sum_m a_m f_{m-n}$$

で定義される相互相関関数がある．これを(20)とくらべると，f の添字の符号が逆になっただけの違いなので，φ_n の Fourier 変換 Φ_n は

(25) $$\Phi_n = N A_n B_n^*$$

で与えられることになる（a_n, f_n は実数とした場合）．そこでたたみ込みの場合と同様に，3回の Fourier 変換で φ_n を求めることができる．もちろんこの場合も“循環的相関関数”になることを避けるためには，データに適当に0を附加してやる必要がある．

Φ_n は相互パワースペクトルと呼ばれ，従来はこれを求めるためにはまず相互相関関数 φ_n を計算し，これにFourier変換を行なって Φ_n を得るという方法が多く使われた．それが計算手段の進歩の結果，φ_n を求めるのに逆に Φ_n を(25)から直接計算し，それに逆Fourier変換を使うという全く主客転倒になったのは面白いことである．

相関関数を求める場合のデータ a_n, b_n は非常に長い時系列である場合が多い，しかもその両方の長さは等しく，また相関関数 φ_n の方は0を中心とした比較的短かい区間でだけ求めればよいというのが普通である．そこで，この場合もまた区分して計算する方法が役立つ．

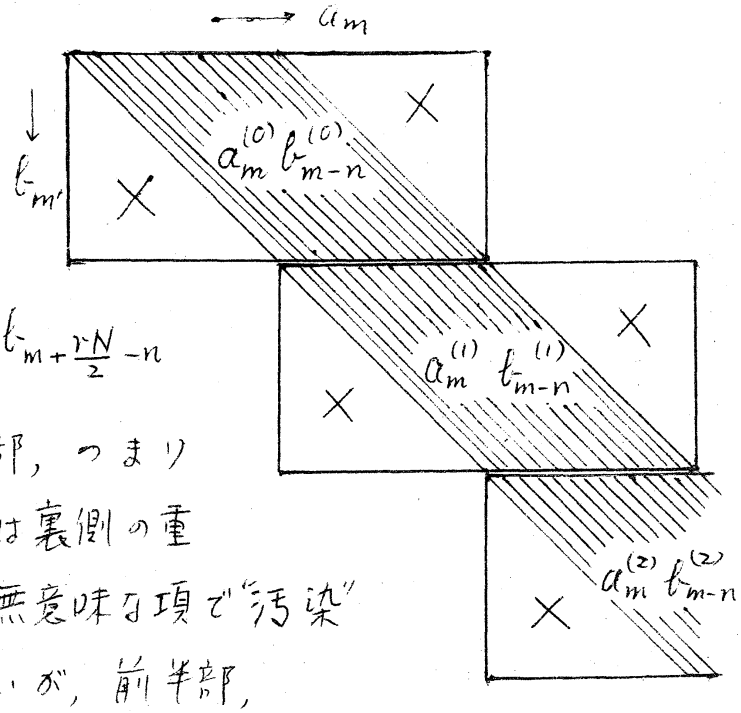
いま N をFourier変換の項数(周期)としたとき，a_n を $\frac{N}{2}$ の長さで区切る．したがって第 $r+1$ 切片は $\frac{rN}{2}$ からはじまるが，ここで第 $r+1$ 番目の a_n の配列は隣同志の二つの切片をつなげたものとする．したがって

$$a_n^{(r)} = a_{n+\frac{rN}{2}} \qquad (0 \leqq n \leqq N-1) \tag{26}$$

で a_n の配列は半分ずつ重り合っている．b_n の方も $\frac{N}{2}$ で区切るが，この方は二つつなげないで，データは前半だけに入れ，後半には0をつめる，即ち

$$b_n^{(r)} = \begin{cases} b_{n+\frac{rN}{2}} & (0 \leqq n \leqq \frac{N}{2}-1) \\ 0 & (\frac{N}{2} \leqq n \leqq N-1) \end{cases} \tag{27}$$

そこで第 $r+1$ 区間の部分和 $\varphi_n^{(r)}$ は



(28)

$$\varphi_n^{(r)} = \sum_{m=n}^{n+\frac{N}{2}-1} a_{m+\frac{rN}{2}}\, b_{m+\frac{rN}{2}-n}$$

となる．ここで，後半部，つまり $\frac{N}{2} < n \leqq N-1$ の場合は裏側の重なりのために出てきた無意味な項で"汚染"されているので使えないが，前半部，$0 \leqq n \leqq \frac{N}{2}$ の部分は正しい値になっている．

こうして得た $\varphi_n^{(r)}$ を全部加えて

(29) $$\varphi_n = \sum_r \varphi_n^{(r)} \qquad \left(0 \leqq n \leqq \frac{N}{2}\right)$$

とすれば，これが求める相関関数となる

これで $n \geqq 0$ の相関関数が求まったが，$n \leqq 0$ の方の値は a_n と b_n の役割を交換して同じようにやれば計算できる．

このようにして，相関の長さの最大値 $\frac{N}{2}$ があまり大きくなければデータの長さはどんなに長くても計算ができる．なお，実際の計算では，r についての総和は最後の逆Fourier変換を行なう前に行なった方がFFTの回数を節約できる．

8. 任意の項数のFourier変換

有限Fourier変換(1)が連続関数の積分の近似としてではなく，本来的に有限なFourier変換として出てくるような問題ではNの値ははじめから定っていて，たとえば2のベキというような特別な値に指定できないであろう．Nは素数であるような場合さえ考えられる．また(1)を一般化して，

$$X_n = \sum_{m=0}^{N-1} x_m W^{nm} \qquad n = 0, 1, \cdots, M-1 \tag{30}$$

を1のベキ根でも何でもない値Wに対して計算したいような場合もある．ところが，このような"不完全Fourier変換"でもFFTなみに速く計算する方法がある．それはFourier変換と，次のFresnel変換

$$U_n = \sum u_m W^{-\frac{(m-n)^2}{2}} \tag{31}$$

との関係に着目するのである．(31)は明らかに一つのたたみこみ演算である．(これをFresnel変換というのは筆者がつけた名前であるが，これは光のFresnel回折像を求める式であり，特に，よく知られたFresnel積分は(31)(で和を積分に変えたもの)の特別な場合であることからも，こう呼ぶのが適当だと思われる．)さて，(31)は

$$U_n = W^{-\frac{n^2}{2}} \sum (u_m W^{-\frac{m^2}{2}}) \cdot W^{mn} \tag{32}$$

と書けるから、Fresnel変換とFourier変換とはデータと結果とにそれぞれ適当な位相因子を乗ずることによって互に移り変るものである。(これは光のFresnel回折像が、適当にレンズで焦点をずらすことによってFraunhofer回折像に移ることに相当している。) そうしてFresnel変換はたたみ込みだから、FFTを利用して計算ができる。しかも、たたみこみについては適当に0をつけ加えさえすれば特別な周期性というようなものは問題にならないから、(31)でWの値が何であってもかまわないのである。Wは絶対値が1であることさえ原理的には要求されない。しかし$|W| \neq 1$であると実際には丸め誤差のために計算結果が全く意味をもたなくなることもあるので注意を要する。

9. むすび

以上、FFTのalgorithmとその応用についての原理的なことの概要をのべた。実際にこれをプログラムにするためには、更にいろいろな考慮、たとえば$e^{-2\pi i \frac{mn}{N}}$をどうしてつくるか(表をひくか、計算するか)、記憶場所をどうとるか、ならべかえのalgorithm、± 1や$\pm i$による乗算をとばす方法、実数に対するroutineで逆変換を行なう方法などいろいろ必要であるが、それらについてはそれぞれの文献にゆずろう。