数理解析研究所講究録
第175巻 1973年 1-8

$y(x+1)=y(x)+1+\dfrac{\lambda}{y(x)}$ $(\lambda\neq 0)$ の任意の解は transcendentally transcendental である

東大 理 高野恭一

§1、序

超越関数を E.H. Moore に従って[6]次の二つのclassに分類する。即ち、ある代数的微分方程式をみたすものを algebraically transcendental, そうでないものを transcendentally transcendental と呼ぶ。よく知られているように、ほとんどすべての特殊関数は algebraically transcendental であるが、O. Hölder [3] は、ガンマ関数は、transcendentally transcendental であることを証明した。以後、多くの人によってこの定理はさまざまな関数方程式に対して拡張された。[2][5]

大久保謙二郎氏は、Hölderの定理のある意味での逆定理「$\log x$ はいかなる代数的差分方程式もみたさない」を示した。従って、代数的微分方程式あるいは代数的差分方程式によって定義される超越関数は、本質的に異なるものであり、代数的差分方程式の大域的研究の重要性が認められると思う

。しかしそれに関する研究は線型の場合を除いてほとんどない。

木村俊房氏は[4]，非線型差分方程式において、微分方程式とどんな異なる現象があらわれるか実験するために、

$$(1.1) \qquad y(x+1) = y(x) + 1 + \frac{\lambda}{y(x)}, \quad (\lambda \neq 0)$$

について研究された。そして、そこで構成された有理型関数解 $y_c(x)$ あるいはもっと一般に(1.1)の任意の解は，いかなる代数的微分方程式をもみたさないのではないかという予想をされた。その予想が正しいことを示すのがこの小論の目的である。即ち

定理1.「(1.1)の任意の解は，$y(x) \equiv -\lambda$ を除いて，transcendentally transcendental である。」

我々は(1.1)の定数解を除外しているから、逆関数を考えることが出来る。もし(1.1)の解 $y(x)$ が、ある代数的微分方程式をみたせば、もちろんその逆関数 $x(y)$ もそうであり、かつそれは、次の方程式をみたすことが確められる。

$$x\left(y+1+\frac{\lambda}{y}\right) = x(y)+1 .$$

従って定理1を証明するためには、次の定理を示せば十分。

定理2「次の方程式

$$(1.2) \qquad y\left(x+1+\frac{\lambda}{x}\right) = y(x)+1$$

の任意の解は、transcendentally transcendental である。」

関数方程式(1.1)あるいは(1.2)において、一般に多価関数解を考えるので、解の意味をはっきりさせておくべきである。解としては、まず全平面$\mathbb{C}$より分岐点などの特異点を除いたところで正則な多価関数を考える。そして $y(x)$ が例えば(1.1)の解であるとは、$y(x)$の勝手な branch に対して、$y(x+1)$の branch を適当にとると、(1.1)が成立するという意味である。もちろんある点 x_0 で $y(x)$ と $y(x+1)$ の branch のとり方を指定すれば、他の点 x における branch のとり方は一意に決定されることに注意。 方程式(1.2)においても同様である。

定理2の証明は大体次のようにする。(1.2)の勝手な解 $y(x)$ を1つ定め、$y(x)$のみたす代数的微分方程式

$$F(y(x), y'(x), \cdots y^{(n)}(x), x) = 0$$

に対応する多項式全体を $\mathfrak{M}$ とする。あらかじめ x の有理関数体 $\mathbb{C}(x)$ を係数体とする $y_0, y_1, \cdots y_n, \cdots$ の多項式全体のなす環 $\mathbb{C}(x)\{y_0, y_1, \cdots y_n, \cdots\}$ において、単項式の次数を定義しておき(次節で示す)、$\mathfrak{M}$の中で、最高次数が最小のもの全体を $\mathfrak{N}$ とする。$G \in \mathfrak{M}$ を最高次の係数が1のものとする。

$$(1.3) \qquad G\left(y\left(x+1+\frac{\lambda}{x}\right), y'\left(x+1+\frac{\lambda}{x}\right), \cdots y^{(n)}\left(x+1+\frac{\lambda}{x}\right), x+1+\frac{\lambda}{x}\right)=0$$

と(1.2)を用いて、$\mathfrak{N}$の元 $\hat{G}$ が def される。この $\hat{G}$ に対して $\hat{G}-G$ を詳しくしらべてゆくと、$G=y_1$ i.e. $\frac{dy}{dx}=0$ が導びかれ矛盾に到達する。

次節で定理2の証明をかんたんに示すが、そこで用いられる補題を以下に並列する。

補題1「 $a(x+1+\frac{\lambda}{x}) = a(x) + c$; c : 定数

は $c=0$ のときのみ有理関数解をもち、それは定数解にかぎる。」

補題2「 $\left(\frac{x^2-\lambda}{x^2}\right)^h a(x+1+\frac{\lambda}{x}) = a(x)$, $h>0$ integer,

の有理関数解は $\equiv 0$ にかぎる。」

補題3「 $g(x)$ を non zero 有理関数，極は $x=0$ のみで位数は3以上，$x=\infty$ は零点で位数1以上とする。このとき

$$\left(\frac{x^2-\lambda}{x^2}\right) a(x+1+\frac{\lambda}{x}) + g(x) = a(x)$$

は有理関数解をもたない。」

§2. 定理2の証明

$a(x) y_0^{k_0} y_1^{k_1}\cdots y_n^{k_n}$, $b(x) y_0^{l_0} y_1^{l_1}\cdots y_m^{l_m} \in \mathbb{C}(x)\{y_0, y_1, \cdots, y_n, \cdots\}$

に対して、

$$(k_1, \cdots, k_n) = k', \quad (l_1, \cdots, l_m) = l', \quad (k_0, k') = k, \quad (l_0, l') = l$$

と略記し、

$$|k'| = k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n, \quad |l'| = l_1 + 2l_2 + \cdots + ml_m$$

とする。 k, l の順序を次の process に従ってきめる。

(1). $|k'| > |l'| \Rightarrow k > l$.

(2) $|k'| = |l'|$ のときは、$k_p - l_p, k_{p-1} - l_{p-1}, \cdots, k_1 - l_1$, $p = \max(n, m)$

の列を左からみて最初に0でない項が正 $\Longrightarrow$ $k>l$

(3) $k'=l'$ のときは $k_0>l_0 \Rightarrow k>l$.

このようにして次数の大小をきめたとき§1で示したGは

$$G(y_0, y_1 \cdots y_n, x)=\sum_{k_0=0}^{s_0} a_{k_0 s'}(x) y_0^{k_0} y_1^{s_1} \cdots y_n^{s_n}$$

$$\sum_{\substack{|k'|=|s'|\\ k<s}} \sum_{k_0=0}^{m(k')} a_{k_0 k'}(x) y_0^{k_0} y_1^{k_1} \cdots y_n^{k_n} + \sum_{|k'|<|s'|} \sum_{k_0=0}^{m(k')} a_{k_0 k'}(x) y_0^{k_0} y_1^{k_1} \cdots y_n^{k_n}$$

となる。但し $a_{s_0 s'}(x)=1$.

(1.2) より

$$y(x+1+\frac{\lambda}{x})=y(x)+1$$

$$y'(x+1+\frac{\lambda}{x})=\frac{x^2}{x^2-\lambda} y'(x)$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)}(x+1+\frac{\lambda}{x})=\left(\frac{x^2}{x^2-\lambda}\right)^n y^{(n)}(x)+\sum_{l=1}^{n-1} P_{n,l}(x) y^{(l)}$$

, $P_{k,l}(x)$ は x の rational functions, これと(1.3)より

$$\hat{G}(y_0, y_1 \cdots y_n, x) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftarrow} \left(\frac{x^2-\lambda}{x^2}\right)^{|s'|} G\left(y_0+1, \frac{x^2}{x^2-\lambda} y_1, \ldots, \left(\frac{x^2}{x^2-\lambda}\right)^n y_n+\sum_{l=1}^{n-1} P_{n,l}\, y_l, x+1+\frac{\lambda}{x}\right)$$

について、$\hat{G} \in \mathfrak{N}$ かつ $\hat{G}$ の最高次の係数が1であることが確められる。以後 $G = y_1$ を6段にわけて示す。

(第1段). 多項式 $\hat{G}-G$ の最高次項 $y_0^{s_0-1} y_1^{s_1} \cdots y_n^{s_n}$ が $\equiv 0$ でなければならない(もし$\not\equiv 0$ならば$\mathfrak{N}$の最小性に反する。)から

$$a_{s_0-1, s'}(x+1+\frac{\lambda}{x})+s_0-a_{s_0-1, s'}(x)=0.$$

補題1より $s_0=0$ でなければならない。

(第2段). $\hat{G}\equiv G$ でなければならない.

(第3段). $|k'|=|s'|$ なる k' について, $m(k')=0$.

(∵) $m(k')>0$ とする。

$\hat{G}-G$ の $y_0^{m(k')}y_1^{k_1}\cdots y_n^{k_n}$ の係数 $=0$ より

$$a_{m(k'),k'}\left(x+1+\frac{\lambda}{x}\right)=a_{m(k'),k'}(x).$$

補題1より $a_{m(k'),k'}(x)=a_k\ (\neq 0)$ constant.

一方 $y_0^{m(k')-1}y_1^{k_1}\cdots y_n^{k_n}$ の係数 $=0$ より

$$a_{m(k')-1,k'}\left(x+1+\frac{\lambda}{x}\right)+m(k')a_k-a_{m(k')-1,k'}(x)=0.$$

, $m(k')a_k\neq 0$ 。補題1よりこれは矛盾。

(第4段). $|k'|\leq|s'|-1$ なる k' についても $m(k')=0$.

(∵). $m(k')>0$ $(|k'|\leq|s'|-1)$ なる k' の中で最大のものを h' とすると, $\hat{G}-G$ の $y_0^{m(h')}y_1^{h_1}\cdots y_n^{h_n}$ の係数 $=0$ より

$$\left(\frac{x^2-\lambda}{x^2}\right)^{|s'|-|h'|}a_{m(h'),h'}\left(x+1+\frac{\lambda}{x}\right)=a_{m(h'),h'}(x).$$

補題2を用いれば $a_{m(h'),h'}(x)\equiv 0$, ∴ $m(h')=0$.

(第5段). $s_2=s_3=\cdots=s_n=0$.

(∵) $s_n=s_{n-1}=\cdots=s_{r+1}=0$, $s_r>0$ なる r をとる。

$\hat{G}-G$ の最高次項は $y_1^{s_1}y_2^{s_2}\cdots y_{r-2}^{s_{r-2}}y_{r-1}^{s_{r-1}+1}y_r^{s_r-1}$ でその係数 $=0$ より

$$(*)\quad \frac{x^2-\lambda}{x^2}a_{s'}\left(x+1+\frac{\lambda}{x}\right)+s_r q_{r,r-1}=a_{s'}(x).$$

ここで $\sigma' = (s_1, \cdots, s_{r-2}, s_{r-1}+1, s_r - 1, 0, \cdots, 0)$

$$g_{r,r-1} = -\frac{2r}{x^3}\sum_{l=0}^{r-2}\left(\frac{x^2-\lambda}{x^2}\right)^l .$$

もし $r>1$ とすれば $g_{r,r-1}(x)$ は補題3の条件をみたしており、(*)をみたす有理関数は存在しない。∴ $r=1$.

ここまでの結果をまとめると、

$$G = y_1^{s_1} + \sum_{l=0}^{s_1-1}\sum_{|k|=l} a_k(x)\, y_1^{k_1}\cdots y_n^{k_n} .$$

（第6段）. $\displaystyle\sum_{l=0}^{s_1-1}\sum_{|k'|=l} a_{k'}(x)\, y_1^{k_1}\cdots y_n^{k_n}$ の non zero 最高次項を $y_1^{h_1}\cdots y_n^{h_n}$ とすると、それは $\hat{G}-G$ の最高次項ともなり、その係数 $=0$ より

$$\left(\frac{x^2-\lambda}{x^2}\right)^{s_1-|h'|} a_{h'}\left(x+1+\frac{\lambda}{x}\right) = a_{h'}(x),$$

補題2を用いると $a_{h'}(x)\equiv 0$. ∴ $G = y_1^{s_1}$, G の最小性より $G = y_1$.

こうして、(1.2)の解が代数的微分方程式の解とすると、それは $\frac{dy}{dx}=0$ をみたしていなければならず、明らかに(1.2)の解とはなりえない。こうして定理2が証明された。

References

[1] E. W. Barnes, On functions generated by linear difference equations of the first order, Proc. London Math. Soc. 2 (1904),

280–292.

[2] F. Hausdorff, Zum Hölderschen Satz über $\Gamma(x)$, Math. Ann. 94 (1925), 244–247.

[3] O. Hölder, Über die Eigenschaft der Gammafunction keiner algebraischen Differentialgleichung zu genügen, Math. Ann. 28 (1887), 1–13.

[4] 木村俊房, 差分方程式 $y(x+1)=y(x)+1+\frac{\lambda}{y(x)}$ について, 数理研講究録 87 (1970), 8—15.

[5] T. E. Mason, Character of the solutions of certain functional equations, Amer. J. Math. 36 (1914), 419–440.

[6] E. H. Moore, Concerning transcendentally transcendental functions, Math. Ann. 48 (1897), 49–74.

[7] A. Ostrowski, Zum Hölderschen Satz über $\Gamma(x)$, Math. Ann. 94 (1925), 248–251.