数理解析研究所講究録
第 175 巻 1973 年 80-93

Orr-Sommerfeld equation について

千葉大 理　西本敏彦

§1. 序

Orr-Sommerfeld equation は粘性をもつ2次元平行流の安定性をしらべる際に現われる最も基本的な方程式である.

非圧縮、粘性流体の2次元方程式は流れの関数を $\Psi(x,y,t)$ とすると

$$(1.1)\qquad \frac{1}{R}\Delta^2\Psi = \frac{\partial}{\partial t}\Delta\Psi + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial\Delta\Psi}{\partial x} - \frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial\Delta\Psi}{\partial y}$$

である. ただし $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, R はレイノルズ数を表わす. また速度成分は

$$u = \frac{\partial\Psi}{\partial y} \qquad v = -\frac{\partial\Psi}{\partial x}.$$

今、(1.1) をみたす1つの定常流 $\Psi_0(x,y)$ の安定性をしらべるのであるが, これは数学的には力学系の安定性と同じように, 系に加えられた微小攪乱 (small disturbance) が時間の

経過と共に増大するか又は減小するかによって判定される．
我々は basic flow $\Psi_0(x,y)$ として2次元平行流およびそれに準ずる流れの安定性について考える．

basic flow を $y=y_1, y_2$ に x 方向におかれた無限平行板の間を流れる平行流 $\Psi_0(x,y)=\Psi_0(y)$ とし，disturbance を $\psi(x,y,t)$ とする．

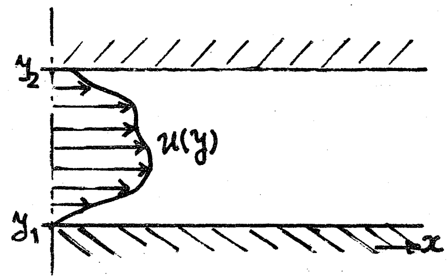


図 1

$$\Psi(x,y,t)=\Psi_0(y)+\psi(x,y,t)$$

を (1.1) に代入し $\Psi_0(y)$ が (1.1) をみたすことを用いると，ψ がみたすべき方程式は

$$(1.2)\quad \frac{1}{R}\Delta^2\psi-\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi-\left\{u(y)\frac{\partial}{\partial x}\Delta\psi-u''(y)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right\}$$
$$=\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\Delta\psi-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\Delta\psi$$

となる．ただし $u(y)=\partial\Psi_0(y)/\partial y$．また境界条件は

$$(1.3)\quad \frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}=0 \qquad at\ \ y=y_1,\ y_2$$

で与えられる．式 (1.2)，(1.3) が安定性の基本方程式である．
(1.2) は非線形であり解くことは不可能に近い．そこで disturbance ψ は無限小であるとして (1.2) の右辺の非線形項を省略して線形化すると

$$
(1.4)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{R}\Delta^2\psi - \dfrac{\partial}{\partial t}\Delta\psi - u(y)\dfrac{\partial}{\partial x}\Delta\psi + u''(y)\dfrac{\partial\psi}{\partial x} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial\psi}{\partial x} = \dfrac{\partial\psi}{\partial y} = 0 \quad \text{at} \quad y = y_1, y_2 . \end{cases}
$$

(1.4) の係数は x と t を含まない．したがって x と t の exp. function となるような解をもつ．さらに $x \to \pm\infty$ のとき解 ψ (disturbance) が有界となるもの：空間的には一様な攪乱を考えることにすると exponent は pure imaginary でなければならない。そこで (1.4) の解の形を

$$
(1.5)\qquad \psi(x, y, t) = \phi(y)\exp i\alpha(x - ct)
$$

とおき (1.4) に代入すると Orr-Sommerfeld equation が得られる：

$$
(1.6)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha R}(D^2 - \alpha^2)^2\phi = i\left\{(u(y) - c)(D^2 - \alpha^2)\phi - u''(y)\phi\right\}, \\[2ex] \phi(y_1) = \phi(y_2) = \phi'(y_1) = \phi'(y_2) = 0 . \end{cases}
$$

ここで　$D^2\phi = \partial^2\phi/\partial y^2$ ．また

$\phi(y)$　disturbance の複素振巾,

$\alpha > 0$　wave number , $2\pi/\alpha$ wave length ,

$c = c_r + ic_i$

　c_r　位相速度 ,

　c_i　時間的増巾率.

(1.6) は与えられた速度分布 $u(y)$, R および α に対し, c を

固有値パラメータとする２点境界値問題である．c_iの符号により disturbance (1.5) は

$c_i > 0$ ならば unstable 不安定，

$c_i = 0$ ならば neutral 中立，

$c_i < 0$ ならば stable 安定，

という．境界値問題 (1.6) の固有値，固有関数の性質については良く知られていないが，漸近理論を用いることによりいくつかの重要な結果がある．§2 において $R \to \infty$ の場合，即ち完全流体の安定性に関する Rayleigh，Tollmien の定理についてのべる．一般に層流の不安定性はレイノルズ数Rが大きいときに起ることが経験的に知られている．したがってこの limiting case の研究は一般な粘性流体の安定性に対し貴重な情報を与えるものである．§3 では２次元線型安定理論の決定版ともいうべき C. C. Lin の方法についてのべる．要約すれば Lin は (1.6) の解の漸近展開が成り立つ領域を正しく求めかつ発見的方法によって central connection problem (matching between inner and outer solution) を解決することにより，R十分大なるときの不安定性を導き，かつまたそれまであいまいであった完全流体の安定性についても合理的な解釈を下した．Lin の方法は数学的には必ずしも厳密でなかったが結果的には正しい解析方法を与えた．尚 Lin の解析の中で用いられ

た(1).漸近展開の成り立つ範囲を求めること，(2) central connection problem，それに(3) lateral connection problem(異る sector における漸近展開の接続問題)はいわゆる変り点を含む常微分方程式の研究における中心課題である．方程式(1.6)に関しては(1)と(2)はかなり統一的に研究された．最後に非線型安定論について若干のべる。

§2 完全流体の安定性

(1.6)において $\alpha R \to \infty$ とすると

$$
(2.1)\quad \begin{cases} (u(y)-c)(D^2-\alpha^2)\varphi - u''(y)\varphi = 0 \\ \varphi(y_1) = \varphi(y_2) = 0 \end{cases}
$$

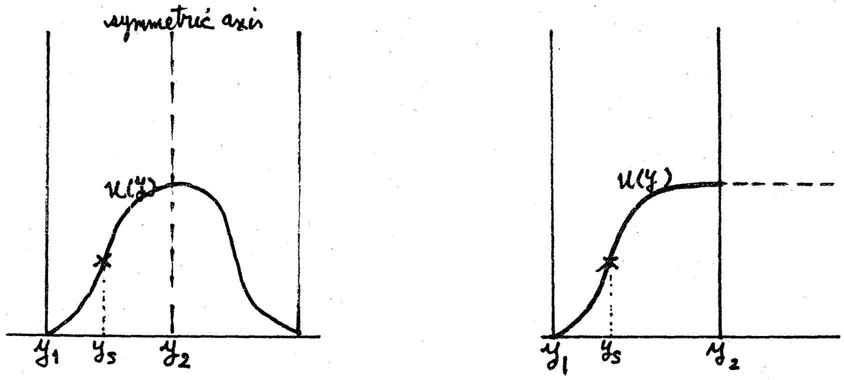
この境界条件は物理的には disturbance の境界における速度の垂直成分が 0 となり，境界に沿っては滑べり得ることに対応している．境界値問題(2.1)は固有値方程式 $c = f(\alpha^2)$ を定める．与えられた velocity profile $u(y)$ に対して安定又は不安定を区別する criterion はあるかが問題である。

定義 $y = y_s$ が velocity profile $u(y)$ の point of inflection であるとは．$u''(y_s) = 0$ をみたすときにいう。

定理 2.1 (Rayleigh 1880) もし unstable 又は neutral disturbance ($c_i \geq 0$) が存在すれば $u(y)$ は y_1 と y_2 の間に point of inflection をもつ．

定理2.1 は unstable 又は neutral disturbance が存在するための必要条件である. これに対しそれらが存在するための十分条件として次の定理がある.

定理 2.2 (Tollmien 1935). もし point of inflection y_s が y_1 と y_2 と間に1つ存在し, かつ $u(y)$ が symmetrical か又は boundary layer type (図参照) ならば $u(y_s)=c_s$ なる c_s に対して neutral disturbance $\phi_s(y)$ が存在する. かつその neutral disturbance の近傍に unstable および stable disturbance が存在する。



symmetrical flow.　　boundary layer type flow.

図2

さて (2.1)の微分方程式をみると, もし φ が (2.1)の解ならばその共役複素数 $\bar{\varphi}$ も又 (2.1)の解で固有値は $\bar{c}$ が対応している. したがってもし φ が stable ならば $\bar{\varphi}$ は unstable (vice versa) となる. 定理(2.1 とこのことから次のような物理的に奇妙な結論が導かれる. 即ちもし $u(y)$ が point of inflection をもたなければ unstable および neutral disturbance は存在しない. 又

stable disturbance φ をもてば $\tilde{\varphi}$ は unstable であるから stable disturbance も存在しえない. これはかつては physical paradox といわれた. この矛盾はつぎのように解決される(Lin).

(2.1)の解 φ は full Orr-Sommerfeld equation (1.6)の解の漸近展開を表わす時、物理的に存在しうると考える. $y=y_c$ と $u(y_c)=c$ をみたす点とする. y_c を(1.6)の変り点といい, 又(2.1)の特異点でもある. φ が漸近展開となる領域を複素 y-平面で考える. velocity profile $u(y)$ が図2で与えられる場合領域は次の図3のようになる(§3参照).

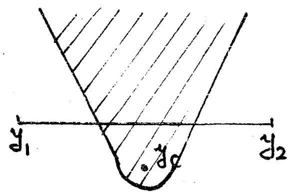


図3-1 (stable)

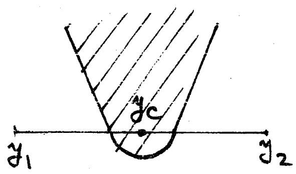


図3-2 (neutral)

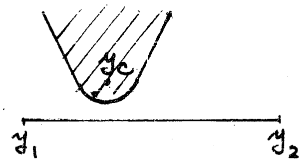


図3-3 (unstable)

したがって $\varphi(y)$ が例えば(2.1)の stable な解でそれが(1.6)の解の漸近展開を表わすならばその範囲は図3-1の斜線部分を除いた領域である. 明らかに $\tilde{\varphi}(y)$ は(1.6)の解の漸近展開を与えない.

完全流体でえられた結果から粘性流体について αR 十分大のとき如何なる結論が導かれるかは境界値問題(2.1)と(1.6)の固有値の関係をしらべる必要がある. これについては, Morawetz, C. の研究がある.

§3 線形安定論

線形安定論の主目的はいわゆる中立曲線 (neutral curve) の存在とその形状を求めることにある。Orr-Sommerfeld equation の基本解を $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ とすると一般解は

$$\phi = \sum_{i=1}^{4} A_i \varphi_i .$$

これが境界条件をみたすためには，固有値方程式

$$\begin{vmatrix} \phi_1(y_1) & \phi_2(y_1) & \phi_3(y_1) & \phi_4(y_1) \\ \phi_1(y_2) & \phi_2(y_2) & \phi_3(y_2) & \phi_4(y_2) \\ \phi_1'(y_1) & \phi_2'(y_1) & \phi_3'(y_1) & \phi_4'(y_1) \\ \phi_1'(y_2) & \phi_2'(y_2) & \phi_3'(y_2) & \phi_4'(y_2) \end{vmatrix} \equiv F(\alpha, c, \alpha R) = 0 \tag{3.1}$$

をみたさなければならない。与えられた α と R に対し (3.1) から c を求める。一般に c は complex で

$$c(\alpha, R) = c_r(\alpha, R) + i\, c_i(\alpha, R)$$

とかける。ここで c_i の符号が問題となるが，α-R 平面の曲線

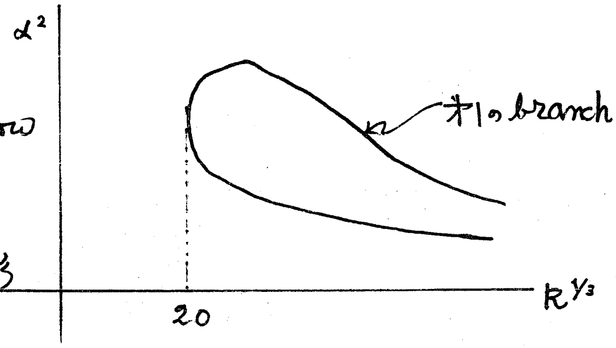
$$c_i(\alpha, R) = 0$$

を中立曲線と呼ぶ。問題は

1) 与えられた $u(y)$ に対し中立曲線は存在するか。
2) 中立曲線の近傍の α, R に関する c_i の符号，
3) 中立曲線の形状，$R \to \infty$ のときの asymptotic behavior,
4) critical レイノルズ数 R_c の計算，及びその近傍における中立曲線の形状.

中立曲線の存在に関してはつぎの結果がある.

定理3.1. Plane Couette flow ($u(y)=y$) は中立曲線をもたず安定である (Wasow 1953). Symmetrical 及び Boundary layer profile $u(y)$ に対しては中立曲線が存在し2つの branch をもつ. 又最初の branch の近傍で unstable disturbance が存在する.



Plane Poiseuille flow ($u(y)=1-y^2$) の中立曲線の概形 (Lin 1945).

図 4

この定理は境界値問題 (1.6) を解かねばならない. 不安定性は一般に R が十分大きいとき起るので解の漸近展開を用いる. $u(y)$ の定義域を complex y-平面に拡張して考える. $u(y)$ は整関数, 特に多項式で与える場合解は y の整関数であるにもかかわらず, その漸近展開は $y_c : u(y_c)=c$ なる点 = turning point において特異性を示す; $P_i(z)$ を常数項から始まる巾級数とすると

$$
(3.2)\quad \begin{cases} \phi_1(y) = (y-y_c)P_1(y-y_c) + O((\alpha R)^{-1}), \\ \phi_2(y) = P_2(y-y_c) + \dfrac{u_c''}{u_c'}(y-y_c)P_1(y-y_c)\log(y-y_c) + O((\alpha R)^{-1}), \end{cases}
$$

$$\begin{cases} \phi_3(y) = (u(y)-c)^{-5/4}\exp[-(\alpha R)^{\frac{1}{2}}Q(y)]\{1+O((\alpha R)^{-\frac{1}{2}})\}, \\ \phi_4(y) = (u(y)-c)^{-5/4}\exp[(\alpha R)^{1/2}Q(y)]\{1+O((\alpha R)^{-1/2})\}, \end{cases}$$

ただし　$u(y_c)=c$　$u'_c = u'(y_c)$, $u''_c = u''(y_c)$,

$$Q(y) = \int_{y_0}^{y}\sqrt{i(u(s)-c)}\,ds.$$

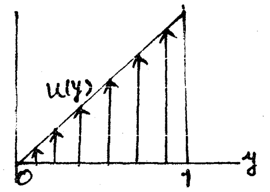
(3.2) は outer solution 又は第一種漸近解と呼ばれるが，これが漸近展開を表わす複素 y-平面の領域は，Stokes curve ; $Re\,Q(y) = const = Re\,Q(y_c)$ の族を描けばわかる．このような領域を admissible region ということにすると，これは turning point の近傍をのぞいた何本かの Stokes curves を境界としてもつ無限領域である．admissible region は $u(y)$ に対しいくつかあり境界点を含むようなものを選ぶ（同時に2つの境界点を含むように選ぶことができない場合は lateral connection problem をとかなければならない．しかし現在までのところこのようなことは必要がなかった）ことによって境界値問題をとく．

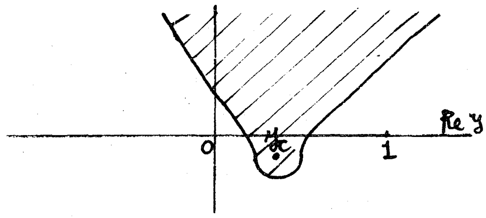
以下において2,3の velocity profile, boundary condition, および admissible region の例をのべる（尚任意多項式 $u(y)$ に対する admissible region の求め方に関しては Nishimoto (1972) を参照されたい．）図において斜線部分を除いた部分が admissible region である．(3.2) における多価関数の分枝は，

admissible region 内の曲線にそって解析接続することにより決められる.

(1) Plane Couette flow, $u(y)=y$. $[y_1, y_2]=[0,1]$

$\phi(0)=\phi(1)=\phi'(0)=\phi'(1)=0$, $y_c=c$.



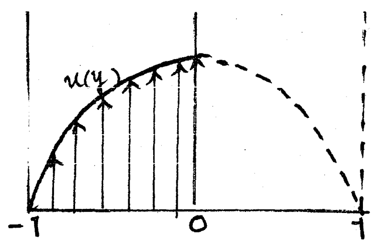


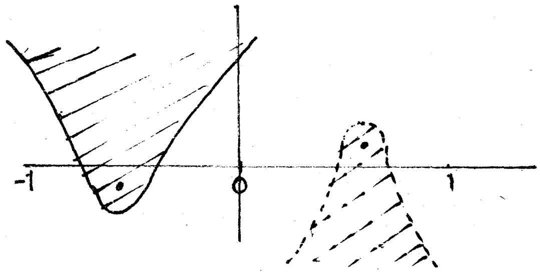
(2) Symmetrical flow, $u(y)=u(-y)$. $[y_1\ y_2]=[-1,1]$

(1-6)の解は偶関数と奇関数解の和に分解し, 偶関数は

$\phi(-1)=\phi'(-1)=\phi'(0)=\phi'''(0)=0$

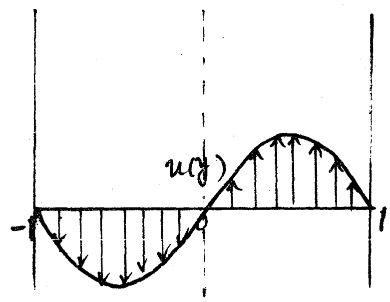
をみたす. 境界値問題は$[-1,0]$で考えればよい.

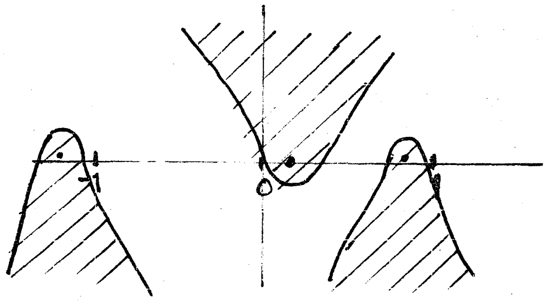




(3) 平行板の間の熱対流 (Gotoh and Ikeda 1970)

$u(y)=y(1-y^2)$, $[y_1, y_2]=[-1,1]$, $\phi(-1)=\phi(1)=\phi'(-1)=\phi'(1)=0$





c が小なるとき turning point y_c は境界点例えば y_1 に近い．漸近展開 (3.2) は y_c の近傍では成り立たないから y_1 が y_c の近くにある場合には修正を要する．そこで固有値問題をつぎの2つの class にわける．

Class 1. $\alpha R \to \infty$ のとき固有値 c が $u(y_1)$ に近づかない．

Class 2. $\alpha R \to \infty$ のとき固有値 c が $u(y_1)$ に近づく．

I. Class 1. この場合には (3.2) を用いて境界値問題がとかれる，即ち中立曲線が求められる．

II. Class 2. $y_1 \sim y_c$ から Orr-Sommerfeld equation の漸近展開を y_c の近傍で求める． $\eta = (y - y_c)\,\varepsilon$, $\varepsilon = (\alpha R)^{-1/3}$ とおき，漸近展開を ε の巾級数で求めると

$$
(3.3)\quad
\begin{cases}
\chi_1 \sim \chi_1^{(0)} + \varepsilon \chi_1^{(1)} \simeq \eta + \dfrac{\varepsilon u_c''}{2u_c'}\eta^2 + \cdots, \\[2mm]
\chi_2 \sim \chi_2^{(0)} + \varepsilon \chi_2^{(1)} = 1 + \varepsilon \dfrac{u_c''}{u_c'}\eta \log \eta + \cdots, \\[2mm]
\chi_3 \sim \chi_3^{(0)} = \displaystyle\int_{\infty}^{\eta}\int_{\infty}^{\eta} d\eta\, \eta^{\frac{1}{2}} H_{\frac{1}{3}}^{(1)}\left[\tfrac{2}{3}(i\alpha_0\eta)^{3/2}\right], \\[2mm]
\chi_4 \sim \chi_4^{(0)} = \displaystyle\int_{-\infty}^{\eta}\int_{-\infty}^{\eta} d\eta\, \eta^{\frac{1}{2}} H_{\frac{1}{3}}^{(2)}\left[\tfrac{2}{3}(i\alpha_0\eta)^{3/2}\right].
\end{cases}
$$

ただし $\alpha_0 = (u_c')^{1/3}$，および H は Hankel function を表わす．ここで変数を y にもどし，又 Hankel function の漸近展開の公式を用いることにより，解 (3.2) と (3.3) の関係が得られる；

$$\chi_1 \sim \phi_1, \quad \chi_2 \sim \phi_2, \quad \chi_3 \sim \phi_3, \quad \chi_4 \sim \phi_4 .$$

この手法を matching method により central connection problem が

とかれたという．この手法が数学的に正しいこと，即ち (3.2) と (3.3) の存在範囲が互いに overlap していることや，もっと一般な方程式についても同様の方法が適用できること等については論文 Nishimoto (1968) を参照されたい．尚 (3.3) で表わされる解を inner solution 又は才2種の解という．固有値方程式 (3.1) において $\phi_3(y_1)$ $\phi_3'(y_1)$ $\phi_4(y_1)$ $\phi_4'(y_1)$ の代りに $\chi_3(y_1)$ $\chi_3'(y_1)$ $\chi_4(y_1)$ $\chi_4'(y_1)$ を用いることにより中立曲線を計算する．

線形安定論では中立曲線 (critical curve) を求めることが主目的であるが，非線形理論では原則として全ての α, R に対する全ての固有値，固有関数の知識が必要である．しかし実際にはこれは非常に困難であり，その上固有値，固有関数については殆んど関心が払われてこなかった．Plane Poiseuille flow に関し固有値がつぎの仮定をみたすと仮定する：全ての α, R に対し可付番個の固有値 $\{c_k\}$ が存在し $I_m c_{k+1} < I_m c_k$ $(k=1,2,\cdots\to\infty)$ をみたす．このとき"線形安定論では unstable disturbance が非線形項の相互作用により安定化される"という結論がみちびかれた (Eckhaus 1965)．即ち R_{cr}, α_{cr} を各々 critical レイノルズ数, critical wave number とする．$R > R_{cr}$ を R_{cr} に十分近い値とする．このとき線形理論によれば interval of instability : $\{\alpha_0 \mid |\alpha_0-\alpha_{cr}|<\eta\}$ が存在し disturbance $e^{i\alpha_0 x}$ 型

は unstable である。しかるに非線形論ではある条件の下に周期 $2\pi/\alpha_0$ の有界な解 $e^{i\alpha_0 x}\Phi_{\alpha_0}(y,t)$ が存在する。さらに subinterval $\{\alpha_0 : |\alpha_0-\alpha_{cr}|<r_2,\ r_2<r_1\}$ が存在し，全ての α_0 に対し有界な解を $e^{i\alpha_0 x}\Phi_{\alpha_0}(y,t)$ とすると $\alpha \neq m\alpha_0\ (m=1,2,\cdots)$ なる全ての α に対し $e^{i\alpha x}\Phi_\alpha(y,t)$ は $t\to\infty$ のとき 0 に収束する。したがって $\alpha\neq m\alpha_0$, $|\alpha-\alpha_{cr}|<r_2$ なる α に対し $e^{i\alpha x}\Phi$ は線型理論では unstable であるが非線形論では stable となってしまう。

文献

(1) W. Eckhaus. Studies in Nonlinear Stability Theory (1965) Springer Tracts in Natural Philosophy Vol. 6.

(2) Gotoh-Ikeda. 平行板の間の熱対流の安定性 数解研講究録 97 (1970)

(3) C. C. Lin. The theory of Hydrodynamic Stability Cambridge Uni. Press (1955).

(4) C. Morawetz The eigenvalues of Some Stability Problems involving Viscosity J. Rat. Mech. Analysis 1 (1952)

(5) Nishimoto, T. Kodai Math. Sem. Rep. vol. 20 (1968), 24 (1972).

(6) W. Wasow On small Disturbances of Plane Couette Flow J. Res. Nat. Bureau of Standards (1953).