数理解析研究所講究録
第173巻 1973年 58-73

力学系における Stability と Genericity について

名大 教養 池上宜弘

§1. 序

力学系の Stability と Genericity に関する現在まで得られている主要な結果に著者の出した結果や注意も織りまぜて説明する。

Mを境界のない smooth な多様体とし $\mathcal{D}^r(M)$ をM上の C^r 級の diffeomorphism 全体，$\mathcal{X}^r(M)$ を C^r 級の vector field (flow) 全体とする。$\mathcal{D}^r(M)$, $\mathcal{X}^r(M)$ には C^r Whitney topology を入れておく。(Mが compact のとき，これは C^r uniform topology と同じである。) 以後 $\mathcal{D}^r(M)$ 又は $\mathcal{X}^r(M)$ をM上の力学系の空間といい Dyn(M) であらわすことにする。又 $r \geq 1$ とする。

10年以前までの力学系に関する Smale の目的は次のようなものであった。(i) Dyn(M) の中に open dense な set U をみつけること。(ii) U の中の element (又は適当な equivalence に関する class) を何か discrete numerical なそして代数的な保存

量で表現すること．しかし適当と思われるUが定義されては次にそれがdenseでないことが示されてきた．そこで1箇の適当なUを積極的に探すことはやめて，適当なopen subsetの列

$$U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \cdots \subset U_k \subset \mathrm{Dyn}(M)$$

を見出していく方向が適当と思われる．事実，最近Smaleも次のように云っている．

上のようなU_iの列を見出し，それは次の条件をみたすようなものであること．

(i) 列の長さkはあまり大きくないこと．

(ii) Uはopen又は少くともあるopen setのBaire subsetであること．

(iii) iが大きくなればU_i力学系の広いclassを含むこと．一方iが小さくなればU_iに含まれる力学系は詳しく構造が分るようなものであること．従ってU_kにはあまり強いstability propertyは期待できない．

§2. Dyn(M)の部分集合の定義．

力学系ではorbitの研究が重要であるから，2つの力学系の間の同値関係は次のtopologically equivalenceがよく使われて来た．すなはち2つの力学系が<u>topologically equivalent</u>（∼）で

あるとは homeomorphism $h: M \longrightarrow M$ が存在して，一方の力学系の任意の orbit は h により他方の力学系の1つの orbit の上に方向を保ってうつされるときをいう．すなはち

$f, g \in \mathcal{D}^r(M)$ のとき　　$hf = gh$,

$X, Y \in \mathfrak{X}^r(M)$ のとき　　$h(c_+(x, X)) = c_+(h(x), Y)$.

ただし $\varphi_X(x, t)$ を積分曲線とするとき，$c_+(x, X) = \{\varphi_X(x, t) \mid t \geqq 0\}$ とする．

$f \in \mathcal{D}^r(M)$ の invariant set Λ が <u>hyperbolic</u> であるとは Λ 上の M の tangent bundle の連続な splitting $T_\Lambda(M) = E^u_\Lambda \oplus E^s_\Lambda$ が存在して次の条件を満すことである．

(i) E^u_Λ, E^s_Λ は f の微分 Tf に関して invariant,

(ii) $c > 0$ と $0 < \tau < 1$ が存在して，任意の $n \in Z_+$ (自然数) に対して $\max\{\|Tf^n | E^s\|, \|Tf^{-n} | E^u\}< c\,\tau^n$. 但し $\|\ \|$ は与えられた Riemannian metric に関する norm とする．

$X \in \mathfrak{X}^r(M)$ の invariant set Λ ($\varphi_X(\Lambda, t) \subset \Lambda$, $\forall t$) が <u>hyperbolic</u> であるとは連続な splitting $T_\Lambda(M) = E^u_\Lambda \oplus E^s_\Lambda \oplus E^\varphi_\Lambda$ が存在して次の条件を満すことである．

(i) E^u_Λ, E^s_Λ そして E^φ_Λ は $T\varphi_X(\ , t)$ に関して invariant,

(ii) E^φ_x は X_x によって張られる,

(iii) $c > 0$ と $0 < \tau < 1$ が存在して，任意の $t > 0$ に対して $\max\{\|T\varphi_X(\ , t)|E^s_\Lambda\|, \|T\varphi_X(\ , -t)|E^u_\Lambda\|\} < c\,\tau^t$.

$d(\ ,\ )$をMの　metric とする．$x \in M$を通る$f \in \mathcal{D}^r(M)$の <u>*stable manifold*</u> $W_f^s(x)$，<u>*unstable manifold*</u> $W_f^u(x)$ は次に与えられるMの subset である．

$$W_f^s(x) = \{ y \in M \mid \lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0 \},$$

$$W_f^u(x) = \{ y \in M \mid \lim_{n\to\infty} d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) = 0 \}.$$

x, γを各々$X \in \mathfrak{X}^r(M)$の fixed point, closed orbit とする．x, γの stable manifold, unstable manifold は次のように定義される．

$$\begin{cases} W_X^s(x) = \{ y \in M \mid \lim_{t\to\infty} \varphi_X(y,t) = x \}, \\ W_X^u(x) = \{ y \in M \mid \lim_{t\to-\infty} \varphi_X(y,t) = x \}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} W_X^s(\gamma) = \{ y \in M \mid \varphi_X(y,t) \to \gamma \text{ as } t\to\infty \}, \\ W_X^u(\gamma) = \{ y \in M \mid \varphi_X(y,t) \to \gamma \text{ as } t\to-\infty \}. \end{cases}$$

(2.1). (Hirsch, Pugh, [1]). Λを$f \in \mathcal{D}^r(M)$の closed hyperbolic invariant set とすれば連続写像$\psi: E_\Lambda^s \to M$が存在して$x \in \Lambda$に対して$\psi | E_x^s$は injective C^r immersion で$\psi(0_x) = x$，$\psi(E_x^s) = W^s(x)$.

(2.2). [13]. x, γを$X \in \mathfrak{X}^r(M)$の各々 hyperbolic な fixed point, closed orbit とすれば，これ等のW^s, W^uは injective C^r immerse された manifold である．

$\Omega = \Omega(f)$がfの <u>non-wandering set</u> であるとは，任意の$x \in \Omega$と任意のxの近傍Uに対して$n \in Z_+$が存在して$f^n(U) \cap U \neq \phi$が成立することである．$\Omega = \Omega(X)$が$X \in \mathfrak{X}(M)$の <u>non</u>-

wandering set であるとは, 任意の $x \in \Omega$ と任意の x の近傍 U と任意の $t_0 > 0$ に対して $|t| > t_0$ なる t が存在して $\varphi(U,t) \cap U \neq \phi$ が成立することである. (M が open manifold の場合は $\varphi(x,t)$ が定義されるような t の範囲で考える). Ω は closed invariant set である.

$f \in \mathfrak{D}(M)$ が Axiom A をみたすとは, f が次を満すことである.

a) $\Omega(f)$ は hyperbolic,

b) $\Omega(f)$ の中に periodic point が dense に存在する.

$X \in \mathfrak{X}(M)$ が次を満たすとき X は Axiom A を満たすという.

a) $\Omega(X)$ は hyperbolic

b) $\Omega(X)$ の中に fixed point 又は closed orbit が dense にある.

Axiom A を満たす力学系が transversality condition を満たすとは periodic point; fixed point, closed orbit の W^s と W^u が互に transversal に交わることである. (例えば $W^s(x) \pitchfork W^u(\gamma)$, $W^s(x) \pitchfork W^u(y)$, $W^s(\gamma) \pitchfork W^u(\gamma')$ 等.) Axiom A を満たす力学系 $f \in \mathfrak{D}(M)$ が strong transversality property を持つとは, 任意の $x \in M$ に対し $W^s_f(x) \pitchfork_x W^u_f(x)$ を成立さすことである. (2.1) により上の W^s, W^u は local に manifold であるから上は well-defined である.

(2.3). (Spectral decomposition theorem [15], [10]). 力学系が Axiom A をみたしていれば次の意味で一意的な分解 $\Omega =$

$\Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_k$ が存在する．(i) Ω_i は closed invariant，(ii) $\Omega_i \cap \Omega_j = \phi$ $(i \neq j)$，(iii) Ω_i は topologically transitive ($\exists x \in \Omega_i$，x の orbit は Ω の中で dense．)

力学系が Axiom A をみたして $\Omega = \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_k$ を spectral decomposition とするとき $\Omega_{i_1}, \cdots, \Omega_{i_h}$ が <u>cycle</u> であるとは，$h > 1$ で $W^s(\Omega_{i_j}) \cap W^u(\Omega_{i_{j-1}}) \neq \phi$ $(j = 2, \cdots, h)$，$W^s(\Omega_{i_1}) \cap W^u_{i_h} \neq \phi$ が成立することである．(但し，$W^s(\Omega) = \bigcup_{x \in \Omega} W^s(x)$，$W^u(\Omega)$ も同様．)
力学系に cycle が存在しないとき <u>no cycle property</u> を持つという．

Ω が <u>finite type</u> とは，$f \in \mathcal{D}(M)$ のとき $\Omega(f)$ が有限集合のことで $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ のとき $\Omega(X)$ が有限個の fixed point や closed orbit から成ることをいう．

次に $\mathrm{Dyn}(M)$ の4つの部分集合を定義する．

$\mathcal{U}_1 = \{$ Axiom A をみたし，Ω が finite type で transversality condition をみたす力学系(の全体)$\}$ $\subset \mathcal{D}(M)$ 又は $\mathfrak{X}(M)$．

$\mathcal{U}_2(\mathcal{D}) = \{ f \in \mathcal{D}^r(M) \mid f$ は Axiom A をみたし strong transversality condition をみたす．$\}$，

$\mathcal{U}_3 = \{$ Axiom A と no cycle condition をみたす力学系 $\}$，

$\mathcal{U}_4 = \{$ fixed point, closed orbit ; periodic point が hyperbolic である力学系 $\}$．

力学系が<u>structurally stable</u>であるとは，Dyn(M)の中の近傍が存在してその中の力学系は全てtopologically equivalentであること．2つの力学系が<u>Ω-equivalent</u>であるとは，それ等のnon-wandering set Ω_1, Ω_2に対してhomeomorphism $h: \Omega_1 \to \Omega_2$で任意のorbitを他方の1つのorbitの上に方向を保ってうつすようなものが存在することである．($\sim_\Omega$で示す)．
ある力学系が<u>Ω-stable</u>であるとはDyn(M)での近傍が存在してその中の力学系はすべてΩ-equivalentであること．

denseなopen setの候補として次にstabilityの弱い概念を導入してみる．

<u>定義</u>．$f, g \in$ Dyn(M)とする．gの任意の近傍V_gに対してfの近傍U_fが存在して，$f' \in U_f$ならばf'とtopologically equivalentなg'がV_gの中に存在するとき，$f \precsim g$であらわすことにする．
又．$f \precsim g$で$g \precsim f$のとき$f \simeq g$であるとする．又上の定義においてtopologically equivalenceの代りにΩ-equivalenceを使うことにより同様に$f \simeq_\Omega g$を定義する．

◎ $\sim, \sim_\Omega, \simeq, \simeq_\Omega$ はequivalent relationである．

<u>定義</u>．$f \in$ Dyn(M)が<u>weakly stable</u> (<u>weakly Ω-stable</u>)であるとは，fの近傍が存在して，その中の任意のgに対して$f \simeq g$ ($f \simeq_\Omega g$)が成立することである．

次に Dyn(M) の種々の部分集合を定義する。

$\mathcal{V}_F = \{$ structurally stable で Ω が finite type の力学系 $\}$,

$\mathcal{V}_A = \{$ Anosov であるような力学系 $\}$, (Anosov の定義については次の白岩さんの講演を参考にされたい。)

$\mathcal{V}_S = \{$ structurally stable な力学系 $\}$,

$\mathcal{V}_\Omega = \{$ Ω-stable な力学系 $\}$,

$\mathcal{V}_S^* = \{$ weakly stable な力学系 $\}$,

$\mathcal{V}_\Omega^* = \{$ weakly Ω-stable な力学系 $\}$.

$\mathcal{V}_i$ や $\mathcal{U}_j$ 等を特に $\mathfrak{X}(M)$ や $\mathfrak{D}(M)$ の中に指定したいとき、今後これを $\mathcal{V}_i(\mathfrak{X})$ や $\mathcal{V}_i(\mathfrak{D})$ で示す。又微分可能性の C^r を指定したいとき $\mathcal{V}_i^r$ 等で示す。

§3. $\mathcal{U}_i$, $\mathcal{V}_j$ の性質と関係.

1°. 包含関係.

(3.1). 次の実線の部分の包含関係が成立することは明らか.

$$
\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{U}_1 & \subsetneqq & \mathcal{U}_2 & \underset{(3.5)}{\subset} & \mathcal{U}_3 & \subset & \mathcal{U}_4 \\
\vdots\ (3.2) & & \cap\ (3.3) & & \cap\ (3.4) & \swarrow\ (3.6) & \\
\mathcal{V}_F & \subsetneqq & \mathcal{V}_S & \subset & \mathcal{V}_\Omega & & \\
 & \nearrow\ (3.7) & \cap & & \cap & & \\
\mathcal{V}_A & & \mathcal{V}_S^* & \subset & \mathcal{V}_\Omega^* & &
\end{array}
$$

(3.1). $\mathcal{U}_1(\mathcal{D})$ や $\mathcal{U}_1(\mathcal{X})$ は non-empty である. 実際, gradient flow や gradient flow の time-1-map を考えればよい.

(3.2). (Palis, Smale [1]). M が compact で $1 \leqq r \leqq \infty$ ならば $\mathcal{U}_1^r = \mathcal{V}_F^r$.

(3.3). (Robbin [11]). M を compact, $r \geqq 2$ とするとき $\mathcal{U}_2^r(\mathcal{D}) \subset \mathcal{V}_S^r(\mathcal{D})$.

(3.4). (Smale [1]). M を compact $1 \leqq r < \infty$ とするとき, $\mathcal{U}_3^r(\mathcal{D}) \subset \mathcal{V}_\Omega^r(\mathcal{D})$.

(3.4'). (Pugh, Shub [10]). M を compact $1 \leqq r$ とするとき, $\mathcal{U}_3^r(\mathcal{X}) \subset \mathcal{V}_\Omega^r(\mathcal{X})$.

(3.5). (Palis [1]). M を compact $1 \leqq r$ とするとき $f \in \mathcal{D}^r(M)$ が Axiom A をみたし Ω-stable ならば $\Omega(f)$ は no cycle property を持つ. 従って (3.3) を使えば $2 \leqq r$ で $\mathcal{U}_\Omega^r(\mathcal{D}) \subset \mathcal{U}_3^r(\mathcal{D})$ が成立することが分る. ($r = 1$ でも証明できる.)

(3.6). (Franks [2]). $r = 1$ のとき, $\mathcal{V}_\Omega^1(\mathcal{D}) \subset \mathcal{U}_4^1(\mathcal{D})$.

(3.6'). $\mathcal{V}_\Omega^1(\mathcal{X}) \subset \mathcal{U}_4^1(\mathcal{X})$ も証明できる.

(3.7). ([0], [5]). $\mathcal{V}_A^r(\mathcal{D}) \subset \mathcal{V}_S^r(\mathcal{D})$, $r \geqq 1$.

2°. Openness.

(3.8). (i) $\mathcal{V}_F$, $\mathcal{V}_S$, $\mathcal{V}_\Omega$, $\mathcal{V}_S^*$, $\mathcal{V}_\Omega^*$ は Dyn(M) の中で open. 従って $\mathcal{U}_1$ も open. (ii) 従って $\mathcal{U}_3$, $\mathcal{V}_\Omega$ は $\mathcal{U}_4$ の内点 int $\mathcal{U}_4$ に含まれる.

(iii) $\mathcal{V}_A^r(\mathcal{D})$ は $\mathcal{D}^r(M)$ の open subset ([0], [5]), $r \geqq 1$.

(3.9) 定理. $\mathcal{V}_s^* - \mathcal{V}_s$, $\mathcal{V}_\Omega^* - \mathcal{V}_\Omega$ は $Dyn(M)$ の open subset である.

証明. $f \in \mathcal{V}_s^* - \mathcal{V}_s$ とする. f の近傍 U が存在して, $\forall g \in U$ に対して $f \simeq g$. $\exists g \in U$, $f \simeq g$ であるが $f \nsim g$. $g \gtrsim f$ より f は structurally stable でない. $\forall h \in U$ に対し $f \gtrsim h$ であるから h は structurally stable ではない. $\mathcal{V}_\Omega^* - \mathcal{V}_\Omega$ についても同様.

3°. Density.

$Dyn(M)$ のある Baire set に対して成立するような性質を generic property という.

(3.10). (Kupka-Smale theorem [4], [13]). 次の性質は generic.

(i) 全ての periodic point; singular point, closed orbit は hyperbolic.

(ii) 全ての periodic point; singular point, closed orbit の W^s, W^u は互に transversally に交わる.

(注意) Kupka, Smale は M が compact のときを証明し, Peixoto [8] は M が noncompact のとき $\mathcal{X}^r(M)$ について証明した. しかし, M が noncompact のとき $\mathcal{D}^r(M)$ についても証明できる.

(3.11) [6]. $M = S^1$ のとき $\mathcal{V}_s^r(\mathcal{D})$ は $\mathcal{D}^r(S^1)$ の dense subset, $1 \leqq r \leqq \infty$.

◎ $M = R$ のときは任意の $\mathcal{V}_s(\mathcal{D})$ は $\mathcal{D}(R)$ の中で

denseである事は簡単に証明できる.(白岩).

(3.12). (Peixoto [7]). M^2がcompact 2次元manifold のとき $\mathcal{U}_s^r(\mathcal{X})$ は $\mathcal{X}^r(M^2)$ のdense subsetである, $1 \leq r \leq \infty$.

(3.13) (Peixoto, Pugh [9]). Mが2次元以上でnoncompactのとき $\mathcal{U}_s^r(\mathcal{X})$ は $\mathcal{X}^r(M)$ の中でdense ではない, $1 \leq r \leq \infty$.

(3.14). 特殊なmanifold に関する $\mathcal{U}_s$ の nondensity.

(1) (Smale [14]) $cl\,\mathcal{U}_s^r(\mathcal{D}) \neq \mathcal{D}^r(T^3)$, 但し cl は closure を, $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$ を示す. ある compact 4-manifold M^4が存在して $cl\,\mathcal{U}_s^r(\mathcal{X}) \neq \mathcal{X}^r(M^4)$, $1 \leq r \leq \infty$.

(2) (Williams [1]). $cl\,\mathcal{U}_s^r(\mathcal{D}) \neq \mathcal{D}^r(T^2)$, $\exists$ compact M^3, $cl\,\mathcal{U}_s^r(\mathcal{X}) \neq \mathcal{X}^r(M^3)$, $1 \leq r \leq \infty$.

(3) (Newhouse [1]). $cl\,\mathcal{U}_s^r(\mathcal{D}) \neq \mathcal{D}^r(S^2)$, $2 \leq r \leq \infty$. (この論文の中で $cl\,\mathcal{U}_\Omega^r(\mathcal{D}) \neq \mathcal{D}^r(S^2)$ も成立すると注意しているが証明は書かれていない.— 証明は大変に複雑であるとN.氏は云っている.)

(注意) (1), (2) はもっと強い意味での structurally stable の non-density を証明しているが, Kupka-Smaleの定理を使えば, これ等の construction はそのまま我々の structurally stable の意味でも non-density を示していることが分る.

(3.15) 特殊なmanifoldに関する $\mathcal{U}_\Omega$ の non-density (従って $\mathcal{U}_s$ の nondensity).

(1). (Abraham-Smale [1]) $cl\,\mathcal{U}_\Omega^r(\mathcal{D}) \neq \mathcal{D}^r(T^2 \times S^2)$, $1 \leq r \leq \infty$.

(2) (Hirsch, Pugh, Shub [3]). $\mathcal{D}^r(T^4)$ の中に nonempty open set が存在してその中の diffeomorphism は topologically transitive であるが Ω-stable ではない, $1 \leqq r < \infty$.

(3) (Simon [12]) $1 \leqq r \leqq \infty$ とする. (i) $f \in \mathcal{D}(M)$ に対し $N_n(f) = (f^n$ の fixed point の箇数$)$ とする. $\mathcal{D}^r(T^3)$ の中に次のような open set U が存在する. $f \in U$ ならば f の任意の近傍 V に対して $g \in V$ と $n \in Z_+$ が存在して $N_n(f) \neq N_n(g)$ をみたす. (従って U の元は Ω-stable でない). (ii) 次のような countable set $\{h_j\} \subset \mathcal{D}^r(T^3)$ と Baire subset $B \subset \mathcal{D}^r(T^3)$ は存在しない; すなはち, B の中の任意の f はどれか1つの h_j と Ω-equivalent である. (即ち Baire subset を探してその中で Ω-equivalence を分類することは不可能である.)

(3.16) <u>定理</u> (i) S^1 上では $\mathcal{V}_\Omega^*(\mathcal{D}) = \mathcal{V}_\Omega(\mathcal{D})$, $\mathcal{V}_S^*(\mathcal{D}) = \mathcal{V}_S(\mathcal{D})$.
(ii) compact 2-manifold 上では $\mathcal{V}_\Omega^*(\mathcal{X}) = \mathcal{V}_\Omega(\mathcal{X})$, $\mathcal{V}_S^*(\mathcal{X}) = \mathcal{V}_S(\mathcal{X})$.

証明. (3.9) により $\mathcal{V}_\Omega^* - \mathcal{V}_\Omega$, $\mathcal{V}_S^* - \mathcal{V}_S$ は openset. 一方 (3.11), (3.12) により $\mathcal{V}_S$ は $Dyn(M)$ の中の dense subset, 従って $\mathcal{V}_\Omega$ も dense subset であるから定理は明らか.

(3.17) <u>定理</u>. 任意の2次元以上の manifold M と任意の $2 \leqq r < \infty$ に対して $\mathcal{V}_S^r(\mathcal{D})$ は $\mathcal{D}^r(M)$ の dense subset ではない.

証明(略). (3.14)(3)の中でNewhouseが作っているdiffeomorphism $f: R^2 \to R^2$を使う. fは$\mathcal{D}^r(R^2)$の中にstructurally stableでないようなものから成る近傍を持つ. $R^2 \subset M$と考えてfはisotopic to identityである事に注目して, よく使われる定理であるasymptotically stable invariant manifold theoremの条件をみたすようにfを$F: M \to M$に拡張する. 即ちR^2のまわりのMの点はFにより十分速くR^2に近付くようにする. このようなFのperturbation GはR^2の近くにinvariant manifold R^2_GでRとdiffeomorphicなものを持つ. $G \mapsto R^2_G$の連続性やKupka-Smaleの定理を使う議論をすることにより(3.17)は証明される.

(3.18) <u>定理</u> 任意の3次元以上のmanifold Mと任意の$2 \leq r < \infty$に対して$\mathcal{V}_S^r(\mathcal{X})$は$\mathcal{X}^r(M)$のdense subsetではない.

証明(略). $\dim M = n$とするとき, (3.17)を$(n-1)$-disk D^{n-1}に適用してstructurally stableなものから成る近傍を持つ$f: D^{n-1} \to D^{n-1}$を得る. 次にsuspensionを使って$D^{n-1} \times S^1$上のflow φを得る. $D^{n-1} \times S^1 \subset M^n$と考えて$\varphi$を$M$上のflow ψに拡張する. ψの作り方とKupka-Smaleの定理を使ってψの近傍でstructurally unstableであるものからなるものを得る.

(3.19) <u>定理</u>. 任意の2次元以上のmanifoldと任意の $2 \leqq r < \infty$ に対して $\mathcal{U}_4^r(\mathcal{D})$ の内点の集合は $\mathcal{D}^r(M)$ の真部分集合である.

(3.20) <u>定理</u>. 任意の3次元以上のmanifoldと任意の $2 \leqq r < \infty$ に対して $\mathcal{U}_4^r(\mathcal{X})$ の内点の集合は $\mathcal{X}^r(M)$ の真部分集合である.

証明は各々(3.17), (3.18)のconstructionをそのまま使い,「periodic point x に対し $W_f^s(x)$ と $W_f^u(x)$ が接するならば f のperturbation g が存在して g は x のいくらでも近くにhyperbolicでないperiodic pointを持つようにできる」ことを証明することによってなされる.

(3.21) <u>定理</u>. M をcompact, $1 \leqq r \leqq \infty$ とするとき $\mathcal{V}_s^{*r}(M) \subset \mathcal{U}_4^r(\mathcal{D})$ である.

(3.22) <u>定理</u>. M をcompact, $1 \leqq r \leqq \infty$ とするとき $\mathcal{V}_s^{*r}(M) \subset \mathcal{U}_4^r(\mathcal{X})$ である.

(3.19)と(3.21), (3.20)と(3.22)から次の定理(3.23), (3.24)を得る.

(3.23) <u>定理</u>. 任意のcompactな2次元以上のmanifold M と

$2 \leqq r < \infty$ に対して，$\mathcal{V}_s^{*r}(\mathcal{D})$ は $\mathcal{D}^r(M)$ の真部分集合である．

(3.24) 定理．任意の compact な 3 次元以上の manifold M と $2 \leqq r < \infty$ に対して，$\mathcal{V}_s^{*r}(\mathcal{X})$ は $\mathcal{X}^r(M)$ の真部分集合である．

(3.21), (3.2) を使って次も証明できる．

(3.25) 定理．f を compact manifold M 上の diffeomorphism とする．又 $\Omega(f)$ が finite set とする．このとき f が weakly stable ならば f は structurally stable である．

References

[0] D.V. Anosov, Geodesic flows on compact Rieman manifolds of negative curvature, Proc. Steklov Math Inst., 90 (1967).

[1] Global Analysis, Proc. Symp. Pure Math. vol. 14, AMS, 1970 (Proceedings of the Summer Inst. on Glob. Ana., Berkely.)

[2] J. Franks, Necessary condition for stability of diffeomorphisms, Trans. AMS. Vol. 158 (1971), 301-308.

[3] Hirsch, Pugh and Shub, Invariant manifolds, Bull. AMS. vol. 76 (1970), 1015-1019.

[4] I. Kupka, Contribution à la théorie des champs géné-

riques, Contributions Diff. Eq. vol. 2 (1963), 457-484, vol. 3 (1964), 411-420.

[5] J. Moser, On a theorem of Anosov, J. Diff. Eq. vol. 5 (1969), 411-440.

[6] Z. Nitecki, Differentiable Dynamics, M.I.T. Press, (1971).

[7] M.M. Peixoto, Structural stability on two-dimensional manifolds, Topology vol. 1 (1962), 101-120.

[8] ——, On approximation theorem of Kupka and Smale, J. Diff. Eq. vol. 3 (1966), 214-227.

[9] Peixoto and Pugh, Structurally stable systems on open manif. are never dense, Ann. of Math. vol. 87 (1968), 423-430.

[10] Puch and Shub, The Ω-stability theorem for flows, Invent. Math. vol. 11 (1970), 150-158.

[11] J.W. Robbin, A structural stability theorem, Ann. of Math. vol. 94 (1971), 447-493.

[12] C.P. Simon, On a classification of a Baire set ···, Bull. AMS. vol. 77 (1971), 783-787.

[13] S. Smale, Stable manif. for diff. eq. ···, Ann. Scuola Normale 18 (1963).

[14] —, Structurally stable systems are not dense, Ann. J. Math. vol. 88 (1966), 491-496.

[15] —, Diff. Dynamical Systems, Bull. AMS. 73 (1967), 747-817.