数理解析研究所講究録
第 176 巻 1973 年 59-73



# 天体力学にあらわれた
# ある微分方程式

東大東京天文台　青木　信仰

## §1、 Hamilton の方程式

天体力学であらわれる運動方程式は普通時間 $t$ を含まない Hamilton の方程式

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i=1,\cdots n) \qquad (1.1)$$
$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

に書きあらわされる。この場合 H は $p_1 \cdots p_n$, $q_1 \cdots\cdots q_n$ のみの関数とする。$t$ を含む場合は $n$ の代り $n+1$ とし, $q_{n+1}=t$ H の代りに $H+p_{n+1}$ とすれば形式的に全く同じ形になる。さて $n$ を力学系の自由度というが, $n=1$ の場合は $H=const$ が一つの積分になるので, 方程式は求積法で解けることになる。つぎに問題となるのは $n=2$ の場合であるが, この場合は一般的には求積法では解けない。$H=const$ 以外に有効な積分が存在しないことが多いからである。

ここでは自由度2の場合をあつかう。実際惑星によってdisturbされる小惑星の長年摂動方程式(惑星，小惑星それぞれの周期で平均されたもの)の場合とか、回転対称の力場での運動.(たとえば人工衛星の運動，銀河系内の星の運動は近似的に回転対称力場内の運動と考えられる)の場合は自由度2である。

さてたとえば銀河系内の運動を考える場合．もしもenergy積分とangular momentum積分(これは回転対称の力場の場合存在する)しか積分がない場合，星の速度分布はradial方向と銀河面に垂直の方向とで同じ速度分散を生ずる筈であるが，実際はそうなっておらず、もう一つの積分が存在するのではないかと予想されている．しかし数学的に厳密な積分があるかどうかは不明である[1]。

さてCylindrical coordinates $(R, \theta, z)$を用いpotentialを$U(R,z)$とする，angular momentumをJとした時

$$J = R^2 \cdot \dot{\theta} \tag{1.2}$$

であるが，この積分を用いて自由度2の力学系にした時のHamiltonian Hは

$$H = \frac{1}{2}(\dot{R}^2 + \dot{z}^2) + \Phi \tag{1.3}$$

ここで $$\Phi(R,z) = U(R,z) + \frac{J^2}{2R^2} \tag{1.3'}$$

となる、したがって(1.1)は

$$\ddot{R} = -\frac{\partial \Phi}{\partial R} \qquad \ddot{z} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} \tag{1.3''}$$

となる．簡単のために $\Phi$ の argument を $x, y$ とし，しかも原点を適当に選んで，$x=0$，$y=0$ で

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \tag{1.4}$$

とする．$x=0$，$y=0$ は $x, y$-plane で平衡点，もとの3次元空間では円運動に対応する．$\Phi$ を $x, y$ について展開したとすると，1次の term は含まず，2次からとなる

$$\Phi = ax^2 + bxy + cy^2 + \cdots \tag{1.5}$$

もし，$\Phi$ が3次以上を含まなければ方程式(1.3)は線型となり座標系を適当に回転して

$$\ddot{x} = -Ax \qquad \ddot{y} = -By \tag{1.6}$$

ここで $A, B > 0$ ならばいわゆる安定な平衡点となる．さて一般に $H(p_1, q_1, p_2, q_2)$ で3次以上がある場合は，形式的には次の形に変換されることが知られている．[2),3)] $(p, q \longrightarrow P, Q)$

$$H = H(I_1, I_2) \tag{1.7}$$

$$I_i = \frac{1}{2}(P_i^2 + Q_i^2)$$

すなわち

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial Q_i} = -\frac{\partial H}{\partial I_i}\frac{\partial I_i}{\partial Q_i} = -\frac{\partial H}{\partial I_i} Q_i \tag{1.8}$$

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P_i} = +\frac{\partial H}{\partial I_i} P_i$$

$$\frac{d}{dt} I_i = P_i \cdot \dot{P}_i + Q_i \dot{Q}_i = 0, \quad \therefore \frac{\partial H}{\partial I_i} \equiv \omega_i = const$$

すなわち $I_i$, $\omega_i$ は(形式的)積分になる.

解は

$$P_i = C \cos\left(\frac{\partial H}{\partial I_i}(t - t_0)\right)$$

$$Q_i = C \sin\left(\frac{\partial H}{\partial I_i}(t - t_0)\right) \qquad (1.9)$$

さて

$$H = \omega_{10} I_1 + \omega_{20} I_2 + \cdots \qquad (1.10)$$

であるとすると $\omega_i = \omega_{i0} + \cdots$

Kolmogorov[4], Moser[5] は $\frac{\omega_{10}}{\omega_{20}}$ が rational に近い時はこの形式的変換は発散してしまうので，そこをうまくさけて $E = const$ の 3 次元 phase space の中にさらに invariant な 2 次元の surface が存在することを示した. 実際証明出来ているのは平衡点(1次安定)のごく近傍である. 平衡点からはなれた所でもやはり同じようなことが言えるかどうかは数学的にはわからないが Hénon と Heiles[6] は数値計算で様子をしらべた.

結果については次節にのべるが，結論は energy が十分小さい時(平衡点附近の運動となる)はあたかも invariant surface が存在するが如くであるが，大きな energy に対してはもはや invariant surface は存在せず，ある一点から出発した軌道は全領域のあちらこちらを動きまわることがあることを示した. すなわち ergodic 的[8]である. ここで大事なことは ergodic 的であるかどうかは運動方程式だけによってきまるのではなく

energy constant にも関係することである.

## §2. Surface without contact (Hénon & Heiles, 1964)[6]

Hénon と Heiles は一般的に問題を取扱ったのではなく，種々の trial の後，次の例について計算を行なった.

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + 2x^2y - \frac{2}{3}y^3\right) \tag{2.1}$$

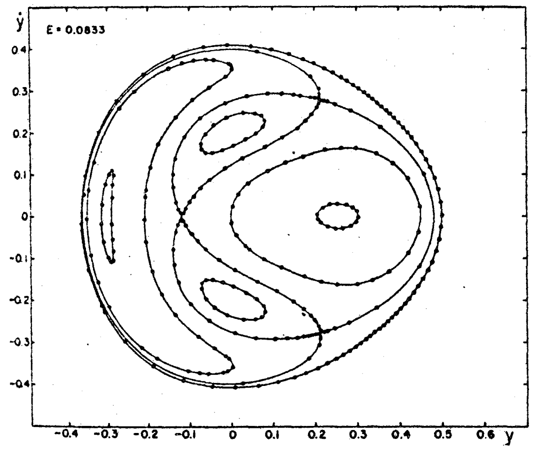
(2次だけをとると $\omega_1/\omega_2 = 1$ で明らかに resonance case である.) そして energy $E$ を与えて phase space を3次元に限定し，さらに $x=0$, ($\dot{x}>0$) を surface without contact[7] とした．この面は boundary 以外は $\dot{x}=0$ とはならない．この面上の任意の点($P_1$) から出発して，3次元 space を運動した後に再びこの面にもどる点を $P_2$ としよう．これは一つの mapping を表わし，しかも area preserving になる．もし energy 以外に積分が存在するとすると運動は2次元の曲面に制限されるため，それと $x=0$ との交線は $x=0$ 面内の曲線を表わす．それ故その場合 $P_1, P_2, P_3, \cdots$ は一つの曲線上に乗ることが期待される．それに反して，積分が存在せず ergodic 的であるとすれば $x=0$ 面内での successive mapping points は同様に面内に一様にうめつくすと考えられる．実際 (2.1) の場合はどうであろうか．彼等は微分方程式

$$\ddot{x} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -x - 2xy \Big\} \tag{2.2}$$

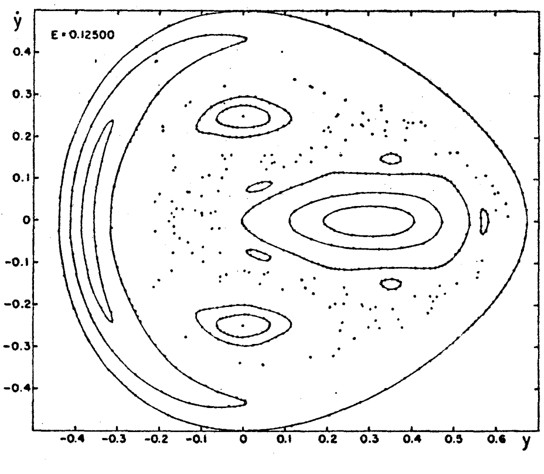
$$\ddot{y} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -y - x^2 + y^2 \Big\}$$

を実際に数値計算で解き，その結果を図示した．

($x=0$ 自身 solution になっているのは(2.2)から明らかであるが，それが図での boundary に相当している)．彼等の結果を図1～3で与える．energy constant が小さい場合は mapping points はある曲線の上に乗っているが energy が大きくなるにつれ，一部はそのまま regular な結果を与えるが，一部は ergodic 的であるように見える．さらに energy を大きくすると(才3図)もはや regular な部分(これを彼等は島と呼んだ)は殆んどなくな

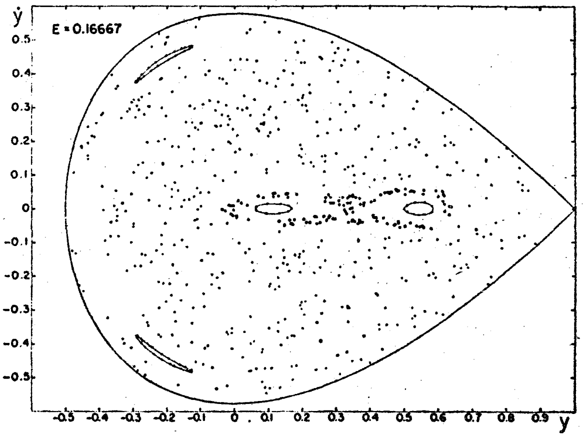



才1図．$x=0$ 面内での successive points：
($x, y, \dot{y}$) space での運動の orbit が
$x=0$ をよぎる点を求めたもの．
$E = 0.0833$

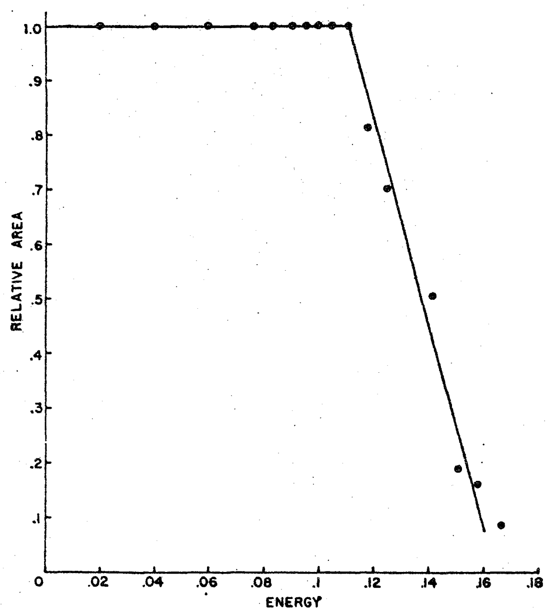



才2図　同上
$E = 0.12500$

り，ほとんどすべての点がergodicになっているように思われる（これを海と呼んだ）。




第3図　同上，$E = 0.1667$




第4図　energyに対するregularの面積の割合

以上の結果は数値積分の精度以内でのことで，厳密ではない。しかしそこに質的に異なった様子を示していることは争えない。Kolmogorov[5]，Moser[6]の理論によれば，ここでregularな場合であってもmappingが周期的に近い時（これは初めの運動方程式の2つの基本周期が整数比に近いことを意味するが）はその近傍では不安定領域が現われてもよい。しかし，それは非常にせまい領域なので数値計算的には認められないぐらいのもののようである。さらに興味あることは，energy value に対するこの島の面積である（第4図）。

energy のある値を境に急に島の面積の割合が減って，しかもそれが直線的なことである．このことは物理的にも興味あることであるのみならず，数学的にも証明さるべきことであると思われる．

## §3．積分の意味

以上見てきた様に問題は積分が存在するかどうかということと深くかかわっている．有限の $t$ の範囲ではあまり問題はないが $-\infty<t<+\infty$ にわたって一定の値を取るということになると問題が急にむずかしくなる．普通積分とは，座標，運動量（又は速度）の一意関数で，ある domain 内で正則であることを意味することが多い．しかし，正則でなくてもよいが，積分が一定値を取る領域が全体の space よりも次元の低い space になることを暗々裡に考えている．その意味をはっきりあらわすために isolating integral という言葉を用いる．数学的表現ではないので厳密な定義は出来ないが，一応，phase space 上で与えられた関数で，運動にそって一定値を取り，しかも任意の相異なる積分値をもつ二つの sub space 間の相互の距離は 0 ではない，ということにしておこう．（しかも普通積分の値域は discrete ではなく，連続的であると考えている）．もしも運動が ergodic ならば，この様な意味での isolating integral は存在しない．

しかし積分を運動にそって一定値をもつ関数と定義するならば，いたる所一定の関数は ergodic 的な運動に対しての積分となる．又領域を二つにわけ，それぞれで ergodic な運動に対してはニつの領域で別々の値をもつ関数を積分と思ってもよい．ergodic の場合は constant 以外に連続な積分は存在しないように思われるが，その逆の statement は成立するであろうか．又積分を Schwartz の distribution にまで拡張した時はどうなるであろうか．結論は出ていないが，このような方向で考えたいと思っている．

さて問題を fix するために，前と同様に自由度2の力学系を考える．time-independent な Hamiltonian で表わされて，したがって energy 積分が存在する場合とする．

$$\ddot{x} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad \ddot{y} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \tag{3.1}$$

この場合 $f(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \mathrm{const}$ （運動にそって）

は $\dot{x}\frac{\partial f}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = 0$ となる． (3.2)

ここで $f$ を distribution にまで拡張したとする．これを運動方程式に対して Liouville の方程式という．

今独立変数 $\dot{x}, \dot{y}$ のかわりに

$$\dot{x} = \sqrt{2(E-\Phi)}\cos\psi \tag{3.3}$$

$$\dot{y} = \sqrt{2(E-\Phi)}\sin\psi \Big\rfloor$$

を用いると（ E は energy),

$$2\Psi\left(\cos\psi\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\psi\frac{\partial f}{\partial y}\right)+\left(-\sin\psi\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\cos\psi\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial\psi}=0 \qquad (3.4)$$

となり当然ではあるがEに関する偏微分を含まない、ここで $\Psi=E-\Phi$ で $2\Psi$ がその点での velocity の2乗，$\dot{x}^2+\dot{y}^2$ を表わす、さて次の様に Fourier 展開するとする、

$$f=\sum_{-\infty}^{\infty} f_m e^{m\psi i} \quad (\ f \text{ が real であるとすれば } \bar{f}_m=f_{-m} \qquad (3.5)$$

$\bar{f}_m$ は $f_m$ の conjugate complex である、

これを (3.4) に代入して同じ $e^{m\psi i}$ の係数を equate すると，

$$\begin{aligned}&\Psi\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)f_{m+1}+\frac{m+1}{2}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}+i\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)f_{m+1}\\&-\Psi\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)f_{m-1}-\frac{m-1}{2}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}-i\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)f_{m-1}=0\end{aligned} \qquad (3.6)$$

となる、これは又次の様にもかける、($\Psi\neq 0$として)

$$\Psi^{-\left(\frac{m+1}{2}\right)}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(\Psi^{\frac{m+1}{2}}f_{m+1}\right)=-\Psi^{\frac{m-1}{2}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\Psi^{-\frac{m-1}{2}}f_{m-1}\right) \qquad (3.6')$$

ここで $z=x+iy$，$\bar{z}=x-iy$

形式的には $$\Psi^{\frac{m+1}{2}}f_{m+1} = -\int\Psi^{m}\frac{\partial}{\partial z}\left(\Psi^{-\frac{m-1}{2}}f_{m-1}\right)d\bar{z} \qquad (3.7)$$

となるが boundary では $\Psi=0$ であり，そこでは singular なので，この形での solution の実際の意味についてはよくわからない．しかし (3.6)~(3.7) を見ると，$f_{m+1}$ と $f_{m-1}$ の関係を与えており，suffix が偶数のものと奇数のものとがそれぞれ別々に決められることを意味している、偶数の場合は $f_0$ を適当にきめれば $f_m$ (したがって $f_{-m}$ も) successive に決って行く

ような形になっている.

奇数のものについては $f_1$ と $f_{-1}$ $(=\bar{f}_1)$ との関係であるから これは $f_1$ の *real part* と *imaginary part* の間の関係を表わしている. 実際 $h(x,y)$ を任意の *real* な関数として

$$f_1 = i\Psi^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial h}{\partial z}, \qquad f_{-1} = -i\Psi^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial h}{\partial \bar{z}} \tag{3.8}$$

が *solution* になっていることは明らか.

このhを適当にとることにより $f_{2m+1}$ が求まる.($f_{-2m-1}$ も同様)

しかし以上のことはあくまでも形式的なことである.

## § 4. Hamilton-Jacobi 方程式との関係

さて簡単な場合として

$$f_m = X^m Z \tag{4.1}$$

の形で(3.6)が満足されていることを示そう.(4.1)を(3.6)に代入すると

$$(m+1)\Psi X^m\left(\frac{\partial X}{\partial x}+i\frac{\partial X}{\partial y}\right)Z+\Psi X^{m+1}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}+i\frac{\partial Z}{\partial y}\right)+\frac{m+1}{2}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}+i\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)X^{m+1}Z$$
$$+(m-1)\Psi X^{m-2}\left(\frac{\partial X}{\partial x}-i\frac{\partial X}{\partial y}\right)Z+\Psi X^{m-1}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}-i\frac{\partial Z}{\partial y}\right)-\frac{m-1}{2}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}-i\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)X^{m-1}Z=0 \tag{4.2}$$

(4.2)で $m=0$ とし, それに $X^m$ をかけたものを(4.2)から引くと.

$$mX^mZ\left[\Psi\left(\frac{\partial X}{\partial x}+i\frac{\partial X}{\partial y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}+i\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)X+\Psi X^{-2}\left(\frac{\partial X}{\partial x}-i\frac{\partial X}{\partial y}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}-i\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)X^{-1}\right]=0 \tag{4.3}$$

故に $Z \neq 0$ の所で $[\qquad\qquad] = 0$ (4.4)

ここに $m$ が入っていないから, すべての $m$ について成立つ

したがって(4.1)の形の *solution* が存在することがわかる.(4.4)を書き直すと,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\Psi^{\frac{1}{2}}\chi\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\Psi^{\frac{1}{2}}\chi^{-1}\right) \qquad (\Psi \neq 0 \text{ として}) \tag{4.5}$$

すなわち

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\,\Psi^{\frac{1}{2}}\chi &= \left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)W \\ \sqrt{2}\,\Psi^{\frac{1}{2}}\chi^{-1} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)W\end{aligned} \tag{4.6}$$

これから

$$2\Psi=\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 \tag{4.7}$$

すなわち

$$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2\right)+\Phi=E \tag{4.7'}$$

これは Hamilton-Jacobi の偏微分方程式[9),10)]で $W$ を *characteristic function* と呼ぶ.

$$f=Z\sum_{-\infty}^{\infty} f_m e^{im\psi} \tag{4.8}$$

が意味をもつためには $\chi=e^{-Xi}$ ( $X$ は *real* ) (4.9)

でなければならない. この時 (4.6) から $W$ が *real* であることがわかる. 又この時

$$f=Z\sum_{-\infty}^{\infty} e^{m(\psi-X)i}=2\pi Z\delta(\psi-X) \tag{4.10}$$

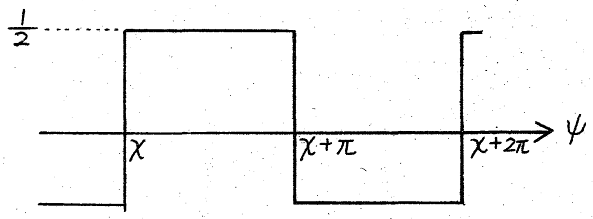
$\delta$ は Dirac の $\delta$ 関数[11)].

(4.5) は
$$f_{2m+1}=\frac{\chi^{2m+1}}{(2m+1)\pi i} \tag{4.11}$$

としても出てくる (この時 $f_{2m}=0$ とする).

$$f=\frac{1}{i\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{e^{(2m+1)(\psi-X)i}}{2m+1}=\frac{1}{\pi}\int_X^{\psi}\Sigma e^{(2m+1)(\psi-X)i}\,d\psi$$

$$f = \int_{\chi}^{\psi} \delta(\psi-\chi) - \delta(\psi-\chi-\pi)\, d\psi \tag{4.12}$$




第5図　(4.12)で与えられる$f$の形

さて(4.2)において$Z$に関する方程式は

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)(\Psi^{\frac{1}{2}}XZ)+\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)(\Psi^{\frac{1}{2}}X^{-1}Z)=0 \tag{4.13}$$

と書かれる。

今$(x,y)$ plane での軌道を　$a(x,y)=0$　$(t_0<t<t_1)$ で表わしたものとすると，物理的には明らかであるが，数学的にも

$$Z = \Psi^{-\frac{1}{2}}\delta(a(x,y)) \tag{4.14}$$

が(4.13)を満足することが証明できる。これは一つの particle の軌道を表わしているからである。即ち

$$f = \Psi^{-\frac{1}{2}}\delta(a(x,y))\delta(\psi-\chi)$$

$\Psi^{-\frac{1}{2}}$ の factor は軌道上で速度の逆数に比例しているわけで，そこでの密度（線密度）を与えていることになる。$\delta(\psi-\chi)$ の factor は velocity の方向（$\psi$）が，Hamilton-Jacobi から決まる $\chi(x,y)$ ただ一つの方向しかないことを意味する。

同様に(4.12)に対しても物理的（又は直観的）な意味づけがなされる筈であるが，まだできていない。

さて Hamilton-Jacobi の方程式の solution $W$ は，$W=Et$

で与えられる particle 群の波面に相当[10]しているので一般には $W$ 自身が $(x, y)$ で1価というわけには行かない。しかし grad $W$ すなわち $x', y'$ はどうであろうか。 ergodic の場合は無限多価になるであろうが、isolating integral が存在する場合はどうか、 この場合は数学的には厳密ではないのではっきりは言えないが、Kolmogorov[4], Moser[5] の定理が成立つような場合、すなわち平衡点近傍で invariant surface が存在するような場合は $(x, y, \psi)$ 空間で考えてもやはり invariant surface が存在することが期待されるので、その $(x, y)$ plane への projection は一般に有限多価になると思われる。($(x, y, \psi)$ では一価)。一般に与えられた力学系でこのようになるかどうかは勿論何とも言えないが、Hénon-Heiles の regular の場合のあるものが、実際に invariant surface に対応しているものがあってもよさそうである(勿論全部ではない。周期的軌道の近傍のうちには不安定なものも存在するから)。

したがってこれ等の solution 全部を含みうる(3.6) に於て有限多価の $f_m$ が求められれば、invariant surface が存在するかどうかの目安になるのではないかと思われる。invariant surface が存在する場合 $(x, y, \psi)$ space で delta 関数的なものが存在してもよさそうであり、(2次元の空間をのぞいて 0) 又その invariant surface が $(x, y, \psi)$ space を2つの部分にわけ

るならば，その一方で1，他方で0というsolutionも可能となる（なお(4.12)がそのようなものに対比していると思えたが，どうもそうではなさそうである）．

以上数学的にはあまり厳密ではないが，力学系の積分の存在ということについて考えていることをまとめた次第です．

## 文献


1) Poincaré, H., Méthodes Novvelles de la Mécanique Céleste Tome 1, chap 5, 1892

2) Birkhoff, G. D., Dynamical System, chap. 3 1927

3) Whittaker, E. T., A Treatise on the Analytical Dynamics p. 433, 1937

4) Kolmogorov, A. N., Intern. Congress Math. Amsterdam 1954 ⊥, 315, 1957.

5) Moser, J., Nach, Akad, Wiss. Göttingen 1962, No. 1.

6) Hénon, M. and Heiles, C., Astronomical Journal 69, 73, 1964

7) Poincaré, H., Methodes Novvelles, Tome 3, chap. 27, 1899

8) Arnold, V. I., and Avez, A., Ergodic Problem of Classical Mechanics chap. 2, Benjamin, 1968

9) Whittaker E. T., loc. cit. p. 315

10) Goldstein, H., Classical Mechanics, chap. 9, Addison-Welsley 1950

11) Schwartz, L., Methódes Math. pour les Sciences Physiques, p. 169, Hermann 1965