数理解析研究所講究録
第174巻 1973年 101-107

Volterraモデルについて

東京工大 理学部　伊藤栄明

ここでは Volterraによる次の方程式を二つの角度からみることにする。

$$\frac{\partial}{\partial t} n_i = n_i \left(\sum_{j=1}^{r} a_{ij} n_j \right) \qquad a_{ij} = -a_{ji} \qquad (1)$$

$$i, j = 1, 2, \cdots, r$$

1) Volterra equation と Boltzmann equation

2) Volterra equation と Markov chain

§1 Volterraモデルと Boltzmann equation

先ず次の a) b) c) d) を満すモデルを考える。

a) ①, ②, ③ 3種類の粒子がある。それぞれの個数は n_1, n_2, n_3 とし $n_1 + n_2 + n_3 = N$ で N は一定であるとする。

b) それぞれの粒子は random に衝突をくりかえす。uniform distribution of colliding pair を仮定する。つまり ${}_NC_2$ 通りの組合せが等確率でおこると

する。

c) 単位時間にどの粒子も平均して一回衝突する。

d) 粒子は次のような衝突法則にしたがう

$$
\begin{array}{ccc}
①\,②\;\to\;①\,① & ②\,③\;\to\;②\,② & ③\,①\;\to\;③\,③ \\
①\,①\;\to\;①\,① & ②\,②\;\to\;②\,② & ③\,③\;\to\;③\,③
\end{array}
\qquad (2)
$$

つまり ① は ② より強く ② は ③ より強く ③ は ① より強いとする。Boltzmann's problem との類推から

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} n_1 &= \frac{n_1}{n} n_1 + \frac{n_2}{n} n_1 + \frac{n_1}{n} n_2 - n_1 \\
\frac{\partial}{\partial t} n_2 &= \frac{n_2}{n} n_2 + \frac{n_3}{n} n_2 + \frac{n_2}{n} n_3 - n_2 \\
\frac{\partial}{\partial t} n_3 &= \frac{n_3}{n} n_3 + \frac{n_1}{n} n_3 + \frac{n_3}{n} n_1 - n_3
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

が成立する。

$$\left(\frac{n_1}{n}, \frac{n_2}{n}, \frac{n_3}{n}\right) \equiv (P_1, P_2, P_3)$$

とおけば

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} P_1 &= P_1^2 + P_2 P_1 + P_1 P_2 - P_1 \\
\frac{\partial}{\partial t} P_2 &= P_2^2 + P_3 P_2 + P_2 P_3 - P_2 \\
\frac{\partial}{\partial t} P_3 &= P_3^2 + P_1 P_3 + P_3 P_1 - P_3
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

となる。(4) は M. Kac の本にあるのと同様な方法で master equasion からみちびくこともできる。

衝突法則を次のような代数的構造であらわすことができる。

$$
\begin{aligned}
&E_1 \circ E_1 = E_1 \qquad E_1 \circ E_2 = E_2 \circ E_1 = E_1 \\
&E_2 \circ E_2 = E_2 \qquad E_2 \circ E_3 = E_3 \circ E_2 = E_2 \\
&E_3 \circ E_3 = E_3 \qquad E_3 \circ E_1 = E_1 \circ E_3 = E_3
\end{aligned}
\tag{5}
$$

$P_1E_1 + P_2E_2 + P_3E$　を考え

$(P_1E_1 + P_2E_2 + P_3E_3) \circ (P_1'E_1 + P_2'E_2 + P_3'E_3)$

なる積を定義する。今分配法則がなりたつようにすれば (5) の上での convolution をあらわすことがわかる。この場合 結合律は成立しない。これより (4) は次のようにあらわせる。

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{i=1}^{3} P_i E_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{3} P_i E_i\right) \circ \left(\sum_{i=1}^{3} P_i E_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{3} P_i E_i\right) \tag{6}$$

(5)の代数的構造に確率を入れたものを考える。つまり ①と②が衝突した場合 確率 $1-P_{12}$ で①は②にかわり P_{12} で①にとどまる。②は確率 P_{12} で①にかわり $1-P_{12}$ で②のままでいる。

この場合 代数的構造は次のようになる

$$
\begin{aligned}
&E_1 \circ E_1 = E_1 \qquad E_1 \circ E_2 = E_2 \circ E_1 = P_{12}E_1 + (1-P_{12})E_2 \\
&E_2 \circ E_2 = E_2 \qquad E_2 \circ E_3 = E_3 \circ E_2 = P_{23}E_2 + (1-P_{23})E_3 \\
&E_3 \circ E_3 = E_3 \qquad E_3 \circ E_1 = E_1 \circ E_3 = P_{31}E_3 + (1-P_{31})E_1
\end{aligned}
\tag{7}
$$

(7) の上での (6) を考えると次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} P_1 &= \{ \qquad\qquad\quad (1-2P_{12})P_2 + (2P_{31}-1)P_3 \} P_1 \\
\frac{\partial}{\partial t} P_2 &= \{ (2P_{12}-1)P_1 \qquad\qquad\quad + (1-2P_{23})P_3 \} P_2 \\
\frac{\partial}{\partial t} P_3 &= \{ (1-2P_{31})P_1 + (2P_{23}-1)P_2 \qquad\qquad\quad \} P_3
\end{aligned}
\tag{8}
$$

一般に

$$
E_i \circ E_j = P_{ij} E_i + (1-P_{ij}) E_j \qquad P_{ij} = P_{ji} \qquad i, j = 1, 2, \cdots r
\tag{9}
$$

なる代数的構造の上で

$$
\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{i=1}^{r} P_i E_i \right) = \left(\sum_{i=1}^{r} P_i E_i \right) \circ \left(\sum_{i=1}^{r} P_i E_i \right) - \left(\sum_{i=1}^{r} P_i E_i \right)
\tag{10}
$$

なる Boltzmann equation のたぐいのものを考えることができる。これはVolterraの式(1)と同等なものであることがわかる

§2. Volterra モデルと Markov chain

以上では個数は連続な量とみなしていたが実際は descrete な量である。そこで次のような Markov chain を考える。§1 の C) のかわりに単位時間に全体で一回だけ衝突がおこるという仮定をする。又自分自身との衝突というのもかぞえることにする。したがって ${}_N C_2$ 通りでなく $N(N+1)/2$ 通りの組合せが等確率でおこることになる。

$p(n_1, n_2, n_3; t)$ を時刻 t で系が (n_1, n_2, n_3) にある確率とすれば次のような Markov chain となる。

$$p(n_1, n_2, n_3; t+1) = \frac{1}{N^2}\{(n_1^2+n_2^2+n_3^2)\,p(n_1, n_2, n_3; t)$$
$$+2(n_1-1)(n_2+1)\,p(n_1-1, n_2+1, n_3; t)+2(n_2-1)(n_3+1)\,p(n_1, n_2-1, n_3+1; t)$$
$$+2(n_3-1)(n_1+1)\,p(n_1+1, n_2, n_3-1; t)\} \qquad (11)$$

3種類の粒子の個数の積を考える。それは時刻 t で $H_3(t)$ なる確率変数であらわすことができる。そのとき

$$E\left(H_3(t+1)\middle|H_3(t)\right)=\left(1-2\frac{{}_3C_2}{N^2}\right)H_3(t) \qquad (12)$$

が成りたつ。

今種の数が $2n+1$ あるとする。それぞれの種が他の n 種類よりも強く n 種類よりも弱いとする。つまり"どの種も対等"であるとする。3種類の場合と同様なモデルを考え $2n+1$ 種の個数の積を確率変数 $H_{2n+1}(t)$ であらわすことにすると

$$E\left(H_{2n+1}(t+1)\middle|H_{2n+1}(t)\right)=\left(1-2\frac{{}_{2n+1}C_2}{N^2}\right)H_{2n+1}(t) \qquad (13)$$

が成りたつ。

種の数が $2n$ の場合"どの種も対等"であるようにすることはできない。適当な一つの種を加えることにより"どの種も対等"にすることができるとき"どの種もほとんど対等"であるということにする。"どの種もほとんど対等"であれば適当な一つの種をとりさることにより"どの種も対等"にすることができる。

$2n$ の種があり"どの種もほとんど対等"であるとする。

種 i をとりのぞくことにより"どの種も対等"にすることができるとする。$2n+1$ 種の場合と同様なモデルを考える。種 i の個数を確率変数 $X_i(t)$ であらわす。種 i をのぞいた種の個数の積を確率変数 $H'_{2n-1}(t)$ であらわす。

そのとき

$$
\begin{aligned}
&E\left(H'_{2n-1}(t+1) \mid H'_{2n-1}(t)\right) \\
&= \left(1 + \frac{(2n-3)X_i(t) - 2\,{}_{2n-1}C_2}{N^2}\right) H'_{2n-1}(t) \qquad (14)
\end{aligned}
$$

が成りたつ。

おそらく次のようなことが言えると思われる。

今 $2n+1$ 種類があり"どの種も対等"であるとする。そのとき状態は(13)式によって変化する。$H_{2n+1}(t)$ はある時間後に0になり 種の数は $2n$ になる。"どの種もほとんど対等"であるから(14)式が成りたつ。$X_i(t)$ はある時間後0になり種の数は $2n-1$ になる。

以上のくりかえしにより最終的には一種類だけになってしまう。

References

1. Kac, M.: Probability and related topics in physical sciences. New York 1959

2. Mckean H.P. Jr.: Speed of approach to

equilibrium for Kac's caricature of Maxwellian gas. Arch. Rational Mech. Anal., 21, 343–367 (1966)

3. Volterra, V.: Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie. Cahiers scientifiques VII Paris: Gauthier-Villars. 1931