数理解析研究所講究録
第 173 巻 1973 年 89-97

エルゴード理論と Transversal Commutation Relation

津田塾大　小和田　正

§1. 序

エルゴード理論の永い歴史の眠りに対して、Ya.G.Sinaiは一つの目覚ましい光を与えた。即ち、いわゆる撞球問題のエルゴード性を証明した（実はもっと強い性質をもつことを示したのであるが）。この事に関しては、本講究録の久保氏の報告に精しいので、本稿に於いては重複を避けるが、Sinaiによるこの著明な結果に使われている基本的アイデアの一つにTransverse fieldがある。この用語と概念を明確に用いたのはSinaiを嚆矢とするように思われるが、Sinaiに先立つもう一つの著しい結果――負の定曲率をもつ多様体上のgeodesic flowがエルゴード的であることを証示したE.Hopfの結果に於いてもTransverse fieldのアイデアの原形が使われていることが知られるのである。更に歴史的にさかのぼってみると、S.Lieが或る種の

常微分方程式の積分因子を求めるのに、Transverse に相当するideaを使っていることがうかゞい知られる。

この様に Transverse field の概念は古くから有効に使われ来たったのであるが、Sinai は撞球問題 にひきつゞき 一般な可測な流れが K-flow であることを、Transverse flows を用いて判定する方法を提示した。

以下に於いて、Transverse を 一つの交換関係として定式化し、そのエルゴード理論への応用について述べてみたい。精細については文献[3]を参照していたゞきたい。

§2. 定義

応用に際して当面する状況の多様性にそなえて、Transversal Commutation Relation (以下 T.C.R と略記)を次のように、少し漠然と定義しておく。

G_1, G_2 を 二つの群とし、X を適当な空間とする。X上の、G_1, G_2 の元をパラメーターに持つ二つの変換群 $\{T_g ; g \in G_1\}$ と $\{Z_h ; h \in G_2\}$ とが 交換関係

$$T_g Z_h = Z_{\tau_g(h)} T_g$$

をみたすとき、$\{Z_h\}$ は $\{T_g\}$ の transversal group であるという。上の交換関係を T.C.R. と呼ぶ。但し τ_g は、各 $g \in G_1$ に対して、G_2 上の isomorphism である。

空間 X は n-space, Hilbert空間, 又は 色々な確率空間を考えることが多い。又 G_1は 整数全体 又は 実数全体 R, G_2 は R^n であることが多い。

T.C.R. からすぐわかることであるが、各 T_g は $\{Z_h\}$ による $x \in X$ の 軌道, $\{Z_h x ; h \in G_2\}$ を他の 軌道 $\{Z_h T_g x ; h \in G_2\}$ に変換する。この事は 本質的である。ざっぱくにいえば、$\{Z_h\}$ は 座標系のような役目を果し $\{T_g\}$についての情報を与えてくれるし、$\{Z_h\}$を調らべるのに、「その上の」変換達 $\{T_g\}$ が $\{Z_h\}$についての情報を与えてくれるのである。Sinai の撞球問題 のアイデアは前者のパターンに属すもの と云えよう。我々もかゝる立場から トーラス上の群自己同型の同型問題を考える。又後者の見地から可測な流れ $\{Z_h ; h \in R\}$ を調らべる。

§3 エルゴード理論 のいくつかの問題と T.C.R.

以下に於いて、T.C.R.とエルゴード理論の 二,三の問題 とのかゝわり方について述べる。

[1] Spectral type of flow

$J = (\Omega, \mathcal{B}, P, T_t)$ を flow とした時, J の

スペクトル型とは $\mathcal{L}^2(\Omega, P)$ 上に T が induce する unitary operators の 1-parameter group $\{U_t\}$ の スペクトル型を云う。 H を a separable Hilbert space, U を H 上の unitary operator 又に $\{V_s\}$ を 1-parameter group of unitary operators on H であり T.C.R をみたすものとする。即ち $X = H$, $G_1 =$ 整数全体, $G_2 = R$, $\tau_n(t) = \lambda^n t$, $n \in G_1$, $t \in R$ 且 λは $|\lambda| \neq 1$ なる実数 で

$$U_n V_t = V_{\lambda^n t} U_n, \qquad -(*)$$

$U_n = U^n$ となっているものとする。 この時

定理1. U に対し上記の関係(*)をみたす $\{V_s\}$ が存在すれば U は σ-Lebesgue スペクトル をもつ。

同様に H 上の 1-parameter group of unitary operators $\{U_t\}$ についても その transversal group が存在することから次の結果が得られる。

定理2 H 上の 1-parameter group of unitary operators $\{U_t\}$ に対して T.C.R.

$$U_t V_s = V_{s e^{\lambda t}} U_t \qquad \lambda \neq 0$$

をみたす 1-parameter group of unitary operators $\{V_s\}$ が存在すれば $\{U_t\}$ は uniform Lebesgue スペクトルをもつ。

上の二つの定理を利用すれば、ロバチェフスキー平面上の geodesic flow が σ-Lebesgue スペクトル をもつことが容易にわかる。この結果は Gelfand-Fomin によって automorphic function theory 及び $SL(2, R)$ の既約表現を使うことによって示されている。我々の方法は、純粋に簡単な operators の計算みによっている。

[II] 群自己同型の同型問題

M_n を n-次元トーラス、A を群 M_n 上の自己同型とする。P を M_n 上の正規化された Haar measure とし、A は P-不変とすれば A は unimodular integral matrix と同一して良い。A の行列が実固有値 λ をもつ場合、λ に対応する固有ベクトル γ を用い

$$g_t = t\gamma \pmod 1$$

とおけば $\{g_t\}$ は M_n の 1-parameter subgroup となり flow $\{Z_t\}$; $Z_t g = g + g_t$ $\quad g \in M_n$ は T.C.R.

$$AZ_t = Z_{\lambda t} A$$

をみたす。更に一般に任意の A に対して、m-parameter subgroup $\{g_t; t \in R^m\} \subset M_n$ が存在し、m-parameter flow $\{Z_t ; t \in R^m\}$; $Z_t g = g + g_t$

は、或る正則な $m \times m$ 行列 T があって T.C.R.

$$AZ_t = Z_{Tt}A$$

をみたし $\{Z_t\}$ は ergodic ~~であ~~で離散スペクトルをもつようにできる。これを用いて

定理3. M_n 上の群自己同型 A_1 及び A_2 に対して

1) $A_i Z_\lambda^{(i)} = Z_{T\lambda}^{(i)} A_i$ $\quad i=1,2$.

2) $\{Z_\lambda^{(i)}\}$ は ergodic で離散スペクトルをもち、$\{Z_\lambda^{(1)}\}$ と $\{Z_\lambda^{(2)}\}$ はスペクトル同値

をみたす多次元パラメーターの flow $\{Z_\lambda^{(i)}\}$ $i=1,2$ が存在することが A_1 と A_2 とが metrically isomorphic である為の必要十分条件である。

群自己同型に関する同型問題は R L Adler and B Weiss においてエントロピーが完全不変量であることが示されているが、我々の方法の利点は同型対応の ~~対応の仕方~~ 構造がわかりやすい点にある。しかるに我々の不変量である transversal group $\{Z_\lambda\}$ の構成は必しも容易ではない。

[III] Time change of flow

与えられた可測な flow を time change した時、その性質は ~~ぬ~~ どのように変るかという問題を考える。

$\mathcal{T}=(\Omega,\mathcal{B},P,T_t)$ を Standard space $(\Omega,\mathcal{B})$ 上の可測な流れ，$\tau(t,\omega)$ を time change function of $\mathcal{T}$ とした時，$S_t\omega=T_{\tau(t,\omega)}\omega$ で定義される両可測な変換群 $\{S_t\}$ が不変測度 μ をもち 流れ $\mathcal{S}=(\Omega,\mathcal{B},\mu,S_t)$ が $\mathcal{T}$ と同型写像 σ によつて同型であるとしよう。即ち

$$\sigma T_t\sigma^{-1}\omega=S_t\omega=T_{\tau(t,\omega)}\omega \qquad \omega\in\Omega$$

という交換関係が成立するものとする。この事は isomorphism σ と $\{T_t\}$ とが T.C.R をみたしていることを意味する。~~従って~~ 逆に $\{T_t\}$ と T.C.R をみたす両可測な変換 σ ~~が~~ があれば

$$\sigma T_t\sigma^{-1}\omega=S_t\omega$$

$$\mu(\sigma E)=P(E)\ ,\ E\in\mathcal{B}$$

によつて流れ $\mathcal{S}=(\Omega,\mathcal{B},\mu,S_t)$ を定義すれば，$\mathcal{S}$ は $\mathcal{T}$ と同型な流れであり $S_t\omega=T_{\tau(t,\omega)}\omega$ for some $\tau=\tau(t,\omega)$ となることから $\mathcal{S}$ は $\mathcal{T}$ の time changed flow になる。従つて $\mathcal{T}$ ~~の~~ の time changed flows で $\mathcal{T}$ と同型になる flows の class を決定する問題は $\{T_t\}$ と T.C.R をみたす両可測な変換達を決定することに帰着される。このような問題設定で たとえば 次の結果を得る。

定理4　$\mathcal{T}=(\Omega,\mathcal{B},P,T_t)$ を 2-次元トーラス Ω 上の微分方程式　$dx/dt=1$, $dy/dt=\gamma$　(γ は無理数)によって定義される流れとし、$\mathcal{S}=(\Omega,\mathcal{B},P,S_t)$ を

$$dx/dt = 1/K(x,y), \quad dy/dt = \gamma/K(x,y)$$

によって定義される流れとしたとき、もし γ に対し

$$|n\gamma+m| > L/(|n|+|m|)^H$$

が全ての整数 n, m について成立するような正数 L と H が存在すれば、$K(x,y)\in C^{(k)}$ なる関数について $\mathcal{S}$ は $\mathcal{T}$ と同型である。

文献

[1] R. L. Adler and B. Weiss : Entropy, a complete metric invariant for automorphisms of the torus, Proc. of N.A.S. of U.S.A., vol. 57, No. 6 (1967)

[2] I. M. Gelfand and S. V. Fomin : A geodesic flow on manifold of constant negative curvature, Uspehi Math. Nauk, t. VII, b. 1 (1952)

[3] M. Kowada : Transversal Commutation Relation and its Applications to Ergodic Theory, Seminar on Probability vol 36

[4] I. Kubo : 撞球問題, Seminar on Probability vol 37

[5] Ya.G. Sinai; Dynamical systems with countable Lebesgue spectrum II, Izv. AN. SSSR, 30(1966) (in Russian)