数理解析研究所講究録
第 174 巻 1973 年 1-20

弾性球gasのBoltzmann方程式
――Povznerの結果の別証明――

広島大 理　田中 洋

§1. 序

非常に多くの個数の分子から成る稀薄気体を考える．各分子は直径δの弾性球(同一種類)であるとし，外力はないとする．分子の総数をNとし，時刻tにおいて速度がdxの範囲($\subset R^3$)にある分子の数を$Nu(t,x)dx$とするとBoltzmann方程式は

$$(0)\quad \frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=\frac{1}{2}N\delta^2\int_{S^2\times R^3}|(y-x,l)|\{u(t,x^*)u(t,y^*)-u(t,x)u(t,y)\}dl\,dy$$

で与えられる．ここにS^2は原点を中心とする半径1の球面でdlはその上の一様分布である．また

$$x^*=x+(y-x,l)l,\quad y^*=y-(y-x,l)l,\quad l\in S^2.$$

(例えば [3] または [4] 参照)．数学的研究の際には，右辺における定数$\frac{1}{2}N\delta^2$を1でおきかえても一般性を失わない．そこで以下では次の方程式を考えることにする．

$$(1)\quad \frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=\int_{S^2\times R^3}|(y-x,l)|\{u(t,x^*)u(t,y^*)-u(t,x)u(t,y)\}dl\,dy.$$

(0)または(1)が弾性球gasのBoltzmann方程式である．この方程式の解の存在と一意性に関しては，主にCarleman[1]およびPovzner[2]により研究されている．Carlemanは解の存在・一意性ばかりでなく，解の$t \to \infty$における行動についても研究している．さらに最近，intermolecular potentialが$\mathrm{const.}\, r^{-s}$，$s > 4$，の場合(ただしcut-off)にもCarlemanと同様の結果が得られている([6])．

注意：(0)，(1)はuが位置に無関係であるのでspatially homogeneousの場合である．一般には，外力$F(\xi)$もあり，uも位置ξに関係しており，方程式は

$$\frac{\partial u(t,\xi,x)}{\partial t} + (x, \nabla_\xi u) + (F(\xi), \nabla_x u)$$
$$= \int_{S^2 \times R^3} |(y-x, l)| \{u(t,\xi,x^*)u(t,\xi,y^*) - u(t,\xi,x)u(t,\xi,y)\} \, dl\, dy$$

となる．Povzner[2]は"modified" spatially inhomogeneousの場合を取扱っているが，それは上の意味でのspatially inhomogeneousの場合ではない．

この報告では方程式(1)(= spatially homogeneous)に対する解の存在と一意性に関するPovznerの結果について述べる．証明の大筋はPovznerのに類似しているが，必要な評価を得る細部の方法はかなり異なる．とくにPovznerが折線近似を行っているのに対し，ここではWild's sumを有効に用い

3．定理DはPovzner [2] にはない．この定理は，McKean [5] が導入したタイプのマルコフ過程が対応していることを示す．

方程式 (1) は容易に測度に関する方程式に書きかえることが出来る．$u(t,\Gamma)=\int_\Gamma u(t,x)dx$，$\Gamma\in\mathcal{B}(R^3)$，とおくと簡単な計算により

$$(2)\quad \frac{\partial u(t,\Gamma)}{\partial t}=\int_{S^2\times R^3\times R^3}|(y-x,l)|\{\delta(x^*,\Gamma)-\delta(x,\Gamma)\}dl\,u(t,dx)\,u(t,dy),$$

あるいは

$$(3)\quad \frac{\partial u(t,\varphi)}{\partial t}=\int_{S^2\times R^3\times R^3}|(y-x,l)|\{\varphi(x^*)-\varphi(x)\}dl\,u(t,dx)u(t,dy).$$

ここに φ は R^3 上の有界連続な実数値関数全体 $C_b(R^3)$ にわたるものとし，$u(t,\varphi)=\int\varphi(x)u(t,dx)$ である．さらに (3) は次と同等であることが容易にわかる．

$$(4)\quad \frac{\partial u(t,\varphi)}{\partial t}=\int_{S^2\times R^3\times R^3}|(y-x,l)|\left\{\frac{\varphi(x^*)+\varphi(y^*)}{2}-\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}\right\}dl\,u(t,dx)u(t,dy)$$

問題は，R^3 上の確率分布 f を与えたときそれを初期分布とする (3)(=(4)) の解 $u(t,\cdot)$ を求めることである．以下次のような用語を用いる．

質量保存：$\int f(dx)=\int u(t,dx)$

運動量保存：$\int x f(dx)=\int x\,u(t,dx)$

エネルギー保存：$\int|x|^2f(dx)=\int|x|^2u(t,dx)$.

結果の概略は次の通りである．

<u>定理A</u>　f を R^3 上の確率分布とし，$\sigma^2=\int|x|^2 f(dx)<\infty$ とする．このとき f を初期分布とする(3)(＝(4))の解で，質量と運動量を保存するものが存在する．

<u>定理B</u>　f を R^3 上の確率分布とし，ある $\alpha\geqq 3$ に対して

$$\mu=\int|x|^\alpha f(dx)<\infty$$

とする．このとき f を初期分布とする(3)の解 $u(t,\cdot)$ で

$$\mu(t)=\int|x|^\alpha u(t,dx)$$

が局所有界であるようなものが存在する．この様な解に対しては，質量，運動量，エネルギーが保存される．

<u>定理C</u>　f を R^3 上の確率分布で，$\int|x|^4 f(dx)<\infty$ をみたすものとする．このとき f を初期分布とする(3)の解 $u(t,\cdot)$ で

$$\mu(t)=\int|x|^4 u(t,dx)$$

が局所有界となるようなものは唯一つである（存在は定理Bによる）．f が density をもてば $u(t,\cdot)$ も density をもつ．さらに次のことが成立する．　$\sigma^2=\int|x|^2 f(dx)$ とし

$$\begin{cases}\tilde{f}(dx)=\dfrac{1+|x|^2}{1+\sigma^2}f(dx)\\[2ex]\tilde{u}(t,dx)=\dfrac{1+|x|^2}{1+\sigma^2}u(t,dx)\end{cases}$$

とおくと，$\tilde{u}(t,\cdot)$ は $\tilde{f}$ を初期分布とする次の方程式(5)の唯一つの解である．

$$(5)\quad \frac{\partial \tilde{u}(t,\varphi)}{\partial t} = (1+\sigma^2)\int_{R^3\times R^3} (1+|x|^2)\{\tilde{\pi}(x,y,\varphi)-\varphi(x)\}\,\tilde{u}(t,dx)\,\tilde{u}(t,dy)$$

ただし

$$\tilde{\pi}(x,y,\varphi) = \int \tilde{\pi}(x,y,dz)\,\varphi(z)$$

$$(6)\quad \begin{cases} \tilde{\pi}(x,y,\Gamma) = \left(1+\dfrac{|x|^2+|y|^2}{2}\right)^{-1} \displaystyle\int_{\Gamma} (1+|z|^2)\,\pi(x,y,dz) \\[2ex] \pi(x,y,\Gamma) = \dfrac{1}{2}\{\delta(x,\Gamma)+\delta(y,\Gamma)\} \\[2ex] \quad + \dfrac{1}{(1+|x|^2)(1+|y|^2)} \displaystyle\int_{S^2} |(y-x,\ell)|\left\{\dfrac{\delta(x^*,\Gamma)+\delta(y^*,\Gamma)}{2} - \dfrac{\delta(x,\Gamma)+\delta(y,\Gamma)}{2}\right\} d\ell \end{cases}$$

<u>定理 D</u>（推移関数の存在）．f を R^3 上の確率分布とし，$\int |x|^4 f(dx) < \infty$ とする．また f を初期分布とする (3) の unique solution を $u(t,\cdot)$ とする．このとき，各 $z \in R^3$ に対して

$$\frac{\partial v(t,\varphi)}{\partial t} = \int_{S^2\times R^3\times R^3} |(y-x,\ell)|\{\varphi(x^*)-\varphi(x)\}\,d\ell\, v(t,dx)\,u(t,dy)$$

の解 $v(t,\cdot)$ で初期分布が $\delta(z,\cdot)$ であるようなものが unique に存在する．これを $P_f(t,z,\cdot)$ で表わすことにすると，次のことが成立する．

(a) $P_f(t,x,\cdot)$ は R^3 上の確率測度である．

(b) $u(t,\Gamma) = \int_{R^3} P_f(t,x,\Gamma) f(dx)$

(c) $P_f(t+s,x,\Gamma) = \int_{R^3} P_f(t,x,dy)\,P_{u(t)}(s,y,\Gamma)$.

§2. 定理A, Bの証明.

$N=1,2,\cdots$ に対して $g_N(x,y,l)=\min\{|(y-x,l)|,N\}$ とおき，次の方程式を考える．

$$(7)\quad \frac{\partial u(t,\Gamma)}{\partial t}=\int_{S^2\times R^3\times R^3} g_N(x,y,l)\left\{\frac{\delta(x^*,\Gamma)+\delta(y^*,\Gamma)}{2}-\frac{\delta(x,\Gamma)+\delta(y,\Gamma)}{2}\right\}dl\,u(t,dx)u(t,dy)$$

いま

$$\Pi_N(x,y,\Gamma)=\frac{1}{2}\{\delta(x,\Gamma)+\delta(y,\Gamma)\}$$
$$+\frac{1}{N}\int_{S^2} g_N(x,y,l)\left\{\frac{\delta(x^*,\Gamma)+\delta(y^*,\Gamma)}{2}-\frac{\delta(x,\Gamma)+\delta(y,\Gamma)}{2}\right\}dl$$

とおくと，Π_N は x，y を固定したとき，Γ につき確率測度になっている．(7)は

$$\frac{\partial u(t,\Gamma)}{\partial t}=N\int_{R^3\times R^3}\left\{\Pi_N(x,y,\Gamma)-\frac{\delta(x,\Gamma)+\delta(y,\Gamma)}{2}\right\}u(t,dx)u(t,dy)$$

と同等であり，これはさらに

$$(8)\quad \frac{\partial u(t,\Gamma)}{\partial t}=N\int_{R^3\times R^3}\{\Pi_N(x,y,\Gamma)-\delta(x,\Gamma)\}u(t,dx)u(t,dy)$$

と同等である．f を初期分布とする(8)（したがって(7)）の解は

$$(9)\quad u_N(t,\cdot)=e^{-Nt}\sum_{n=1}^{\infty}(1-e^{-Nt})^{n-1}\sum_{\tau\in T_n}|\tau|f_{N,\tau}$$

で与えられる．ここに記号 τ，$|\tau|$ 等の意味は次の通りである．先ず集合 T_1，T_2，$\cdots$ を次のように定義する：T_1 は唯一

つの要素（これを e と書く）から成る集合とし，$T_1, \cdots, T_{n-1}$ が定義されたとき

$$T_n = \{\tau = (\tau_1, \tau_2) : \tau_1 \in T_{n_1}, \tau_2 \in T_{n_2}, n_1 + n_2 = n\}$$

と定義する．そして τ の weight $|\tau|$ および $f_{N,\tau}$ は次で定める．

(i) $|e| = 1$, $f_{N,e} = f$

(ii) $\tau = (\tau_1, \tau_2) \in T_n$ のとき，$|\tau| = \dfrac{|\tau_1||\tau_2|}{n-1}$

$$f_{N,\tau} = \int_{R^3 \times R^3} \Pi_N(x, y, \cdot) f_{N,\tau_1}(dx) f_{N,\tau_2}(dy).$$

(9) がいわゆる Wild's sum である．この式を用いて，$u_N(t,\cdot)$ が質量，運動量，エネルギーを保存することが容易に示される．したがって

$$\int_{S^2 \times R^3 \times R^3} g_N(x, y, \ell)\, d\ell\, u_N(t, dx)\, u_N(t, dy)$$

は $t \geq 0$, $N = 1, 2, \cdots$ につき有界である．よって次の3つのことが従う．

(a) 各 $u_N(t,\cdot)$ は R^3 上の確率測度である．

(b) $\int |x|^2 u_N(t, dx) = \sigma^2$, $\int x\, u_N(t, dx) = \int x f(dx)$.

(c) N に無関係なある定数 K があって，任意の $\varphi \in C_b(R^3)$ に対して $|u_N(t, \varphi) - u_N(s, \varphi)| \leq K \cdot \|\varphi\| \cdot |t - s|$.

($\|\varphi\|$ は φ の supremum norm).

これらのことから $\{u_N(t,\cdot)\}_{N \geq 1}$ の適当な部分列 $\{u_{N_k}(t,\cdot)\}_{k \geq 1}$

をえらんで，各 $t \geqq 0$ に対して $k \to \infty$ のとき R^3 上のある確率分布 $u(t,\cdot)$ に収束させることが出来る．この $u(t,\cdot)$ が (3) の解であることは次のようにしてわかる．

$$U_N(t,\varphi) - f(\varphi) = \int_0^t ds \int_{S^2\times R^3\times R^3} \mathscr{b}_N(x,y,l)\{\varphi(x^*)-\varphi(x)\}\, dl\, U_N(s,dx) U_N(s,dy)$$

において，N を $N_1 < N_2 < N_3 < \cdots$ に沿って $\uparrow \infty$ とすると

$$u(t,\varphi) - f(\varphi) = \int_0^t ds \int_{S^2\times R^3\times R^3} |(y-x,l)|\{\varphi(x^*)-\varphi(x)\}\, dl\, u(s,dx) u(s,dy)$$

を得る．即ち $u(t,\cdot)$ は (3) の解である．これが質量，運動量を保存することは (b) より明らかである．

定理 B は 4 段階に分けて証明する．

補題 1　$s \geq 2$ に対して定数 β_s が存在して，任意の $a, b \geq 0$ に対して

$$0 \leq (a^2+b^2)^{\frac{s}{2}} - (a^s+b^s) \leq \beta_s (a^{s-2}b^2 + a^2 b^{s-2})$$

が成立する．

補題 2　$x, y \in R^3$ に対して

$$|x^*|^s + |y^*|^s - (|x|^s + |y|^s) \leq \beta_s (|x|^{s-2}|y|^2 + |x|^2|y|^{s-2})$$

が成立する．ただし $s \geq 2$ で β_s は補題 1 におけるものと同じ．

証明．補題 1 によって

$$(|x|^2+|y|^2)^{s/2} - (|x|^s + |y|^s) \leqq \beta_s (|x|^{s-2}|y|^2 + |x|^2|y|^{s-2}).$$

一方において　$|x^*|^2 + |y^*|^2 = |x|^2 + |y|^2$ が成立するから

$$|x^*|^s+|y^*|^s-(|x|^s+|y|^s)$$
$$\leq |x^*|^s+|y^*|^s-(|x|^2+|y|^2)^{s/2}+\beta_s(|x|^{s-2}|y|^2+|x|^2|y|^{s-2})$$
$$\leq (|x^*|^2+|y^*|^2)^{s/2}-(|x|^2+|y|^2)^{s/2}+\beta_s(|x|^{s-2}\cdot|y|^2+|x|^2\cdot|y|^{s-2})$$
$$=\beta_s(|x|^{s-2}\cdot|y|^2+|x|^2\cdot|y|^{s-2}).$$

補題3　$x, y\in R^3$, $l\in S^2$ の連続関数 $g(x,y,l)$ があり，

(i) $g(x,y,l)=g(y,x,l)=g(x^*,y^*,l)$

(ii)（有界） $0\leq g(x,y,l)\leq N$

をみたしているものとする．さらに f を R^3 上の確率分布で，$\int |x|^\alpha f(dx)<\infty$ をみたしているものとする（α は定数で ≥ 3）．このとき f を初期分布とする

$$(10)\quad \frac{\partial u(t,\Gamma)}{\partial t}=\int_{S^2\times R^3\times R^3} g(x,y,l)\{\delta(x^*,\Gamma)-\delta(x,\Gamma)\}dl\,u(t,dx)u(t,dy)$$

の解 $u(t,\cdot)$ に対して

$$\mu(t)=\int|x|^\alpha u(t,dx)$$

とおくと，$\mu(t)$ は局所有界である．

証明　(10) は

$$\frac{\partial u(t,\Gamma)}{\partial t}=N\int_{R^3\times R^3}\{\Pi(x,y,\Gamma)-\delta(x,\Gamma)\}u(t,dx)u(t,dy)$$

と同等である．ただし

$$\Pi(x,y,\Gamma)=\frac{\delta(x,\Gamma)+\delta(y,\Gamma)}{2}+\frac{1}{N}\int_{S^2}g(x,y,l)\left\{\frac{\delta(x^*,\Gamma)+\delta(y^*,\Gamma)}{2}-\frac{\delta(x,\Gamma)+\delta(y,\Gamma)}{2}\right\}dl.$$

よって Wild's sum により (10) の解は

$$u(t) = e^{-Nt}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{-Nt}\right)^{n-1}\cdot\sum_{\tau\in T_n}|\tau| f_\tau$$

と表わされる．いま $\mu_\tau = \int |x|^\alpha f_\tau(dx)$ とおくと

$$\mu(t) = e^{-Nt}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{-Nt}\right)^{n-1}\sum_{\tau\in T_n}|\tau|\mu_\tau .$$

補題2によって

$$\begin{aligned}
&\int |z|^\alpha \pi(x, y, dz) \\
&= \frac{|x|^\alpha + |y|^\alpha}{2} + \frac{1}{N}\int_{S^2} g(x, y, l)\left\{\frac{|x^*|^\alpha + |y^*|^\alpha}{2} - \frac{|x|^\alpha+|y|^\alpha}{2}\right\} dl \\
&\le \frac{|x|^\alpha + |y|^\alpha}{2} + \beta\cdot\frac{|x|^{\alpha-2}|y|^2 + |x|^2|y|^{\alpha-2}}{2} \qquad (\beta=\beta_\alpha)
\end{aligned}$$

であるから， $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ に対して

$$\begin{aligned}
\mu_\tau &= \int_{R^3\times R^3\times R^3} |z|^\alpha \pi(x, y, dz) f_{\tau_1}(dx) f_{\tau_2}(dy) \\
&\le \int_{R^3\times R^3} \frac{|x|^\alpha + |y|^\alpha}{2} f_{\tau_1}(dx) f_{\tau_2}(dy) \\
&\quad + \beta\int_{R^3\times R^3} \frac{|x|^{\alpha-2}|y|^2 + |x|^2|y|^{\alpha-2}}{2} f_{\tau_1}(dx) f_{\tau_2}(dy)
\end{aligned}$$

よって

$$\mu_\tau \le \frac{1}{2}\left(\mu_{\tau_1} + \mu_{\tau_2}\right) + \frac{\beta\sigma^2}{2}\left(\int |x|^{\alpha-2} f_{\tau_1}(dx) + \int |x|^{\alpha-2} f_{\tau_2}(dx)\right).$$

Case (1) $1 \leq \alpha - 2 \leq 2$. このときはHölderの不等式により

$$\int |x|^{\alpha-2} f_{\tau_1}(dx) \leq \sigma^{\alpha-2}$$

したがって

$$\mu_\tau \leqq \frac{1}{2}(\mu_{\tau_1} + \mu_{\tau_2}) + \beta\sigma^\alpha \quad , \quad \tau = (\tau_1, \tau_2) \text{ のとき}$$

$$= \mu \quad , \quad \tau = e \text{ のとき} .$$

いま

$$a_n = \sum_{\tau \in T_n} |\tau| \mu_\tau$$

とおくと

$$a_n \leq \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{\tau_1 \in T_m} \sum_{\tau_2 \in T_{n-m}} \frac{|\tau_1||\tau_2|}{n-1} \left(\beta\sigma^\alpha + \frac{\mu_{\tau_1} + \mu_{\tau_2}}{2}\right)$$

$$= \sum_{\tau \in T_n} |\tau| \beta \sigma^\alpha + \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{\tau_1 \in T_m} \sum_{\tau_2 \in T_{n-m}} \frac{|\tau_1||\tau_2|}{n-1} \cdot \frac{\mu_{\tau_1} + \mu_{\tau_2}}{2}$$

$$= \beta\sigma^\alpha + \frac{1}{n-1} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{2} \left\{ \sum_{\tau_1 \in T_m} |\tau_1| \mu_{\tau_1} + \sum_{\tau_2 \in T_{n-m}} |\tau_2| \mu_{\tau_2} \right\}$$

$$= \beta\sigma^\alpha + \frac{1}{n-1} \sum_{m=1}^{n-1} a_m \quad , \quad n \geqq 2 .$$

即ち

$$\begin{cases} a_n \leq \beta\sigma^\alpha + \dfrac{1}{n-1} \displaystyle\sum_{m=1}^{n-1} a_m \quad , \quad n \geqslant 2 \\ a_1 = \mu \end{cases}$$

を得る。これより

$$a_n \leqslant \mu + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right) \beta \sigma^\alpha , \quad n \geqslant 2$$

したがって

$$\mu(t) = e^{-Nt} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-Nt})^{n-1} a_n < \infty .$$

Case (2). $2 < \alpha - 2 \leq 4$.

$$\mu'_\tau = \int |x|^{\alpha-2} f_\tau(dx) \quad \text{とおくと}$$

$$\mu_\tau \leq \frac{1}{2}(\mu_{\tau_1} + \mu_{\tau_2}) + \frac{\beta\sigma^2}{2}(\mu'_{\tau_1} + \mu'_{\tau_2}).$$

したがって

$$a_n = \sum_{\tau \in T_n} |\tau| \mu_\tau$$

$$\leq \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{\tau_1 \in T_m} \sum_{\tau_2 \in T_{n-m}} \frac{|\tau_2||\tau_1|}{n-1} \left(\frac{\mu_{\tau_1} + \mu_{\tau_2}}{2} + \beta\sigma^2 \cdot \frac{\mu'_{\tau_1} + \mu'_{\tau_2}}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{n-1} \sum_{m=1}^{n-1} a_m + \frac{\beta\sigma^2}{n-1} \sum_{m=1}^{n-1} a'_m ,$$

ただし
$$a'_n = \sum_{\tau \in T_n} |\tau| \mu'_\tau .$$

一方

$$\mu'_\tau \leq 1 + \nu_\tau , \quad \nu_\tau = \int |x|^4 f_\tau(dx)$$

であり，また case (1) によって

$$\sum_{\tau \in T_n} |\tau| \nu_\tau \leq \nu + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right) \beta\sigma^4$$

$$\leq \text{const.} + \text{const.} \log n , \quad \left(\nu = \int |x|^4 f(dx)\right)$$

であるから

$$a'_n \leq \text{const.} + \text{const.} \log n .$$

そこで
$$b_n = \frac{\beta\sigma^2}{n-1} \sum_{m=1}^{n-1} a'_m$$

とおくと

$$b_n \leq \text{const.} + \text{const.}\, n \log n ,$$

かつ　$a_n \leq b_n + \frac{1}{n-1}\sum_{m=1}^{n-1} a_m \quad (n \geqq 2), \quad a_1 = \mu .$

いま

$$\gamma_n = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} a_m$$

とおくと

$$\begin{aligned}\gamma_n &= \frac{1}{n}\Big(\sum_{m=1}^{n-1} a_m + a_n\Big)\\ &= \frac{n-1}{n}\gamma_{n-1} + \frac{1}{n} a_n\\ &\leq \Big(1-\frac{1}{n}\Big)\gamma_{n-1} + \frac{1}{n}(b_n + \gamma_{n-1})\\ &= \gamma_n + \frac{b_n}{n}, \qquad \gamma_1 = \mu .\end{aligned}$$

よって

$$\gamma_n \leq \mu + \frac{b_2}{2} + \frac{b_3}{3} + \cdots + \frac{b_n}{n} \qquad (n \geqq 2)$$

$$a_n \leq b_n + \gamma_{n-1} \leq \text{const.} + \text{const.}\, n \log n .$$

したがって

$$\mu(t) = e^{-Nt}\sum_{n=1}^{\infty}(1-e^{-Nt})^{n-1}\cdot a_n < \infty .$$

Case (3). $\alpha > 6$　この場合は $2k < \alpha - 2 \leq 2(k+1)$ をみたすような自然数 k をとる. Case (2) と全く同様にして

$$a_n \leq \text{const.} + \text{const.}\, n^k \log n ,$$

これより, $\mu(t)$ の局所有界性がわかる.

<u>補題4</u>　f を R^3 上の確率分布で, ある $\alpha \geqq 3$ に対して

$$\mu = \int |x|^\alpha f(dx) < \infty$$

をみたすものとする. このとき f を初期値とする方程式 (7) の解 $u(t,\cdot)$ に対して　$\mu(t) = \int |x|^\alpha u(t, dx)$　とおくと,

任意の有限区間 $[0,T]$ に対して σ^2, μ, α, T だけに依存するある定数 K があって

(11) $\qquad \mu(t) \leq K \quad , \quad t \in [0,T]$

が成立する. (K が N に無関係であることに注意)

証明

$$u(t,\Gamma)=f(\Gamma)+\int_0^t ds\int_{S^2\times R^3\times R^3} g_N(x,y,l)\left\{\frac{\delta(x^*,\Gamma)+\delta(y^*,\Gamma)}{2}-\frac{\delta(x,\Gamma)+\delta(y,\Gamma)}{2}\right\}dl\,u(s,dx)u(s,dy)$$

において, $g_N(x,y,l)$ の有界性と補題3を考慮することにより

$$\mu(t)=\mu+\int_0^t ds\int_{S^2\times R^3\times R^3} g_N(x,y,l)\left\{\frac{|x^*|^\alpha+|y^*|^\alpha}{2}-\frac{|x|^\alpha+|y|^\alpha}{2}\right\}dl\,u(s,dx)u(s,dy)$$

ここで補題2を用いると

$$\mu(t)\leq\mu+\int_0^t ds\int_{S^2\times R^3\times R^3} g_N(x,y,l)\,\beta\cdot|x|^{\alpha-2}|y|^2\,dl\,u(s,dx)u(s,dy)$$

$$\leq\mu+\beta\int_0^t ds\int_{R^3\times R^3}(|x|+|y|)|x|^{\alpha-2}|y|^2\,u(s,dx)u(s,dy).$$

$\alpha=3$ の場合は

$$\mu(t)\leq\mu+\beta\int_0^t(\sigma^4+\sigma\mu(s))ds$$

補題3により $\mu(t)$ は局所有界であるから, Gronwallの補題により

$$\mu(t)\leq(\mu+\beta\sigma^4 t)e^{\beta\sigma t}$$

を得る. $\alpha>3$ の場合は先ずHölderの不等式により

$$\int |x|^{\alpha-1} u(s,dx) \leq \mu(s)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \leq 1+\mu(s), \quad \int |x|^{\alpha-2} u(s,dx) \leq 1+\mu(s)$$

であるから

$$\mu(t) \leq \mu + \beta \int_0^t \{\sigma^2 + (\mu + \beta\sigma^4 s) e^{\beta\sigma s}\}(1+\mu(s))\, ds$$

を得る。ここで再び Gronwall の補題を用いればよい。

評価式(11)に注意すると定理Bは定理Aの証明と同様な方法で直ちに導かれる。

§3. 定理C, Dの証明.

$\pi(x,y,\Gamma)$ を(6)で定義すると

$$\int_{R^3} (1+|z|^2)\, \pi(x,y,dz) = 1 + \frac{|x|^2+|y|^2}{2}$$

であるから、$\pi(x,y,\Gamma)$ は x,y を固定したとき Γ につき確率測度になっている。$u(t,\cdot)$ を定理Bにおける解とすると

$$B[u](\Gamma) = \int_{S^2\times R^3\times R^3} |(y-x,l)| \left\{\frac{\delta(x^*,\Gamma)+\delta(y^*,\Gamma)}{2} - \frac{\delta(x,\Gamma)+\delta(y,\Gamma)}{2}\right\} dl\, u(t,dx)\, u(t,dy)$$

$$= \int_{R^3\times R^3} (1+|x|^2)(1+|y|^2) \left\{\pi(x,y,\Gamma) - \frac{\delta(x,\Gamma)+\delta(y,\Gamma)}{2}\right\} u(t,dx)\, u(t,dy)$$

が成立するから

$$\int_\Gamma (1+|z|^2) B[u](dz) = \int_{R^3\times R^3} (1+|x|^2)(1+|y|^2) \underbrace{\int_\Gamma (1+|z|^2) \left\{\pi(x,y,dz) - \frac{\delta(x,dz)+\delta(y,dz)}{2}\right\}}_{u(t,dx)\,u(t,dy)}$$

$$=\int_{R^3\times R^3}(1+|x|^2)(1+|y|^2)\int_{\Gamma}(1+|z|^2)\{\pi(x,y,dz)-\delta(x,dz)\}u(t,dx)u(t,dy)$$

$$=\int_{R^3\times R^3}(1+|x|^2)(1+|y|^2)(1+|x|^2)\{\tilde{\pi}(x,y,\Gamma)-\delta(x,\Gamma)\}u(t,dx)u(t,dy)$$

$$=(1+\sigma^2)^2\int_{R^3\times R^3}(1+|x|^2)\{\tilde{\pi}(x,y,\Gamma)-\delta(x,\Gamma)\}\tilde{u}(t,dx)\tilde{u}(t,dy)$$

したがって任意の $\varphi\in C_b(R^3)$ に対して

$$\frac{\partial\tilde{u}(t,\varphi)}{\partial t}=\int\varphi(z)(1+|z|^2)B[u](dz)$$

$$=(1+\sigma^2)\int_{R^3\times R^3}(1+|x|^2)\{\tilde{\pi}(x,y,\varphi)-\varphi(x)\}\tilde{u}(t,dx)\tilde{u}(t,dy)$$

が成立する．$\tilde{u}(t,\cdot)$ がやはり R^3 上の確率分布になっているから

$$\frac{\partial\tilde{u}(t,\varphi)}{\partial t}=(1+\sigma^2)\int_{R^3\times R^3}(1+|x|^2)\,\tilde{\pi}(x,y,\varphi)\,\tilde{u}(t,dx)\tilde{u}(t,dy)$$

$$-(1+\sigma^2)\int_{R^3}\varphi(x)(1+|x|^2)\tilde{u}(t,dx)$$

したがって，$\tilde{g}(x)=(1+\sigma^2)(1+|x|^2)$ として

$$\tilde{u}(t,\Gamma)=\int_{\Gamma}e^{-\tilde{g}(x)t}\tilde{f}(dx)$$

$$+\int_0^t ds\int_{R^3\times R^3}\tilde{u}(s,dx)\tilde{u}(s,dy)\tilde{g}(x)\int_{\Gamma}e^{-\tilde{g}(z)(t-s)}\tilde{\pi}(x,y,dz)$$

が得られる．この方程式の最小解 $\tilde{u}_0(t,\cdot)$ は容易に構成される．そこで $\tilde{v}(t,\Gamma)=\tilde{u}(t,\Gamma)-\tilde{u}_0(t,\Gamma)$ とおくと明らかに $\tilde{v}(t,\Gamma)\geq 0$ であって その total mass $\tilde{v}(t,R^3)$ は

$$\frac{d\tilde{v}(t,R^3)}{dt}=\tilde{\mu}(t)\,\tilde{v}(t,R^3),\quad \tilde{v}(0,R^3)=0$$

をみたす．ここに

$$\tilde{\mu}(t)\equiv\int\tilde{g}(x)\,\tilde{u}_0(t,dx)\leq\int\tilde{g}(x)\,\tilde{u}(t,dx)$$

が局所有界であることに注意すると，$\tilde{v}(t,R^3)=0$ が得られる．即ち $\tilde{u}(t,\cdot)=\tilde{u}_0(t,\cdot)$ である．

最後に定理Dの証明を与えよう．

$$\begin{cases} g(t,x)=\displaystyle\int_{S^2\times R^3}|(y-x,l)|\,dl\,u(t,dy)\ \Big(\leq \mathrm{const.}(1+|x|)\Big) \\ \pi(t,x,\Gamma)=\dfrac{1}{g(t,x)}\displaystyle\int_{S^2\times R^3}|(y-x,l)|\,\delta(x_{y}^{*},\Gamma)\,dl\,u(t,dy)\end{cases}$$

とおくと，$P_f(t,z,\cdot)$ のみたす方程式は

$$(12)\qquad \frac{\partial v(t,\varphi)}{\partial t}=\int_{R^3}g(t,x)\{\pi(t,x,\varphi)-\varphi(x)\}\,v(t,dx)$$

となる．いま $v(t,\cdot)$ の初期分布を一般に h とすると，(12) は次の積分方程式と同等である．

$$(13)\qquad v(t,\Gamma)=\int_{\Gamma}e^{-\int_0^t g(s,x)ds}\,h(dx)$$
$$+\int_0^t ds\int_{R^3}v(s,dx)\,g(s,x)\int_{\Gamma}e^{-\int_s^t g(\tau,y)d\tau}\,\pi(s,x,dy).$$

(13)の最小解を $V_h(t,\cdot)$ とし，とくに $h=\delta(x,\Gamma)$ のときの $V_h(t,\cdot)$ を $V(t,x,\cdot)$ と書く．もし任意の t，x に対して $V(t,x,\cdot)$ が確率測度になることが証明出来れば，最小解ということから (12) の substochastic solution の一意性がいえ，それはさらに stochastic solution であることになる．

$V(t,x,R^3)=1$ の証明：明らかに $u(t,\cdot)$ も $h=f$ に対する (13) の解であるから $V_f(t,\cdot)\leq u(t,\cdot)$ が成立する．したがって $\int|x|^4 V_f(t,dx)\leq\int|x|^4 u(t,dx)<\infty$ であるから (12) より $dV_f(t,R^3)/dt=0$，これより $V_f(t,R^3)=1$，したがって $V_f(t,\cdot)=u(t,\cdot)$ を得る．$V_h(t,\cdot)$ の successive approximation による構成から容易に $V_h(t,\cdot)=\int V(t,x,\cdot)h(dx)$ が示されるから

(14) $$\int V(t,x,\cdot)f(dx)=u(t,\cdot)$$

が成立する．次に $z\in R^3$ を任意に固定し $0<\varepsilon<1$ に対して $f_\varepsilon=(1-\varepsilon)f+\varepsilon\delta(z,\cdot)$ とおく．f_ε を初期分布とする (3) の一意解を $u_\varepsilon(t,\cdot)$ とし，$V(t,x,\cdot)$ の定義において $u(t,\cdot)$ を $u_\varepsilon(t,\cdot)$ でおきかえて得られるものを $V_\varepsilon(t,x,\cdot)$ とする．このとき (14) により $\int|x|^2V_\varepsilon(t,z,dx)$ は t の関数として局所有界である．さらに

$$\int|x|^2V_\varepsilon(t,z,dx)\leq|z|^2+\int_0^t ds\int_{S^2\times R^3\times R^3}|(y-x,l)|\{|x^*|^2-|x|^2\}\,dl\,V_\varepsilon(t,z,dx)\,u_\varepsilon(t,dy)$$

$$\leq |z|^2 + \int_0^t ds \int_{R^3 \times R^3} (|x|+|y|)|y|^2 v_\varepsilon(t,z,dx) u_\varepsilon(t,dy)$$

$$= |z|^2 + ((1-\varepsilon)\sigma^2 + \varepsilon |z|^2) \int_0^t ds \int_{R^3} |x| v_\varepsilon(t,z,dx)$$

$$+ \int_0^t ds \int_{R^3} |y|^3 u_\varepsilon(t,dy) .$$

ここで $\int |x| v_\varepsilon(t,z,dx) \leq 1 + \int |x|^2 v_\varepsilon(t,z,dx)$ に注意して Gronwall の補題を用いることにより，任意の有限区間 $[0,T]$ に対してある定数 K（ε に無関係）があって

(15) $$\int |x|^2 v_\varepsilon(t,z,dy) \leq K \quad , \quad t \in [0,T]$$

となることがわかる．一方方程式 (3) の解の一意性等により，$\varepsilon \downarrow 0$ のとき

$$\begin{cases} u_\varepsilon(t,\cdot) \longrightarrow u(t,\cdot) \\ g_\varepsilon(t,x) = \int_{S^2 \times R^3} |(y-x,l)| \, dl \, u_\varepsilon(t,dy) \longrightarrow g(t,x) \\ \pi_\varepsilon(t,x,\cdot) \text{ (similarly defined)} \longrightarrow \pi(t,x,\cdot) \end{cases}$$

であるから，ε がある部分列にそって $\downarrow 0$ のとき $v_\varepsilon(t,z,\cdot)$ は (12) のある解 $\bar{v}(t,\cdot)$（初期分布はやはり $\delta(z,\cdot)$）に近ずく．(15) より $\int |x|^2 \bar{v}(t,dx) \leq K$，$t \in [0,T]$．一方 $v(t,z,\cdot)$ の最小性により $v(t,z,\cdot) \leq \bar{v}(t,\cdot)$，したがって

$$\int |x|^2 v(t,z,dx) \leq K , \quad t \in [0,T]$$

が成立する．ここで $g(t,x) \leq const.(1+|x|)$ および $v(t,z,\cdot)$ が(12)の解であることに注意すると $v(t,z,R^3)=1$ が得られる．

以上で，定理Dにおける $P_f(t,z,\cdot)$ が substochastic solution の範囲内での unique solution として定まることがわかった．それは $V(t,z,\cdot)$ にほかならない．最後に，定理Dにおける(a),(b)が成立することはすでに見た通りであり，(c)も $P_f(t,z,\cdot)$ の一意性よりわかる．

References

[1] T. Carleman, Problèmes Mathématique dans la Théorie Cinétique des Gaz. Uppsala, 1957.

[2] A. Ya. Povzner, On Boltzmann's equation in the kinetic theory of gases. Mat. Sb., 58(1962), 63-86.

[3] G. W. Ford and G. E. Uhlenbeck, Lectures in Statiscal Mechanics. Providence 1963.

[4] M. Kac, Probability and Related Topics in the Physical Sciences. New York 1959.

[5] H. P. Mckean, A class of Markov processes associated with nonlinear parabolic equations. Proc.Nat. Acad. Sci. 56 (1966), 1907-1911.

[6] N. B. Maslova and R. P. Chubenko, Limit properties of solutions for Boltzmann's equation. DAH CCCP, 202(1972), 800-803.

[7] E. Wild, On Boltzmann's equation in the kinetic theory of gases. Proc. Camb. Phil. Soc. 47(1951),602-609.