数理解析研究所講究録
第176巻 1973年 74-88

制限三体問題について

東大 教養 斉藤 利弥

この講演の目的は制限三体問題の数学的定式化と、G. D. Birkhoff の論文

The Restricted Problem of Three Bodies, Rend. Circ. Mat. Palermo. vol. 39 (1915), 265-334

のほんの一部とを紹介することである。

§1. 運動方程式

三つの天体 S, J, P が互いに万有引力で引きあいながら運動しているとき、それらの天体の運動を調べるのが三体問題であるが、特に、P の質量が S, J の質量に比べてきわめて小さいという仮定のもとでこの問題をとりあつかうのが、制限三体問題 (Restricted problem of three bodies) である。

S と J との質量の和を質量の単位にとり、S の質量を μ, J の質量を $1-\mu$, P の質量を m とする。$m \to 0$ となった極限の場合が制限三体問題である。

このとき、S と J との運動には P からの引力は影響を与えないから、S と J との運動は二体問題として決定できる。し

たがって，それらはいずれもSとJとの重心を焦点とする楕円の上を動く．問題を簡単にするために，SとJとの軌道が円となる場合のみを考える．（エネルギー積分の値をE，角運動量積分の値をh，万有引力常数をkとすれば，$2h^2E+k^2\mu^6=0$のとき，このような情況が実現される．）

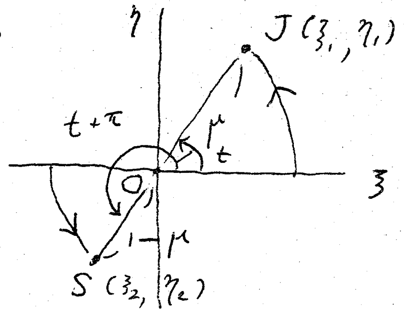
SとJとの運動のおこっている平面上に，SとJとの重心を原点とする直交座標系(ξ,η)を導入し，また$\overline{SJ}$の距離を長さの単位にとり，ξ軸を適当な方向にとれば，時刻tにおけるJの座標(ξ_1,η_1)は時間の単位を適当にとれば

$$\xi_1=\mu\cos t,\quad \eta_1=\mu\sin t$$

Sの座標(ξ_2,η_2)は

$$\xi_2=(1-\mu)\cos(t+\pi),\quad \eta_2=(1-\mu)\sin(t+\pi)$$

で与えられることが，簡単な計算により確かめられる．ゆえにS，J，および座標の原点（すなわちS，Jの重心）Oはつねに一直線上にあり，この直線は角速度1で回転している．



これら二つの質点S，Jからの引力の下でPの行なう運動は次の運動方程式によって与えられる．

Pの座標を(ξ,η)として，

$$\overline{PJ}=\sqrt{(\xi-\xi_1)^2+(\eta-\eta_1)^2}=\rho_1,\quad \overline{PS}=\sqrt{(\xi-\xi_2)^2+(\eta-\eta_2)^2}=\rho_2$$

とおけば

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{(1-\mu)(\xi-\xi_1)}{\rho_1^3} - \frac{\mu(\xi-\xi_2)}{\rho_2^3},$$
$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = -\frac{(1-\mu)(\eta-\eta_1)}{\rho_1^3} - \frac{\mu(\eta-\eta_2)}{\rho_2^3},$$

$$\xi_1 = \mu\cos t,\ \eta_1 = \mu\sin t,\ \xi_2 = (1-\mu)\cos(t+\pi),\ \eta_2 = (1-\mu)\sin(t+\pi)$$

この微分方程式は t を explicit に含んでいるので力学系としてのとりあつかいができない。t を explicit に含まない方程式に直すために、O を原点、直線 SOJ を x 軸、それに直交する直線を y 軸にとり、$\xi\eta$ 系に対して角速度 1 で回転する座標系 (x, y) を新にえらぶ。この座標系に関する運動方程式は

$$(1)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} - x = -\frac{\partial U}{\partial x},\quad \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} - y = -\frac{\partial U}{\partial y},$$
$$U = -\frac{1-\mu}{\rho_1} - \frac{\mu}{\rho_2},\quad \rho_1 = \sqrt{(x-\mu)^2+y^2},\quad \rho_2 = \sqrt{(x+1-\mu)^2+y^2}$$

（新しい座標系に関する J, S の座標はそれぞれ $(\mu, 0)$, $(-1+\mu, 0)$ となるので $\rho_1 = \overline{PJ}$, $\rho_2 = \overline{SJ}$ は上式で与えられる。）

力学系的取り扱いをするために一階の方程式に書き直せば

$$(2)\qquad \frac{dx}{dt} = u,\quad \frac{dy}{dt} = v,\quad \frac{du}{dt} = x + 2v - \frac{\partial U}{\partial x},\quad \frac{dv}{dt} = y - 2u - \frac{\partial U}{\partial y}$$

あるいは、(1) が、

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + (x\dot{y} - \dot{x}y) + \frac{1}{2}(x^2+y^2) - U$$

を Lagrangian とする変分問題 $\delta\int L\,dt = 0$ の Euler 方程式になっていることに注意すれば、(1) はまた

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_x},\quad \frac{dy}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_y},\quad \frac{dp_x}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x},\quad \frac{dp_y}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial y},$$

(3)

$$H=\frac{1}{2}(p_x^2+p_y^2)+(yp_x-xp_y)+U,\quad (p_x=\dot{x}-y,\ p_y=\dot{y}+x)$$

のようなHamiltonian formに書くこともできる。

(3)から直ちに(1)はHを積分にもつことがわかる。これをJacobiの積分という。Jacobiの積分はまた

(4) $$H=\frac{1}{2}(u^2+v^2)-\frac{1}{2}(x^2+y^2)+U$$

と書くこともできる。

(以上の議論ではS, J, Pが同一平面上を動くと仮定している。制限三体問題の重要な応用の一つである小惑星の運動，すなわちSが太陽，Jが木星，Pが小惑星である場合にはこの仮定がほぼ実現されているようである。)

§2. 特異点

以後主として微分方程式(2)について議論する。

(2)のtrivialな解，すなわち特異点は

$$u=v=0,\quad x=\frac{\partial U}{\partial x},\quad y=\frac{\partial U}{\partial y}$$

で与えられる。ゆえにこれはxy平面上で

(5)
$$\frac{(1-\mu)(x-\mu)}{((x-\mu^2)+y^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{\mu(x+1-\mu)}{((x+1-\mu)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}-x=0,$$
$$\frac{(1-\mu)y}{((x-\mu)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{\mu y}{((x+1-\mu)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}-y=0,$$

を満足する点である。(5)から直ちに

$$y=0, \quad \text{または} \quad \frac{1-\mu}{((x-\mu)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{\mu}{((x+1-\mu)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}-1=0$$

を得る。$y=0$ の時には

$$\frac{(1-\mu)(x-\mu)}{|x-\mu|^3}+\frac{\mu(x+1-\mu)}{|x+1-\mu|^3}-x=0$$

で、これを満たす x の値は、$(-\infty, -1+\mu)$, $(-1+\mu, \mu)$, (μ, ∞) にそれぞれ一つずつ存在することが容易にわかる。これをそれぞれ x_1, x_2, x_3 とするならば、特異点は $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$, $(x_3, 0)$ である。

$y \neq 0$ の場合は、上に書き下した式の簡単な変形により、

$$(x-\mu)^2+y^2=(x+1-\mu)^2+y^2=1$$

が得られ、特異点は SJ を一辺とする二つの正三角形の頂点

$$P_1:\left(\mu-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad P_2:\left(\mu-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

にあることがわかる。これら五つの特異点を <u>Lagrangeの平衡点</u>という。

これらのうち $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$, $(x_3, 0)$ が不安定であることは直ちにわかる。P_1, P_2 については、

$$\mu(1-\mu) > \frac{1}{27}$$

のとき不安定になることが直ちにわかる。

$$\mu(1-\mu) \leq \frac{1}{27}$$

のときは，微分方程式の右辺をP_1，P_2の近傍でTaylor展開したときの1次の項の係数のつくる行列の固有値がすべて純虚数になるので，安定性は直ちにはわからない。しかしいくつかの例外的なμの値を除けば，実はP_1，P_2は安定な（しかも両側に安定な）特異点であることが証明されているようである。（C. L. Siegel & J. Moser, Lectures on celestical mechanics, Springer, 1971）

§3. 積分曲面の分類

$$F = -\frac{1}{2}(x^2+y^2)+U$$

と書けば，Jacobiの積分(4)は

$$(6)\qquad H = \frac{1}{2}(u^2+v^2)+F$$

と書ける。$H=E$（E：定数）で与えられる積分曲面がどのようなものかを調べるために，(6)を使って$H=E$を

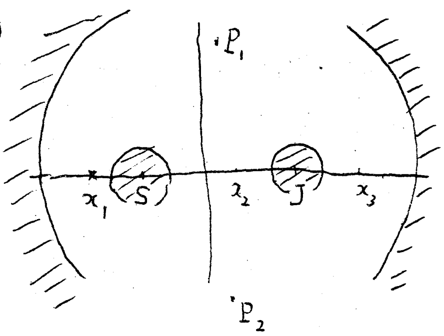
$$(7)\qquad F = -\frac{1}{2}(u^2+v^2)+E$$

と書き直す。(7)から直ちに$F \leqq E$で，$H=E$の上の点の，xy平面への射影は，領域$F \leqq E$の中にくる。したがって，積分曲面$H=E$の上にのっているorbitのxy平面への射影は領域$F \leqq E$に属する。この領域の境界$F=E$は，$H=E$とxy平面との交線で，零速度曲線とよばれる。Eのいろいろな値に対する$F \leqq E$を調べてみよう。

$$E_1 = F(x_1, 0),\quad E_2 = F(x_2, 0),\quad E_3 = F(x_3, 0),$$
$$E_4 = F\left(\mu - \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = F\left(\mu - \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

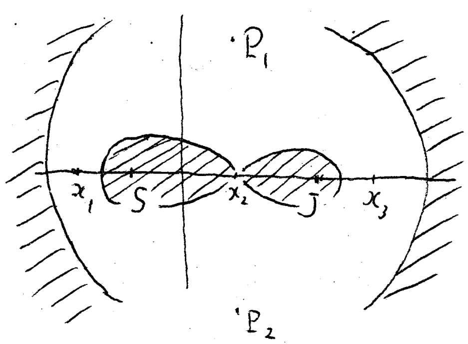
とおくと, $E_2 < E_1, E_3 < E_4$ で, E_1 と E_3 の大小は μ の値に関係することがわかる. 仮に $E_1 < E_3$ とすると, $F \leqq E$ の形は図の斜線の部分で表わされる.

(1)



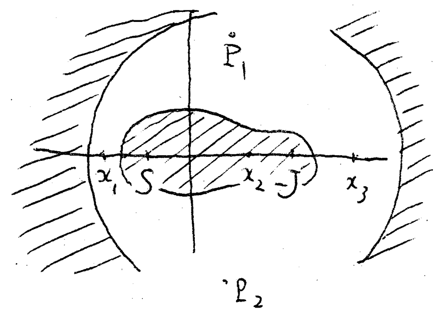
$-\infty < E < E_2$

(2)



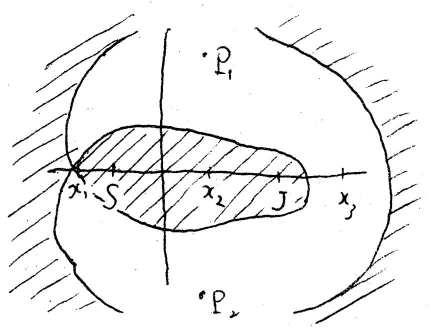
$E = E_2$

(3)



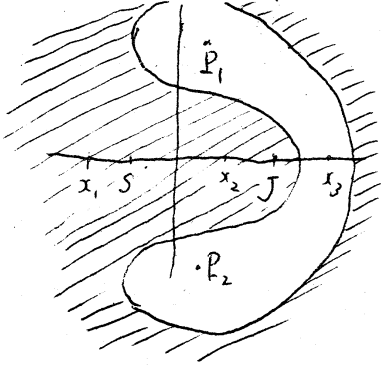
$E_2 < E < E_1$

(4)



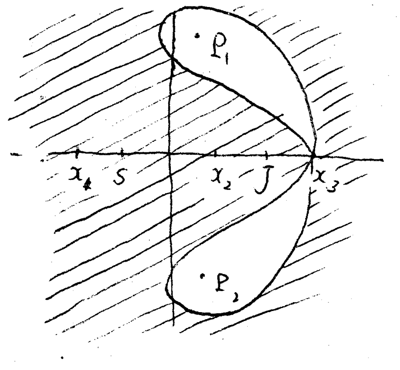
$E = E_1$

(5)



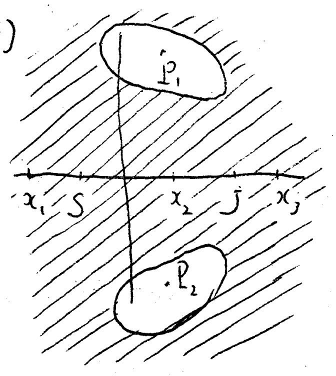
$E_1 < E < E_3$

(6)



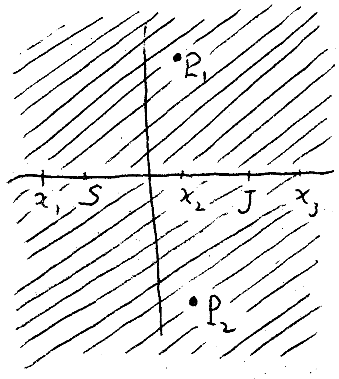
$E = E_3$

(7)



$E_3 < E < E_4$

(8)



$E = E_4$

今までに比較的くわしく調べられているのは(1)の場合でしかも，JまたはSのまわりのovalの内部で運動がおこる場合である。

(2), (4), (6), (8)のように，$H=E$がsingularityをもつ場合を除き，さらに$F \leqq E$が有界でない場合を除けば，上で述べた場合と，(3)で，運動が内側のovalの内部でおこる場合だけが残る．今後は主としてその場合を調べる．

§4 Regularization

(1)および(3)で，しかも$F \leqq E$がcompactになる場合を考えても，その時には$F \leqq E$の中に$\rho_1 = 0$又は$\rho_2 = 0$となる所がふくまれていて，そこではu, vが有界にならないので$H=E$はcompactにならない．Birkhoffは巧妙な変数変換とreparametrizationを行なって，微分方程式が上記の領域に特異性をもたず，したがって$H=E$がcompactなmanifoldになる

ようにできることを示した.

$$z = x+iy, \qquad w = \xi + i\eta$$

$$(8) \qquad \frac{z+1-\mu}{z-\mu} = \left(\frac{w+1-\mu}{w-\mu}\right)^2$$

によって (x, y) から (ξ, η) に変数をうつす. この変換によって $x=\mu,\ y=0$; $x=-1+\mu,\ y=0$ はそれぞれ $\xi=\mu,\ \eta=0$; $\xi=-1+\mu,\ \eta=0$ にうつる.

$$R_1 = \sqrt{(\xi-\mu)^2+\eta^2}, \quad R_2 = \sqrt{(\xi+1-\mu)^2+\eta^2}, \quad R_3 = \sqrt{(\xi+\tfrac{1}{2}-\mu)^2+\eta^2}$$

とおき, さらに

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{4R_3^4}{R_1^2R_2^2}$$

によって新しいパラメーター τ を定義する. 後で調べるように $R_3=0$, すなわち ~~$(\xi-\frac{1}{2}$~~ $\xi=\mu-\frac{1}{2},\ \eta=0$ は xy 平面の無限遠点に対応するので, $F \leqq E$ が有界ならば, その範囲では, τ は t とともに単調に増加するパラメーターである.

このとき微分方程式 (2) は

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \xi', \quad \frac{d\eta}{d\tau} = \eta', \quad \frac{d\xi'}{d\tau} = \frac{1}{2}\frac{R_1^2R_2^2}{R_3^4}\eta' + \frac{\partial\Omega}{\partial\xi}, \quad \frac{d\eta'}{d\tau} = -\frac{1}{2}\frac{R_1^2R_2^2}{R_3^4}\xi' + \frac{\partial\Omega}{\partial\eta}$$

$$\Omega = \frac{R_1^2R_2^2}{R_3^4}\left[\frac{(1-\mu)R_1^4+\mu R_2^4}{8R_3^2} + 2R_3\left(\frac{1-\mu}{R_1^2}+\frac{\mu}{R_2^2}\right) - \frac{\mu(1-\mu)}{2}\right]$$

となり, この方程式は $R_3=0$ 以外に特異性をもたない. そして Jacobi の積分は

$$H = \frac{2R_3^4}{R_1^2R_2^2}\left(\xi'^2+\eta'^2 - \Phi(\xi,\eta)\right),$$

$$\Phi(\xi,\eta) = \frac{R_1^2R_2^2}{16R_3^6}\left((1-\mu)R_1^4+\mu R_2^4\right) + \frac{1}{R_3^3}\left((1-\mu)R_2^2+\mu R_1^2\right) - \frac{\mu(1-\mu)R_1^2R_2^2}{4R_3^4}$$

と書かれ，積分曲面 $H=E$ は

$$\xi'^2+\eta'^2 = \Phi(\xi,\eta) = \frac{R_1^2R_2^2}{16R_3^6}\left((1-\mu)R_1^4+\mu R_2^4\right) + \frac{1}{R_3^3}\left((1-\mu)R_2^2+\mu R_1^2\right) + \left(2E-\mu(1-\mu)\right)\frac{R_1^2R_2^2}{4R_3^4}$$

と書かれる．この変換がBirkhoffのregularizationである．

変換 (8) により，z の一つの値には一般に w の二つの値 w_1, w_2 が対応し，分岐点は $z=\mu$, $z=-1+\mu$ である．

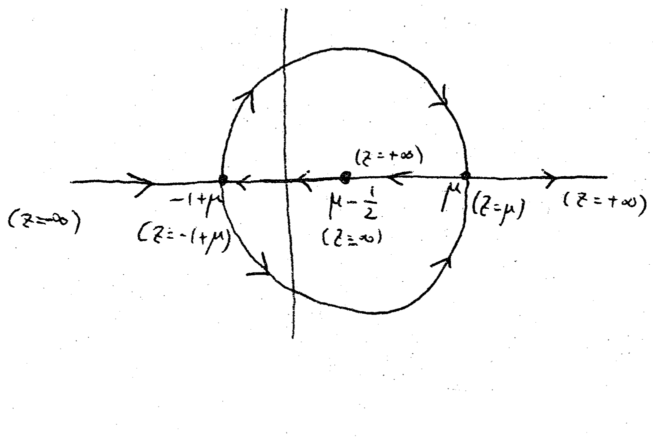
$\mathrm{Im}\,z\neq 0$ ならばそれに対応する w もやはり $\mathrm{Im}\,w\neq 0$ で，しかも $\mathrm{Im}\,w_1$ と $\mathrm{Im}\,w_2$ は反対符号になる．したがってたとえば，$\mathrm{Im}\,w_1>0$, $\mathrm{Im}\,w_2<0$ と考えてよい．

また，(8) を w について解いて $z=\infty$ の近傍でTaylor展開すれば

$$w = \begin{cases} 2z + \dfrac{1-2\mu}{2} + \cdots \\ -\dfrac{1-2\mu}{2} + \cdots \end{cases} \qquad (\cdots \text{は } \tfrac{1}{z} \text{ の正のべき級数})$$

となるから $z=\infty$ は，w 平面では ∞ と，$-\frac{1-2\mu}{2}=\mu-\frac{1}{2}$ とに対応する．

z が実軸上を $-\infty$ から $+\infty$ までうごくときの w の変化は図のようになる．

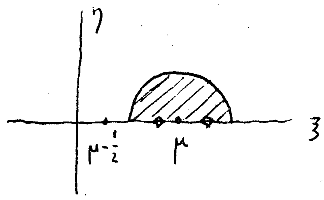


以上のことから，$\mathrm{Im}\,z=0$ の所を除けば，z 平面と w の上半平面との対応は $1-1$ であり，$\mathrm{Im}\,z=0$

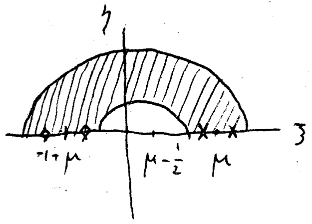
の所でも $-1+\mu \leqq z \leqq \mu$ の範囲は，それに対応するwの値を，wの上半平面に一つしかもたない．ただ$(-\infty, -1+\mu)$と(μ, ∞)に属するzに対してのみは，w_1, w_2がともにw平面の実軸上にあらわれる．

領域$F \leqq E$は，w平面では$\Phi(\xi, \eta) \geqq 0$に変わる．そして領域$\Phi(\xi, \eta) \geqq 0$の，$\mathrm{Im}\, w \geqq 0$に属する部分だけをとると，この領域は$\mathrm{Im}\, w = 0$の所を除けば，領域$F \leqq E$と$1-1$に対応する．

場合(1)の，Jのまわりのovalは，図のように，w平面での，点$(\mu, 0)$のまわりのovalの上半部とほぼ一対一に対応する．ただし$\eta = 0$の所では二つのwの値がその一つの値に対応する．



場合(3)の，S, Jを同時にかこむovalは右図の斜線を施した部分とほぼ一対一に対応する．ただし$\eta = 0$の部分だけは一対二になることは上の場合と同様である．



§5 積分曲面の形の決定

いままでに得られた結果を基にしてBirkhoffは 積分曲面$H = E$がどのような多様体と位相同型であるかを決

定する．その方法はきわめて elementary でしかも巧妙である．

まずwの上半平面 $\mathrm{Im}\, w = \eta \geqq 0$ において考える．$H=E$ は $\xi'^2 + \eta'^2 = \Phi(\xi, \eta)$ で与えられる．ゆえに

(9) $$\eta' = \pm\sqrt{\Phi(\xi,\eta) - \xi'^2}$$

であるから，$\Phi(\xi,\eta) \geqq 0$ であるような (ξ, η) に対して

$$\xi'^2 < \Phi(\xi,\eta)$$

となるような ξ' の値を一つ決めると，それに対して (9) により η' の値が二つ決まる．また

$$\xi'^2 = \Phi(\xi,\eta)$$

であるような ξ' の値を一つ決めると，それに対して (9) により η' の値がただ一つ，すなわち $\eta'=0$ が決まる．

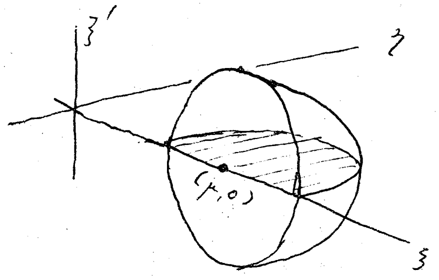
そこで次のようにする．

$\xi\eta$ 平面の $\eta \geqq 0$ の部分に領域 $\Phi(\xi,\eta) \geqq 0$ をとり，その上の各点 (ξ,η) と，線分 $-\sqrt{\Phi(\xi,\eta)} \leqq \xi' \leqq \sqrt{\Phi(\xi,\eta)}$ との積をつくり，これを Π とする．$\Pi = \bigcup_{\Phi(\xi,\eta)\geqq 0} \{(\xi,\eta)\} \times \{\xi' \mid -\sqrt{\Phi} \leqq \xi' \leqq \sqrt{\Phi}\}$

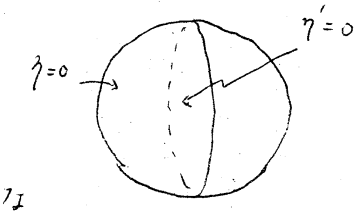
このような Π を二つ用意し，一方は $\eta' \geqq 0$ に対応するものとしてそれを Π_+，他方は $\eta' \leqq 0$ に対応するものとしてそれを Π_- で表わす．Π_+，Π_- の表面である $\xi'^2 = \Phi(\xi,\eta)$ においては二つの η' が一致してともに 0 になるから，Π_+ と Π_- とをこの表面ではりあわせる．それを Π' とすればこれがほぼ $H=E$ と同相な集合になる．しかし $\eta=0$ の部分では一組の (x,y) に対応する

る ξ の値が二つでてきているので，Π' においてそれらの二点を identify してやらねばならない．この identification によって積分曲面 $H=E$ が完成する．

(1) の場合の J をとりまく oval についてこれをやってみよう．このとき $\Phi(\xi,\eta) \geqq 0$, $\eta \geqq 0$ はすでにしめしたような半円状の領域になるので，その各点に線分 $-\sqrt{\Phi} \leqq \xi' \leqq \sqrt{\Phi}$ を立てると，



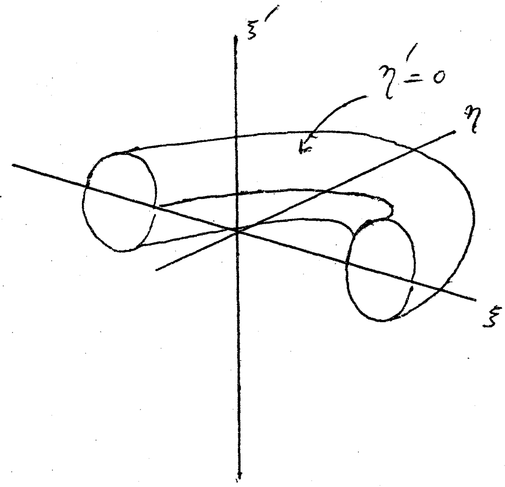
図のような半球状の立体ができる．これが Π である．そしてこの球の表面に当るところが $\xi'^2 = \Phi(\xi,\eta)$，すなわち $\eta'=0$ に対応する．そこで，この半球を二つ (Π_+ と Π_-) つくって，球の表面に沿ってはり合わせると一つの球ができて，球の表面が $\eta=0$ に対応する．ここでは，$(x,y) \to (\xi,\eta)$ の対応が（分岐点 $x=\mu$, $y=0$ を除き）1対2なので，二点を identify しなければいけない．

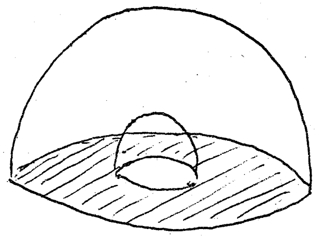


$x=\mu$, $y=0$ に対しては (ξ,η) は一つしか定まらないが，二つの分枝に対応する (ξ',η') の値が $x\to\mu$, $y\to 0$ のとき一致しないので，この球面の上ではやはり二つの点がそれに対応する．したがって $H=E$ は，solid sphere においてその表面上の二点を identify したものになる．適当に deformation を行なえば，これは antipode を identify することにな

るので，H＝Eは射影空間P^3と同相なことがわかる．

(3)の場合，J, Sをかこむovalについて同様な考察をおこなえば，Πは図のように solid torus を半分に切った形になる，torusの表面が$\eta'=0$に対応するから，このような solid torus を二つ，表面に沿ってはりつけなければならない．それを見やすくするには，solid torus を半分に切った図形を，二つの同心半球の間の領域に deform する．このとき，





torus の表面が下の図の斜線の部分に対応し，torusの切り口である二つの円板がそれぞれ同心半球の内面と外面とに対応する．torusをはりあわせる操作は，このような同心半球を二つつくって，図の斜線の部分でそれらをはりあわせることになり，したがって同心球の間の領域が得られる．$\eta=0$の部分での identification は，外側の球面，内側の球面それぞれについて antipode を identify したのと同等になる．

§6. その他の結果

Birkhoffは次に、場合(1)で、運動がJをとりまくovalの内部でおこる場合をくわしく調べている。彼はそれを$\mu=0$からのperturbationとしてあつかった。

Kepler変数に変数変換し、この変数については力学系がring domainのsurface of sectionをもつことを示し、問題をring domainのtwist mapに帰着させる。これは本質的にはPoincaréのideaである。

このtwist mapに対して、Poincaréによって予想され、Birkhoffによって証明された不動点定理(Poincaréの最後の定理)を適用することにより、無数の周期軌道の存在が証明されるのであるが、それについて述べている余裕はない。