数理解析研究所講究録
第173巻 1973年 45-57

コンパクトな力学系の分解について

東大 教養　斉藤利弥

§1. Motivation

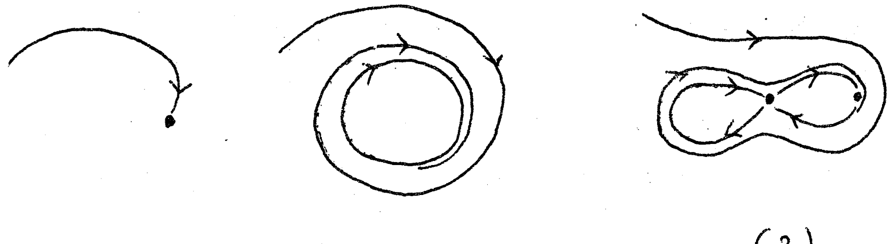
2次元球面 S^2 を相空間とする力学系に対しては，有名な Poincaré - Bendixson の理論がある.

この理論によればまず，このような力学系の minimal set は特異点か周期軌道である. これらの minimal set がすべて互に孤立している (したがって個数は有限) としよう.

このとき，すべての軌道は空でない limit set をもち，それらは

(1) 特異点，または周期軌道であるか，または

(2) いくつかの特異点と，それをつなぐ特異点でない軌道とからつくられる閉曲線である.



(1)　　　　　(2)

したがってS^2上の力学系においては，そのコンパクトな不変集合のうちで，特に limit set に成り得るものを全部とり出してみると，それは (1) か (2) かのどちらかになる．そこでそのようなコンパクトな不変集合を全部とり出してその和集合Nをつくると，はじめの力学系は

1) N上の力学系　　　2) S^2-N上の力学系

の二つに分解される．このうち 2) の方はコンパクトな不変集合を全くもたない，いわゆる不安定な力学系であって，その軌道は $t\to\pm\infty$ のときNに漸近する．

この場合，前ページの (1), (2) の結果があるので，Nの中の力学系はきわめて簡単な構造をもっている．

さらに S^2-N の上の力学系の構造も実はきわめて簡単なのであって，それは平行流と同型（すなわち parallelizable）であることが証明できる．

これらの事実があるために，S^2上の力学系の研究は，2) に属する軌道がどのような行動をとりながらNに漸近するかという局所的問題に帰着されてしまう．Poincaré-Bendixson の理論の成功の鍵はこのような事情に負うものであると思ってよいであろう．

それでは相空間がもっと一般なコンパクト空間であるとき，このような考え方を真似て，力学系を

1) ※limit set になり得るようなコンパクトな不変集合全体の和の上の力学系と,
2) その残りの部分である不安定な力学系

とに分けてしまい, 2) の部分が実は平行流と同型であることが証明できないであろうか?

もちろんこの場合には, 1) は S^2 の場合の N のような簡単な構造をもっていないので, このような分解をしただけでは問題は解決しないが, とにかくこの分解によって, 本質的に大域的考察を必要とする部分 1) と, 局所的考察によって構造が決定できる部分 2) とに問題を分割することができる.

以上がこの問題を考えるに到った動機である.

証明は [1] に詳しく述べられているので, ここでは結果を記述するに止める. また, 証明に利用されるいろいろな概念や定理のくわしい説明は [2] を参照されたい.

§2. 記号と定義

X を locally compact metric space, (X, π) を X を相空間とする力学系とする. すなわち R を実数全体の集合に自然な位相を入れたものとするとき

1) π は $X \times R$ から X への連続写像
2) $\forall x \in X$ に対し $\pi(x, 0) = x$

3) $\forall x \in X$, $\forall s, t \in R$ に対し $\pi(\pi(x,s),t) = \pi(x, s+t)$

これについて次の記号を用いる。

(1) $C(x) = \bigcup_{t \in R} \{\pi(x,t)\}$ (x を通る軌道)

(2) $C^+(x) = \bigcup_{t \geqq 0} \{\pi(x,t)\}$ (x から出る正の半軌道)

(3) $C^-(x) = \bigcup_{t \leqq 0} \{\pi(x,t)\}$ (x から出る負の半軌道)

(4) $L^+(x) = \bigcap_{\tau \in R} \overline{\bigcup_{t \geqq \tau} \{\pi(x,t)\}}$ (x の ω-limit set)

(5) $L^-(x) = \bigcap_{\tau \in R} \overline{\bigcup_{t \leqq \tau} \{\pi(x,t)\}}$ (x の α-limit set)

さらに

定義 1. $x \in X$ の positive prolongation $D^+(x)$ とは

$y \in D^+(x) \Longleftrightarrow \exists \{x_n\} \subset X, \{t_n\} \subset R$ s.t. $x_n \to x$, $t_n \geqq 0$, $\pi(x_n, t_n) \to y$

定義 2. $x \in X$ の positive prolongational limit set $J^+(x)$ とは

$y \in J^+(x) \Longleftrightarrow \exists \{x_n\} \subset X, \{t_n\} \subset R$ s.t. $x_n \to x$, $t_n \to \infty$, $\pi(x_n, t_n) \to y$

定義 1 において $t_n \geqq 0$ を $t_n \leqq 0$ でおきかえて negative prolongation $D^-(x)$ を定義する。

定義 2 において $t_n \to \infty$ を $t_n \to -\infty$ でおきかえて negative prolongational limit set $J^-(x)$ を定義する。

$D^\pm(x) = J^\pm(x) \cup C^\pm(x)$, $J^\pm(x) \supset L^\pm(x)$ (複号同順) であり、$J^\pm(x)$ は閉不変集合である。

定義 3. M を compact な不変集合とする。

1) $[x ; x \in X, \phi \neq L^+(x) \subset M]$ を M の region of positive attraction とよび、$A^+(M)$ で表わす。

2) 1) において $L^+(x)$ を $L^-(x)$ でおきかえたものを M の region of negative attraction とよび $A^-(M)$ で表わす.

3) $[x ; x \in X,\ L^+(x) \cap M \neq \phi]$ を M の region of positive weak attraction とよび $a^+(M)$ で表わす。

4) 3) において $L^+(x)$ を $L^-(x)$ でおきかえたものを M の region of negative weak attraction とよび $a^-(M)$ で表わす.

5) $B^\pm(M) = A^\pm(M) - M$, $\quad b^\pm(M) = a^\pm(M) - M$

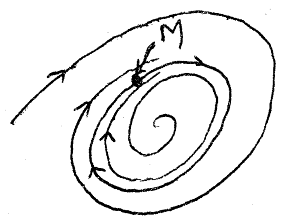
($A^\pm(M) \supset M$, $a^\pm(M) \supset M$ は明らかである.)

$A^\pm(M)$, $B^\pm(M)$, $a^\pm(M)$, $b^\pm(M)$ はいずれも不変集合である.

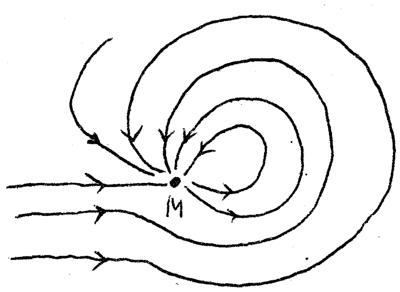
定義4. 1) $A^+(M)$ ($A^-(M)$) が M の近傍であるとき, M を positive (negative) attractor という.

2) $a^+(M)$ ($a^-(M)$) が M の近傍であるとき, M を ~~正(負)~~ positive (negative) weak attractor という.

attractor は weak attractor であるが, その逆は必ずしも成り立たない. attractor は必ずしも安定ではないが, もし安定ならば漸近安定である.



weak attractor が attractor にならない例



安定でない attractor の例

定義5. Mをcompactな不変集合とする。Mの近傍Uが存在して、Mのいくらでも近くに $C^+(x)\not\subset U$, $C^-(x)\not\subset U$ であるような点xがとれるとき、Mは*saddle set*であるという。saddle setでないcompactな不変集合を*non-saddle set*という。

§3. 必要な定理

定理1. Mがpositive (negative) weak attractorならば

$$D^+(M)=a^-(M)\quad\left(D^-(M)=a^+(M)\right)\qquad\text{(Bhatia)}$$

定理2. Mがnon-saddle setならば

$$x\notin M,\ L^+(x)\cap M\neq\phi\ \longrightarrow\ M\supset J^+(x)\supset L^+(x)$$

$$x\notin M,\ L^-(x)\cap M\neq\phi\ \longrightarrow\ M\supset J^-(x)\supset L^-(x)\qquad\text{(Saito)}$$

系 Mがnon-saddle setならば

$$a^+(M)=A^+(M),\qquad a^-(M)=A^-(M)$$

定理3. Mがnon-saddle setでminimal setから孤立しているならば $D^+(M)=\overline{A^-(M)}$, $D^-(M)=\overline{A^+(M)}$ (Saito)

定理4. Mがnon-saddle setでminimal setから孤立しているならば $B^+(M)\,(=\ell^+(M))$, $B^-(M)\,(=\ell^-(M))$ はともに、開集合である。 (Saito)

定義6. 力学系 (X,π) において、$S\subset X$ と、XからS×Rへのhomeomorphism hで次の条件を満たすものが存在するとき、(X,π) は*parallelizable*であるという。

1) $\bigcup_{t\in R} \pi(S, t) = X$,

2) $\forall x \in S$, $\forall t \in R$ に対し $h(\pi(x,t)) = (x, t)$

定理 5. X が locally compact, separable, metric ならば (X, π) が parallelizable である必要十分条件は, $\forall x \in X$ に対して $J^+(x) = \phi$ (あるいは $J^-(x) = \phi$) となることである (Nemytskii)

§4. compact system の分解

X を compact metric space として力学系 (X, π) を考える. minimal set は有限個で, したがって互に孤立しているものとする. minimal set のうち saddle を $S_1, \cdots, S_p$ $(0 \leqq p < \infty)$, non-saddle を $F_1, \cdots, F_r$ $(0 \leqq r < \infty)$ とする. そして

$$N = (\cup S_k) \cup (\cup F_k)$$

とおく. X が compact だから任意の $x \in X$ に対し $L^{\pm}(x) \neq \phi$. ゆえに $L^{\pm}(x)$ は compact な不変集合で, したがって minimal set を少なくとも一つ含む. ゆえに

$$L^+(x) \cap N \neq \phi, \quad L^-(x) \cap N \neq \phi$$

ゆえに N は正負両方向の ~~attractor~~ weak attractor で

$$a^+(N) = a^-(N) = X$$

したがって定理 1 により $D^+(N) = D^-(N) = X$. これから

$$X = (\cup D^+(S_k)) \cup (\cup D^+(F_k))$$
$$= (\cup D^-(S_k)) \cup (\cup D^-(F_k))$$

定理3により

$$X=(\cup D^+(S_k))\cup(\cup\overline{A^-(F_k)})=(\cup D^-(S_k))\cup(\cup\overline{A^+(F_k)})$$

これを次のように書き直す

$$X=(\cup D^+(S_k))\cup(\cup B^-(F_k))\cup(\cup(\partial A^-(F_k)\setminus\cup F_k))\cup(\cup F_k)$$
$$=(\cup D^-(S_k))\cup(\cup B^+(F_k))\cup(\cup(\partial A^+(F_k)\setminus\cup F_k))\cup(\cup F_k)$$

ところが次の補題が成り立つ。

補題1. $F_1,\cdots,F_r$ の任意の一つを F で表わすと

$$\partial A^+(F)\setminus\cup F_k\subset\cup D^-(S_k),\quad \partial A^-(F)\setminus\cup F_k\subset\cup D^+(S_k)$$

これを上の関係に使えば

$$X=(\cup D^+(S_k))\cup(\cup B^-(F_k))\cup(\cup F_k)$$
$$=(\cup D^-(S_k))\cup(\cup B^+(F_k))\cup(\cup F_k)$$

そこで

$$M=\cup F_k$$
$$P=(\cup B^+(F_k))\cap(\cup B^-(F_k))$$
$$Q=(\cup D^+(S_k))\cap(\cup B^+(F_k))$$
$$S=(\cup D^-(S_k))\cap(\cup B^-(F_k))$$
$$T=(\cup D^+(S_k))\cap(\cup D^-(S_k))$$

とおけば $X=M\cup P\cup Q\cup S\cup T$ となり、ここに M, P, Q, S は互に disjoint, T は P, Q, S とは disjoint であることが証明できる。ただし $T\cap M$ は必ずしも空集合ではない。また，M, P, Q, S, T はすべて不変集合で，M, T は閉集合，

Pは開集合である.

補題2. $T \cap M \neq \phi$ ならば $T \cap M = \bigcup (T \cap F_k)$ で, $T \cap F_k \neq \phi$ ならばそれはTの連結成分である.

この補題から $\tilde{T} = T \cap (X-M)$ とおけば$\tilde{T}$も閉不変集合であることがわかる.

これから

$$X = M \cup P \cup Q \cup S \cup \tilde{T}$$

なる分解が得られる. $M, P, Q, S, \tilde{T}$は不変集合で互にdisjoint, $M, \tilde{T}$は閉集合, Pは開集合である. そして$M \neq \phi$, $\tilde{T} \neq \phi$ならば$P \neq \phi$で, またQ, Sのうち少なくとも一方は空でない.

次に述べるのが最終的な分解定理である.

主定理. $\{P_\alpha\}$, $\{Q_\alpha\}$, $\{S_\alpha\}$ をそれぞれ P, Q, S の連結成分とする.

(1) ある番号jおよびiに対して $P_\alpha \subset B^+(F_j) \cap B^-(F_i)$ である($j=i$のこともあり得る.)

(2) $x \in P_\alpha \to L^+(x) = F_j \quad L^-(x) = F_i$

(3) (P_α, π) はparallelizable (ただし(P_α, π)は(X, π)のP_αへのrestrictionとする)

(4) ある番号jに対し $Q_\alpha \subset B^+(F_j)$

(5) $\partial Q_\alpha \cap M = F_j$

(6) $x \in Q_\alpha \rightarrow L^+(x) = F_j,\ L^-(x) \subset \tilde{T}$

(7) (Q_α, π) は parallelizable

(8) ある番号 j に対し $S_\alpha \subset B^-(F_j)$

(9) $\partial S_\alpha \cap M = F_j$

(10) $x \in S_\alpha \rightarrow L^-(x) = F_j,\ L^+(x) \subset \tilde{T}$

(11) (S_α, π) は parallelizable

証明はここでは述べないが，parallelizability の証明には，定理2と定理5とを使う．たとえば (Q_α, π) が parallelizable なことをいうには次のようにする．

$x \in Q_\alpha$ とすれば (6) により，ある番号 j に対して $L^+(x) = F_j$．F_j は non-saddle だから定理2により $J^+(x) \subset F_j$．ところが $Q_\alpha \cap F_j = \phi$ だから (Q_α, π) においては $J^+(x) = \phi$．ゆえに定理5により (Q_α, π) は parallelizable．（Q_α が compact, separable, metric なことはもちろん簡単に証明できる．）

この定理からわかるように P, Q, S の中の軌道はすべて平行流と同型だから，そしてその limit set は M または $\tilde{T}$ に含まれるから，問題は M と $\tilde{T}$ の近傍での軌道の行動をしらべることにしぼられる．すなわち問題が局所化される．

M の構造をしらべることはすなわち minimal set の内部構造をしらべることで，これは本質的に global な問題であり，多くの人によって研究されているが，未だ解決には程遠い．

$\tilde{T}$の構造をしらべるには，力学系$(\tilde{T}, \tilde{\pi})$を考える。$\tilde{T}$は閉集合であるからこれはコンパクトな力学系である。これのminimal setは$S_1, \cdots, S_p$であるが，このうちいくつかのものは$(\tilde{T}, \tilde{\pi})$においてはnon-saddleであるかもしれない。もし$(\tilde{T}, \tilde{\pi})$がsaddleとnon-saddleの両方のminimal setを含むなら，$\tilde{T}$をあらためてXと考え，上の分解を行なう。その結果得られる$\tilde{T}$にまた同じ分解を行なう。

minimal setの数は有限個であるから，この分解は有限回で終る。すなわちこの手続を有限回くりかえすと，最後に$\tilde{T}$にあらわれるminimal setは（$(\tilde{T}, \tilde{\pi})$に関して）すべてnon-saddleとなるか，すべてsaddleとなるかのどちらかであって，その場合には，$\tilde{T}$の分解は，$\tilde{T}$をあらためてXとおけば

1) $X = M \cup P$ 　　　　2) $X = \tilde{T}$

のどちらかとなる。1)の場合には，Pの構造がすでにわかっていて，そこでの力学系は平行流と同型であるから，問題はないが，2)の場合には，上のような方法ではもはや議論を進めることができず，本質的にglobalな考察が必要となる。したがってこの方向で残された問題は，Mの内部構造をしらべる問題，すなわち

A) minimal dynamical systemの研究

および$X = \tilde{T}$であるような場合の研究，すなわち

B) minimal set がすべて saddle set であるような力学系の研究

の二つに要約される。A) については昔から研究されているが、B) は（saddle set という概念は [3] においてはじめて導入されたものなので）全く手がつけられていない。

この他に、M あるいは $\tilde{\Gamma}$ の近傍での軌道の行動をしらべる、いわゆる局所的問題があるが、これもほとんど手がついていない。筆者は、S^2 上の力学系の特異点の近傍の軌道の研究のために Bendixson が考案した nodal region theory を一般化することを試みたが、あまり進展をみていない。（[4], [5], [6] 参照）

文献

[1] T. SAITO, On the structure of compact dynamical systems, Funkcial. Ekvac. 13 (1970), 147-170

[2] N.P. BHATIA & G.P. SZEGÖ, Stability theory of dynamical systems, Springer, Berlin, Heidelberg & New York (1970)

[3] T. URA, On the flow outside a closed invariant set; stability, relative stability and saddle sets, Contrib. Diff. Eqs, 3 (1964), 249-294

[4] T. SAITO, On the flow outside an isolated minimal set, Proc.

U.S.-Japan Seminar on Diff. and Func. Eqs, Benjamin, New York & Amsterdam, (1967), 301-312

[5] T. SAITO, Isolated minimal sets, Funkcial. Ekvac. 11 (1968), 155-167.

[6] T. SAITO, On a compact invariant set isolated from minimal sets, Funkcial. Ekvac. 12 (1969), 193-203