数理解析研究所講究録
第176巻 1973年 89-104

SEMI-DYNAMICAL SYSTEM について

東北大理　加藤順二

[1]. 常微分方程式の定性的研究において、方程式の解の全体を dynamical system (R, X, π) としてとらえることによってさまざまなすぐれた成果が得られている. 函数微分方程式（差分微分方程式）においてもその解の全体がある種の dynamical system をなすと考えることによって同様な成果が期待される.

函数微分方程式（こゝでは遅れ時間をもつ場合 — retarded type のみを考える）は一般形として

$$(1) \qquad \dot{x}(t) = f(t, x_t)$$

で表わされる. こゝで, x_t は

$$x_t(s) = x(t+s), \quad s \in I,$$

で定義された連続函数の空間 $C(I,R^n)$ の要素を表わしている. I は区間 $(-\infty,0]$ あるいは $[-h,0]$ $(h>0)$ を表わし、$I=(-\infty,0]$ のとき infinite lag, $I=[-h,0]$ のとき finite lag をもつという.

函数微分方程式の大きな特徴はその解は左に向って(すなわち、独立変数 t の減少する方向に)は必らずしも定義されていないことである. O. Hajek [1], [2] はこのことに注目して、semi-dynamical system (R^+, X, π) の概念を与えた、これは N.P. Bhatia - O. Hajek [3] によってひきつづき研究された. また独立に Hale [4] によっても研究された.

函数微分方程式は常微分方程式の一般化であり、特別な場合として常微分方程式の場合を含んでいる. 同様に、semi-dynamical system は通常の dynamical system を含んでいる. したがって、semi-dynamical system に対する我々の関心が dynamical system に対して成立する多くの結果が semi-dynamical system に対しても成立することを期待しそれを示そうとすることに向けられるのは当然であり、[3] においてもその方向に努力が向けられ多くの事実が dynamical system と同様に成立することが示されている.

dynamical system の性質を調べる上で、相空間 X が局所 compact であることが多くの場合重要な仮定となっている

. [3] においても semi-dynamical system に関するその理論を展開する上で必要なかぎり相空間が局所 compact (あるいは rim-compact) であることを仮定した。

通常の常微分方程式をモデルとした dynamical system においては相空間は n 次元ユークリッド空間 R^n でありこの仮定は常にみたされていると考えても強い制限とはならない. しかしながら、函数微分方程式においては初期条件は空間 $C(I,R^n)$ の元によって与えられ、相空間としては $C(I,R^n)$ をとるのが自然である. $C(I,R^n)$ は(適当な)距離

$$d(\varphi)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{\|\varphi\|_k}{1+\|\varphi\|_k}$$

によって距離空間となる. こゝで、$I=\cup I_k$, I_k は compact な区間として、

$$\|\varphi\|_k=\sup\{|\varphi(\theta)|\,;\ \theta\in I_k\}. \tag{2}$$

さらに、I が compact な区間あるいは, $\varphi\in C(I,R^n)$ を I 上で有界な函数に制限した場合, ノルム

$$\|\varphi\|=\sup\{|\varphi(\theta)|\,;\ \theta\in I\}$$

によって norm 空間となる．しかし、いずれも完備であるが局所 compact ではない．したがって、semi-dynamical system のモデルを函数微分方程式にみている以上、その理論において局所 compact 性を相空間に対する仮定から除く必要がある．

一般の dynamical system に対して、その証明を improve することによって、いかに相空間から局所 compact 性の仮定を除くかという方向への努力はいくつかなされている [5]，[6]．しかし、ここでは、局所 compact 性の仮定が重要な要素となっている事実について、dynamical system の性質に制限を与えることによって、相空間から局所 compact 性を除くことを考える。そのために、函数微分方程式の解の持っている次の性質に注目する．

(1) の右辺 $f(t, \varphi)$ は t を explicit に含んでいない

$$\dot{x}(t) = f(x_t)$$

と仮定する．このとき，$t = 0$ において $x_0 = \varphi \in C(I, R^n)$ をみたす解 $x(t; \varphi)$ に対して

$$\pi(t, \varphi) = x_t(\varphi) \in C(I, R^n)$$

とおく．こゝで、類推されるように、

$$[x_t(\varphi)](\theta) = x(t+\theta;\varphi), \quad \theta \in I.$$

性質（I）．Kを相空間X（こゝでは、$X = C(I, R^n)$）のcompactな部分集合とする．各$x \in K$に対して、$\tau_x \in R^+ = [0, \infty)$がきまって、$x$に無関係な有界集合$B \subset X$に対して$\pi([0, \tau_x), x) \subset B$が成り立っているものとする．このとき、集合

$$\overline{\bigcup_{x \in K} \pi([0, \tau_x), x)}$$

はcompactである．こゝで、$\overline{\quad}$はXにおける閉包を表わしている．（[4] 参照）

この事実は、(1)において$f(t, \varphi)$が完全連続であることを仮定すれば成立する．この仮定は函数微分方程式に対しては一般的になされている．これはまた、集合$B \subset C(I, R^n)$の中で左に入non-continuableな解は$C(I, R^n)$の中でのBの境界∂Bに近ずくことに対する充分条件ともなっている．

さらに、finite lagの場合には，

性質（II）．（LaSalle[7]，Smoothing property）．Bを任意な有界集合とすると、それに対して $\tau \geq 0$ と compact な集合 K が存在して，

$$\pi([0,t],x) \subset B \Longrightarrow \pi([\tau,t],x) \subset K.$$

なお，infinite lag $I = R^-$ のときは（II）は成立しない．このときは（II）に代わる性質として次の性質が期待される．

性質（III）（[7]，Hale-Lopes[8]，Asymptotic smoothing property）．有界集合Bに対して，compact 集合Kと，任意な $\varepsilon > 0$ に対応する $\tau(\varepsilon) \geq 0$ が存在して，

$$\pi([0,t],x) \subset B \Rightarrow \pi([\tau(\varepsilon),t],x) \subset U_\varepsilon(K).$$

ここで，$U_\varepsilon(K)$ はKの ε-近傍

$$U_\varepsilon(K) = \{x \,;\, \exists y \in K,\ d(x-y) < \varepsilon\}$$

を表わす．

あるいは，（2）において $I_k = [-k, -k+1]$ ととって，半ノ

ノルム $\|\cdot\|_k$ で $C(R^-, R^n)$ を類別した空間の中で定めることもできる。このとき、集合 K に対して、

$$co_k(K) = \{x \,;\, \exists y \in K,\ \|x-y\|_k = 0\}$$

とおく。

性質 (III^*) (Jones [9], type 1 flow). 有界集合 B に対して compact 集合 K と，任意な自然数 k に対応する $\tau(k) \geq 0$ が存在して、

$$\pi([0,t],x) \subset B \Longrightarrow \pi([\tau(k),t],x) \subset co_k(K).$$

注. [7], [8], [9] においてはいずれも対象を neutral type を含む函数微分方程式においている。このとき、(II), (III) においてはそのまゝの形で定義されているが、(III^*) においては splitting を導入してより一般的な形で type 1 flow の定義が与えられている。

明らかに、(II) から (I) は導かれる。さらに次の結果を証明することができる。

定理. (π が $R^+ \times X$ で連続ならば，) 性質 (III) あるいは

(III*) から (I) を導くことができる.

[2]. (R^+, X, π) が semi-dynamical system であるとは次の性質が成り立つことを云う:

(i) π は $R^+ \times X$ で定義され, X の値をとる連続な函数,

(ii) $\pi(0, x) = x$,

(iii) $\pi(t, \pi(s, x)) = \pi(t+s, x)$.

こゝで、相空間 X は完備な距離空間であると仮定する.

注. (iii) において, t, s は勿論 R^+ の元であるが, $y = \pi(t, x)$ に対しては, $s \in [-t, 0]$ における値 $\pi(s, y)$ を

$$\pi(s, y) = \pi(t+s, x)$$

とおくことによって定義することができる ([3]参照). このようにして, π の定義域を拡げることができる. しかしこのときさまざまな現象が起こる.

(イ) $(-\infty, \infty)$ で定義される場合.

(ロ) $t > -\tau$ まで定義できて, $t = -\tau$ を越えて左に延長できない場合 (finite escape time).

(ハ) $t \geq -\tau$ まで定義できて、それ以上たに延長できない場合($\pi(-\tau, x)$ を starting point と云う).

さらに、R^- の方向に拡張し得たとしても一般には x に関しては一価ではない. したがって, 連続でもない。ゆえに、例えば, $t \in R^+$ に対して、

(3) $$\pi(t,x) = \pi(t,y) \Rightarrow x = y$$

は一般には成立しない.

通常の dynamical system と同様に、軌道, 極限集合を

$$\gamma(x) = \pi([0,\infty), x),$$

$$L(x) = \bigcap_{t \in R^+} \overline{\gamma(\pi(t,x))}$$

によって表わす. また、集合 $M \subset X$ に対して

$$\pi(t, M) \subset M \quad (\forall t \in R^+)$$

が成り立つとき M を不変集合(invariant)という. ここで

すべての概念は正の方向にのみ考えられている。

次の事実は定義より容易に導かれる。

(i) [3] $L(x)$ は closed, invariant.

(ii) $\gamma(x) \ni y \Longrightarrow L(y) = L(x)$.

なお次の事実は (3) が成り立たないことから通常の dynamical system と異なっている。

(iii) [3] $\gamma(x)$ が compact となるのは次のいずれかの場合である:

周期軌道, 危点, 6の字, 線分.

しかしながら,

(iv) $\gamma(x)$ が compact ならば $L(x)$ は

周期軌道, 危点

のいずれかである。

次の定理もまた成り立つ。

定理 [3]. $\overline{\gamma(x)}$ が compact ならば, $L(x)$ は non-void, compact, connected, invariant, かつ

$$\pi(t, x) \longrightarrow L(x) \quad (t \to \infty).$$

特に、性質 (I) を仮定すれば上の定理において, 前提

"$\overline{\gamma(x)}$ が compact ならば" を "$\gamma(x)$ が有界ならば" にゆるめても同値となって成立することはすでに [4] において示されている（函数微分方程式に対しては [10] 参照）. さらに次の結果が得られる.

定理. 性質（I）を仮定すると，$L(x)$ が non-void，compact ならば $\gamma(x)$ は有界，したがって，$\overline{\gamma(x)}$ は compact である.

安定性の定義において通常採用されているものは，

（orbitary stability [3]）．M の任意な近傍 U に対して M の近傍 V が存在して

$$\pi(R^+, V) \subset U$$

が成立するとき M は orbitary stable であるという.

一方，prolongation

$$D(M) = \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\gamma(U_\varepsilon(M))}$$

を用いて．$D(M)=M$ が成り立つのと同値となる安定性は次のものである.

(stability [3]) 任意な $x \notin M$ と $y \in M$ に対して，それぞれ近傍 U, V が存在して，

$$U \cap \pi(R^+, V) = \phi$$

が成り立つときMは stable であるという．

この両者の間には差があるがXが局所 compact であるときは一致することが知られている[3]．その事情は attractor の概念を強めた strong attractor，uniform attractor 相互の関係についても同様である．

(strong attractor [3])．Mが strong attractor であるとはMの近傍Uが存在して，各 $x \in U$ に対してMの近傍Vを与えたとき，x の近傍Wと $\tau(V, W) \geq 0$ が存在して

$$\pi([\tau(V, W), \infty), W) \subset V$$

が成り立つことをいう。

(uniform attractor [3])．strong attractor においてWをVに無関係にえらびうるときにMは uniformly attractor であるという。

(attractor [3])．Mの近傍Uが存在して，各 $x \in U$ に対し

Mの近傍Vをどのようにとっても $\tau(x,V)\geqq 0$ が存在して

$$\pi([\tau(x,V),\infty),x)\subset V$$

となるときMはattractorであるという。

このとき次の定理が成り立つ。

定理. 性質(I)を仮定したときcompact集合Mに対して:

(i) Mがstableとなるための必要かつ充分な条件はMがorbitrary stableとなることである。

(ii) Mがattractorとなるための必要かつ充分な条件は

$$L(x)\subset M \quad (\forall x\in M).$$

(iii) Mがstrong attractorであることとuniform attractorであることとは同値である。

(iv) Mがasymptotically stable(すなわち、orbitrary stable attractor)となるためには、Mのある近傍Uの上で定義された実数値連続函数 $v(x)$ が存在して性質

(a) $\pi([0,t],x)\subset U \Rightarrow v(\pi(t,x))\leqq v(x)$

(b) $v(x)=0\ (\forall x\in M)$; $v(x)>0\ (\forall x\notin M)$, （c）　$x \notin M \Rightarrow v(\gamma(\pi(t,x)))$ は２つ以上の値をもつ

をみたすことが必要かつ充分である（ただし、充分性のときはさらに $U-M$ が不変集合であることを仮定する）。

証明は局所 compact 性を相空間に対して仮定した場合の証明を修正することによって与えられる。なお、asymptotic~~ally~~ stability に関する定理（iv）において $v(x)$ の連続性を仮定しない場合についてはすでに［11］で示されている（［11］における general system は semi-dynamical system の一般化より更に広い概念である）。

仮定（I）は compact 集合の中に初期値をもつ flow の族に関してのみ情報を与えており、non-compact 集合の中に初期値をもつ flow の族に関しては情報を与えない。このような族を取り扱うときは、より強い性質（II）あるいは、（III）,（III*）が要求される。

［7］,［8］においては（II）あるいは（III）を仮定して dissipative flow に関するいくつかの結果を与え、［9］においては（III*）を仮定して fixed point（critical point, periodic point）の存在に関するすぐれた結果を与えている。なお、次の結果は殆んど自明である。

定理. 仮定 (Ⅲ) あるいは (Ⅲ*) のもとで, 有界集合 B, $B^* \subset X$ に対して,

$$\pi([\tau, \infty), B) \subset B^* \Rightarrow L(B) : \text{compact},$$

こゝで, $\tau \in R^+$.

なお, $\pi([0, \tau], B)$ は B が有界であってもかならずしも有界ではないことには注意を要する. さらに, 上の仮定のもとで, 同様に次の結果も成り立っている.

$$\pi([\tau, \infty), B) \subset B^* \Rightarrow \pi(t, B) \to L(B) \quad (t \to \infty).$$

参考文献

[1] O. Hajek, Critical points of abstract dynamical systems, Comment. Math. Univ. Carol., 5(1964), 121-124.

[2] O. Hajek, Structure of dynamical systems, ibd., 6(1965), 53-72.

[3] N. P. Bhatia- O. Hajek, Local Semi-Dynamical Systems, Lecture Note in Math. (Springer), 90(1969).

[4] J. K. Hale, Dynamical systems and stability, J. Math. Anal. Appl., 26(1969). 39-59.

[5] N. P. Bhatia, On asymptotic stability in dynamical systems, Math. Syst. Th.. 1(1967), 113-127.

[6] N. P. Bhatia, Attraction and nonsaddle sets in dynamical systems, J. Diff. Eqs.. 8(1970), 229-249.

[7] J. P. LaSalle, Dissipative systems. Ord. Diff. Eqs. NRL-MRC Conf. (1971), 165-174.

[8] J. K. Hale - O. Lopes, Fixed point theorems and dissipative processes, to appear.

[9] G. S. Jones, Stability of compactness for functional differential equations. Ord. Diff. Eqs. NRI-MRC Conf.(1971). 433-458.

[10] J. K. Hale, Sufficient conditions for stability and instability of autonomous functional differential equations, J..Diff. Eqs., 1(1965). 452-482.

[11] V. I. Zubov, Methods of A. M. Liapunov and their Applications, Izdat. Leningrad Univ., 1957.