数理解析研究所講究録
第 174 巻 1973 年 21-30

Boltzmann 方程式の解の行動

東大、理　藤原 昌彦

§1. H 定理

先ず Boltzmann 方程式とは次の微分積分方程式を言う。

$$(1)\ \frac{Df}{Dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+v^i\frac{\partial f}{\partial x^i}+\frac{X^i}{m}\frac{\partial f}{\partial x^i}=B[f,f]$$

ここで $B[f,f]=\iint_{R^3\times S^2}\{f_1'f'-f_1f\}F(|v_1-v|,\theta)\,dv_1dl$

$v=(v^1,v^2,v^3)\in R^3$: 速度空間

$v_1=(v_1^1,v_1^2,v_1^3)\in R^3$ 〃 (衝突してくる粒子)

$x=(x^1,x^2,x^3)\in D$ 位置空間.

$X=(X^1,X^2,X^3)$: 外力ベクトル

m ; 粒子の質量.

X は x にのみ depend する.

$l\in S^2$ 　 $\theta=\arg(v_1-v,\ l)$

$f_1'\equiv f(v_1',x,t)$ 　 $f'\equiv f(v',x,t)$

$$f_1 \equiv f(v_1, x, t)$$

$$\begin{cases} v' = v + l(l, v_1 - v) \\ v_1' = v_1 - l(l, v_1 - v) \end{cases}$$

fは粒子の個数の位相空間に於ける密度 即ち $dv\,dx$ 中の粒子の個数が $f(v, x, t)\,dv\,dx$ 個である。 tはもちろん時刻を示す。

この時 $\begin{pmatrix} v' \\ v_1' \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} v \\ v_1 \end{pmatrix}$ の変換は6次元の直交変換になっている。 従って $dv'\,dv_1' = dv\,dv_1$.

また
$$|v_1 - v| = |v_1' - v'|$$
$$\theta = \arg(v_1 - v, l) = \arg(v_1' - v', l) \equiv \theta' \pmod{\pi}$$

が成立つ。

Fは粒子間の相互作用によって決まる2変数の関数である。

以下この§では、出てくる積分は絶対収束するとし、且つパラメータxに関して広義一様収束するとする。 即ちFubiniの定理の条件および $\frac{\partial}{\partial x}$ と $\int dv$ の交換の条件は満たされているものとする。

$\varphi(v)$をvの関数として次の積分を考える。

(2) $$B\varphi \equiv \int \varphi\, B[f, f]\, dv = \int \varphi(v) \{ f_1' f' - f_1 f \} F(|v_1 - v|, \theta)\, dv_1\, dv\, dl$$

$$= \int \varphi' \{ f_1 f - f_1' f' \} F(|v_1' - v'|, \theta')\, dv_1'\, dv'\, dl$$

$$= \int \varphi' \{ f_1 f - f_1' f' \} F(|v_1 - v|, \theta) \, dv_1 dv dl$$
$$= \frac{1}{2} \int (\varphi - \varphi') \{ f_1' f' - f_1 f \} F(|v_1 - v|, \theta) \, dv_1 dv dl$$
$$= \frac{1}{2} \int (\varphi_1 - \varphi_1') \{ f_1' f' - f_1 f \} F(|v_1 - v|, \theta) \, dv_1 dv dl$$
$$= \frac{1}{4} \int (\varphi + \varphi_1 - \varphi' - \varphi_1') \{ f_1' f' - f_1 f \} F(|v_1 - v|, \theta) \, dv_1 dv dl$$

次の定義をする。

$$\begin{cases} H_D(t) \equiv -\int_D f \log f \, dv dx \\ H^i(t, x) \equiv - \int v^i f \log f \, dv , \quad H = (H^1, H^2, H^3) \\ \mathcal{H}(t, x) = - \int f \log f \, dv \end{cases}$$

(2) で $\varphi = 1 + \log f$ とおくと．

$$\int (1 + \log f) B[f, f] dv = \frac{1}{4} \int (\log f + \log f_1 - \log f' - \log f_1')$$
$$\times \{ f_1' f' - f_1 f \} F \, dv_1 dv dl = \frac{1}{4} \int \left(\log \frac{f f_1}{f_1' f'} \right) (f_1' f' - f_1 f) F \, dv_1 dv dl$$
$$\leq 0 \qquad (\because \; F \geqq 0)$$

また

$$(1 + \log f) \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (f \log f)$$
$$(1 + \log f) v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} (v^i f \log f)$$
$$(1 + \log f) \frac{\partial f}{\partial v^i} = \frac{\partial}{\partial v^i} (f \log f)$$

従って (1) の両辺に $-(1 + \log f)$ を掛けて dv で積分すると．

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \frac{\partial H^i}{\partial x^i} = - \frac{1}{4} \int \left(\log \frac{f f_1}{f_1' f'} \right) (f_1' f' - f_1 f) F \, dv_1 dv dl$$

$$\geqq 0$$

ただしここで，f の物理的意味から，$|v| \to \infty$ の時 $f \to 0$

及び $|X|$ の有界性を仮定した。

さらに dx で D 内で積分すると、

$$\frac{dH_D}{dt} + \int_S H_n \, dS = \int_D B_{(H \log f)} \, dx \geqq 0$$

ただし H_n は H の、$\partial D = S$ の outer normal への projection.

今、適当な境界条件が成立っているとして、$\int_S H_n dS = 0$ を仮定すると、（例えば $D = R^3$ で $|f| \to 0$ as $|x| \to \infty$ の場合）

$$\frac{dH_D}{dt} \geqq 0 \quad \text{が成立つ。}$$

すなわち、H_D は時間と共に増加する。これが古典的な Boltzmann の H 定理である。

$\frac{dH_D}{dt} = 0$ が成立するのは $\log f + \log f_1 = \log f_1' + \log f'$ が成立つ時に限る。この時は

$\log f = a + b^i v^i + c|v|^2$ と表わされる。

（例えば文献 [1] 参照）

$\therefore f = A \exp (B \, |v - u|^2)$ と表わされる。

ここで A, B, $u = (u^1, u^2, u^3)$ はいずれも t および x の関数である。すなわち、f は locally Maxwellian distribution の密度関数である。

§2 平衡状態への移行の速さ。

前§の結果より。Boltzmann 方程式の解は $t \to \infty$ に従って速度に関して、Maxwell 分布に近づくことが期待される。以下はその数学的な justification である。

しかし、spatially inhomogeneous なる方程式、即ち、f が x に本当に depend する場合は、解の存在は局所解しか分ってないため、（文献 [6]、変形した Boltzmann 方程式の global solution に関しては [12]）以下では spatially homogeneous 即ち $f = f(t, v)$ なる場合に限る。

a) <u>Gas of hard balls に関して。</u>

Carlemann 文献 [1]。

初期値 f_0 が

$$0 \leq f_0(v) \leq \frac{a}{\sqrt{1+|v|^2}^{\,\kappa}} \qquad \kappa > 6 \qquad a > 0$$

を満足する時 $0 \leq f(v,t) < \frac{c}{\sqrt{1+|v|^2}^{\,\kappa}}$ なる解は unique に存在する。この f は $f(v,t) \longrightarrow g$ に point-wise に収束する。但し g は f_0 と一次及び二次のモーメントが同じな Maxwell 分布の density。

b) <u>Kac's caricature に関して。</u>

McKean [14] 参照。この方程式は spatially homogeneous Boltzmann 方程式の一次元のモデルである。

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2\pi}\int_{R^1 \times S^1} \{ f(t, x\cos\theta - y\sin\theta)\, f(t, x\sin\theta + y\cos\theta) - f(t,x) f(t,y) \} dy\, d\theta$$

に対して sup−norm を $\|\cdot\|$ で表わすと．$(x\in R^1, y\in R^1)$

$f_0(x)$ を $\int f_0(x)\,dx=1$, $\int |x|^3 f(x)\,dx<\infty$ $\int x^2 f_0(x)\,dx=\sigma^2$

を満たすとし，g を平均 0 ，分散 σ^2 の Maxwell 分布の密度とすると，f_0 を初期値とする Kac's caricature の解を f とするとき，$\varphi\in C^3$, $\|\varphi\|<\infty$, $\|\varphi'''\|<\infty$ なる関数 φ に対して．

$$\left|\int \varphi(x) f(t,x)\,dx-\int \varphi(x) g(x)\,dx\right|\leq e^{-t}\|\varphi\|+C\|\varphi'''\|\,e^{-(1-\frac{3\pi}{4})t}$$

が成立つ。

c) 一般の場合。

H. Grad [6] 参照． spatially homogeneous な方程式は，

(3) $$\frac{\partial f(v,t)}{\partial t}=\int_{S^2\times R^3}\{f(v',t)\cdot f(v_1',t)-f(v,t)\cdot f(v_1,t)\}F\,d\ell\,dv_1$$

今 $g=\dfrac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\exp\left(-\frac{1}{2}|v|^2\right)$ として．

$f=g+g^{\frac{1}{2}}h$ と置いて，(3) を h に関する方程式に書き直すと， $\dfrac{\partial h}{\partial t}+Lh=\Gamma(h,h)$ と書ける。

ここで $Lh=-2g^{-\frac{1}{2}}B(g,g^{\frac{1}{2}}h)$

$\Gamma(h,h)=g^{-\frac{1}{2}}B(g^{\frac{1}{2}}h,g^{\frac{1}{2}}h)$

粒子間の potential が十分固い時．(hard ball もしくは，$\frac{1}{r^s}$ の反発力．で $s\geqq 5$) で且つ，相互作用が有界の時，

L は $Lh=\nu\cdot h+Kh$ と分解できる。

(Grad [5] 参照．)

ここで $\begin{cases} \nu(v) = \int F(|v-v_1|, \theta)\, g(v_1)\, dl\, dv_1 \\ K: \text{compact operator} \end{cases}$

(☆) ν は下から有界　即ち $\exists c>0 \quad c \leq \nu(v)$

　　且つ $\nu \leq \nu_1 \cdot (1+|v|^2)^{\frac{1}{2}}$, $\exists \nu_1 > 0$.

簡単に分る通り，L は symmetric non-negative operator

従ってその spectre はすべて non-negative.

又 K は compact operator なる故，

(☆☆) $\text{ess-spect}(L) = \text{ess-spect}(\nu_0)$

一方，zero は L の固有値でその固有空間は $\psi_0 = g^{\frac{1}{2}}$,

$\psi_i = v^i g^{\frac{1}{2}} \quad (i=1,2,3)$，$\psi_4 = (|v|^2-3)\left(\frac{1}{6}g\right)^{\frac{1}{2}}$ の5つ

で張られる。(☆) および (☆☆) より zero は孤立固有

値である。

$\therefore \begin{cases} \exists \mu > 0 \quad (\text{non-zero spectrum の infimum}) \\ (h, Lh) > \mu(h,h) \quad \text{if} \quad (h, \psi_\alpha) = 0 \end{cases}$

出来れば L^2-理論の中で話を進めたいのであるが，$\Gamma(h,h)$

が bilinear operator として，L^2-norm では有界にならない故

次の新しい norm を導入する。

$$H_r(h) = \max_v (1+|v|^2)^{\frac{r}{2}} |h(v)| \quad , \quad r>0$$

~~$\|\ \|$ は L^2-norm である。~~

Grad は $0<\alpha<\mu$ なる任意の α に対して，$\exists\, C(\alpha)$, $\exists\, M(\alpha)$

$N_3(h_0) < C(\alpha)$ ならば解が存在して．（h_0は初期値）
$N_3(h) \leqq M(\alpha)\ e^{-\alpha t}$ であると言っているが．この推論は多分誤りであろう。

しかし．Lの固有値 $\lambda < \nu$ なる λ が存在すれば（即ち $\mu < \nu$ であれば）この主張は正しい。

従って．問題はLの固有値問題に帰着する。

これが正しい例として．Quasi-Maxwellian gas．つまり $F(|v-v_1|, \theta) = \Phi(\theta)$ となり．且つ $\int \Phi(\theta) dl = c < \infty$ の場合は．spectrum は全部固有値で．それらがすべて分っている。この結果を見て $\mu < \nu$ が分る。猶、この場合は、L^2－理論の枠内で処理出来て、話はずっと簡単になる（H. Tanaka）.

$\alpha = \mu$ ととれれば良いのであるが、これは未だ不明である。それ以上の評価は望めない。従って．上の評価はある意味では最良に近いものであるが．norm が物理的意味と結びつかないこと．特に初期値の制限の意味が不明であることが不満である。むしろ．任意の初期値から出発した時に．いつかある時刻に $N_3(h) < C(\alpha)$ となるというようなことの方が問題なのかも知れない。（McKean [14] の introduction 参照）。

文献

[1] T. Carlemann

"Problèmes Mathematiques dans la Thérie Cinétique des Gaz" Almquist & Wiksells, Uppsala

[2] ———

"Sur la théorie de l'équations intégrodifférentielle de Boltzmann" Acta Math 60, 1933

[3] S. Chapmann & T. G. Cowling "The mathematical theory of non-uniform gases". Cambridge Univ press 1939.

[4] H. Grad "Asymptotic theory of the Boltzmann equation" Phys. Fluids 6 147.

[5] ——— "Asymptotic theory of the Boltzmann equation II" Rarefied gas dynamics. J. A. Laurmann ed. vol I. Academic press, New York 1963.

[6] ——— "Asymptotic equivalence of the Navier-Stokes and non-linear Boltzmann equation"

Proceedings of the Symp. in Appl. Math XVII AMS 1965

[7] D. Hilbert "Gründzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen"

[8] E. H. Hauge " Exact and Chapmann-Enskog solutions of the Boltzmann equation for the Lorentz Model"
Arkiv for Det Fysiske Seminar i Trondheim No 5 - 1965

[9] H. P. McKean Jr. " Chapmann-Enskog-Hilbert expansion for a class of solutions of the telegraph equations" J. Math. Phys. vol 8 No. 3 1967

[10] —— " A simple model of the derivation of fluid mechanics from the Boltzmann equation".

[11] D. Morgenstern " Analytical studies related to the Maxwell-Boltzmann equation"
J. Rat. Mech. Anal 4. 1955

[12] A. Ja. Povzner " The Boltzman equation in the kinetic theory of the gases"
A.M.S. translation 47-(2)

[13] G. E. Uhlenbeck & G. W. Ford " Lectures in Statistical mechanics" A.M.S. 1963

[14] H. P. McKean Jr. " Speed of approach to equilibrium for Kac's caricature of Maxwellian gas"
Arch. for Rat Mech & Anal. 21 (1966)