数理解析研究所講究録
第177巻 1973年 14-53

Invariant S の性質について

東北大 理 洲之内長一郎

M を factor とする時，invariant $S(M)$ を，M 上のかってな faithful normal semi-finite weight によって induce される modular operator の spectrum の intersection と定義する。

この $S(M)$ を使用して，M の type がある程度決定される。特に type III factor の classification を決定し，その性質を調らべるのに，有効に働く。

そこで，この報告は，invariant $S(M)$ の性質を調らべることが主な目的である。

§1 において，$S(M)$ の性質を調らべるための用意をする。§2 において，$S(M)$ の基本的な性質であるところの，group property を持つこと，$S(M)$ と invariant $T(M)$ との関係，さらに，M の性質と，$S(M)$ との関係を調らべる。

最後に，§3 において，ある種の M の $S(M)$ について，報告する。

なお，この報告は，A. Connes [7] に従う。

§1. Automorphisms group $\{\sigma_t^\varphi\}$

1.1 Preliminary

Mを factor とし，φを faithful normal semi-finite weight on Mとする。（以後 特にことわらない限り，その様にする。）又 $\mathbb{R}$を real line とし，dt を$\mathbb{R}$上の Haar measure とし，$\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ とする。

$t \in \mathbb{R}$，$\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ に対し，$(t, \lambda) = \lambda^{it}$ によって，$\mathbb{R}$の dual と $\mathbb{R}_+^*$を同一視する。

又，$f \in L^1(\mathbb{R})$，$\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ に対し，$\hat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{(t, \lambda)}\, dt$ とする。

さて，μを$\mathbb{R}$上の finite measure とし，$x \in M$とする時，

$$\sigma^\varphi(\mu)x \overset{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} \sigma_t^\varphi(x)\, d\mu(t),$$

ここで $\{\sigma_t^\varphi\}_t$は，φによって作られる，one parameter modular automorphisms group である。

すると，$\sigma^\varphi(\mu) \in B(M)$，i.e. MからMへの weakly continuous linear mapping 全体が作る Banach algebra.

特に，$f \in L^1(\mathbb{R})$ に対し，$d\mu = f dt$ とする時，$\sigma^\varphi(f) = \sigma^\varphi(\mu)$ とする。つまり，$x \in M$ とすると，

$$\sigma^\varphi(f)x \overset{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} f(t)\, \sigma_t^\varphi(x)\, dt.$$

この時，σ^{φ} は $L^1(\mathbb{R})$ から $B(M)$ への homomorphism である。

Definition 1.1.1

a) $Sp(\sigma^{\varphi}) \overset{def}{=} \bigcap \{ \hat{f}^{-1}(0) \ ; \ f \in L^1(\mathbb{R}), \ \sigma^{\varphi}(f) = 0 \}$.

b) $x \in M$ に対し，

$Sp_{\sigma^{\varphi}}(x) \overset{def}{=} \bigcap \{ \hat{f}^{-1}(0) \ ; \ f \in L^1(\mathbb{R}), \ \sigma^{\varphi}(f)x = 0 \}$.

c) E を closed subset of $\mathbb{R}_+^*$ に対し，

$M(\sigma^{\varphi}, E) \overset{def}{=} \{ x \in M \ ; \ Sp_{\sigma^{\varphi}}(x) \subset E \}$.

とする。

特に，$x \in M(\sigma^{\varphi}, \{1\}) \Leftrightarrow x \in M_{\varphi} \overset{def}{=} \{x \in M ; \ \sigma_t^{\varphi}(x) = x \text{ for } {}^{\forall}t \in \mathbb{R}\}$ である。

さらに，次の記号を導入する。e を non-zero projection of M_{φ} とし，$M_e \overset{def}{=} eMe$ とする時，$x \in M_e$ に対し，$\varphi_e(x) \overset{def}{=} \varphi(x)$ とすると，φ_e は faithful normal semi-finite weight on M_e である。この時，$x \in M_e$; $t \in \mathbb{R}$ に対して，$\sigma_t^{\varphi_e}(x) = \sigma_t^{\varphi}(x)$.

上の definition に関して，次の様な基本的性質がある。

Lemma 1.1.2

e, e_1, e_2 を non-zero projections of M_{φ}，E を closed subset of $\mathbb{R}_+^*$，$f \in L^1(\mathbb{R})$ とし，σ^{φ} を上のものとする。

a) $x \in M(\sigma^{\varphi}, E) \Leftrightarrow$ any compact neighborhood V of 1 in $\mathbb{R}_+^*$, any $g \in L^1(\mathbb{R})$ such that $EV \subset \hat{g}^{-1}(0)$

に対し, $\sigma^\varphi(g)x = 0$.

b) $M(\sigma^\varphi, E)$: weakly closed subspace of M.

c) $Sp_{\sigma^\varphi}(x^*) = (Sp_{\sigma^\varphi}(x))^{-1}$ for $x \in M$.

d) X : weakly dense subset of M とすると,

$$Sp(\sigma^\varphi) = \Big(\bigcup_{x\in X} Sp_{\sigma^\varphi}(x)\Big)^{-}$$

ここで bar は closure を表わす.

e) $M(\sigma^{\varphi_e}, E) = M(\sigma^\varphi, E) \cap M_e$

f) $\sigma_t^\varphi(M(\sigma^\varphi, E)) = M(\sigma^\varphi, E)$ for ${}^\forall t \in \mathbb{R}$.

g) $x \in M$ に対し,

$$Sp_{\sigma^\varphi}(\sigma^\varphi(f)x) \subset Sp_{\sigma^\varphi}(x) \cap \text{support of } \hat{f}$$

h) $\lambda \in Sp(\sigma^\varphi) \Leftrightarrow$ any compact neighborhood V of λ に対し. $M(\sigma^\varphi, V) \neq \{0\}$.

i) $e_1 \leqq e_2$ に対し. $Sp(\sigma^{\varphi_{e_1}}) \subset Sp(\sigma^{\varphi_{e_2}})$.

j) $\{\psi \circ \sigma^\varphi(f) \,;\, \psi \in M_*, f \in L^1(\mathbb{R})\}$ は normed dense in M_*.

k) μ_1, μ_2 : finite measures on $\mathbb{R}$ とし, $x \in M$ に対し. 与 $Sp_{\sigma^\varphi}(x)$ のある neighborhood の上で, $\hat{\mu}_1(\lambda) = \hat{\mu}_2(\lambda)$ ならば $\sigma^\varphi(\mu_1)x = \sigma^\varphi(\mu_2)x$.

l) $x \in M$, $a, b \in M_\varphi$, μ : finite measure on $\mathbb{R}$ とすると. $\sigma^\varphi(\mu)(axb) = a(\sigma^\varphi(\mu)x)b$.

Proof

a) 一般論として，"Iを closed ideal in $L^1(\mathbb{R})$とし，$f \in L^1(\mathbb{R})$とし，hull of Iのある neighborhood 上で $\hat{f}(\lambda)=0$ ならば $f \in I$" があることに注意すればよい。すなわち、$I \overset{\text{def}}{=} \{ f \in L^1(\mathbb{R});\ \delta^{\varphi}(f)x=0 \}$とすると，closed ideal in $L^1(\mathbb{R})$で，hull of $I = Sp_{\delta^{\varphi}}(x)$.

与 $x \in M(\delta^{\varphi}, E)$ とし，Vを any compact neighborhood of 1 in $\mathbb{R}_+^*$とし，$g \in L^1(\mathbb{R})$とし，$EV \subset \hat{g}^{-1}(0)$を満たすとする。つまり，$\hat{g}(\lambda)=0$ for $^\forall\lambda \in EV \supset Sp_{\delta^{\varphi}}(x)$.

ゆえに 上の一般論より．$g \in I$. i.e. $\delta^{\varphi}(g)x=0$.

逆に，$x \in M$とする。与 $J \overset{\text{def}}{=} \{f \in L^1(\mathbb{R});\ \hat{f}(\lambda)=0$ on a neighborhood of $E\}$ とすると，仮定より．$I \supset J$.

ゆえに．$Sp_{\delta^{\varphi}}(x) = $ hull of $I \subset$ hull of $J = E$.

ゆえに，$x \in M(\delta^{\varphi}, E)$.

b) a)より明らか。

c) $f \in L^1(\mathbb{R})$に対し，$\lambda \in \mathbb{R}_+^*$，$x \in M$に対し．

$(\bar{f})^{\wedge}(\lambda) = (\hat{f}(\lambda^{-1}))^{-}$，$\delta^{\varphi}(\bar{f})x^* = (\delta^{\varphi}(f)x)^*$ より．

d) $x \in M$に対し．$Sp_{\delta^{\varphi}}(x) \subset Sp(\delta^{\varphi})$ は明らか．

逆に．$\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ とし，Vを compact neighborhood of 1 such that $\lambda VV \cap Sp_{\delta^{\varphi}}(x) = \phi$ for $^\forall x \in M$とする．さらに又．$f \in L^1(\mathbb{R})$とし．$\hat{f}(\lambda) \neq 0$，support of $\hat{f} \subset \lambda V$とする.

a)より. $\sigma^{\varphi}(f)x=0$ for $^{\forall}x\in M$. ゆえに, $\sigma^{\varphi}(f)=0$.
しかし一方, $\hat{f}(\lambda)\neq 0$. ゆえに $\lambda\notin Sp(\sigma^{\varphi})$.

e) $x\in M_e$, $f\in L^1(\mathbb{R})$ に対し, $\sigma^{\varphi_e}(f)x=\sigma^{\varphi}(f)x$.
ゆえに, $Sp_{\sigma^{\varphi_e}}(x) = Sp_{\sigma^{\varphi}}(x)$ より.

f) $x\in M$, $f\in L^1(\mathbb{R})$ とし, $f_t(t')\overset{\mathrm{def}}{=}f(t'-t)$ $(t,t'\in\mathbb{R})$
とすると, $f_t\in L^1(\mathbb{R})$. すると, $\sigma^{\varphi}(f_t)x=\sigma^{\varphi}(f)(\sigma_t^{\varphi}(x))$,
$\hat{f_t}^{-1}(0)=\hat{f}^{-1}(0)$ より.

g) 明らかに, $x\in M$, $f\in L^1(\mathbb{R})$ に対し, $Sp_{\sigma^{\varphi}}(\sigma^{\varphi}(f)x)\subset Sp_{\sigma^{\varphi}}(x)$.
今 $\lambda\notin$ support of $\hat{f}$ とする. 又. $g\in L^1(\mathbb{R})$ で $\hat{g}(\lambda)\neq 0$, $g*f=0$
とすると, $\sigma^{\varphi}(g)(\sigma^{\varphi}(f)x)=0$. ゆえに. $\lambda\notin Sp_{\sigma^{\varphi}}(\sigma^{\varphi}(f)x)$.
ゆえに, $Sp_{\sigma^{\varphi}}(\sigma^{\varphi}(f)x)\subset$ support of $\hat{f}$.

h) まず, $x\neq 0$ ならば, $Sp_{\sigma^{\varphi}}(x)\neq\phi$.
今 any compact neighborhood V of λ に対し, $^{\exists}x\in M(\sigma^{\varphi},V)$,
non-zero とすると, $\lambda\in(\bigcup_{x\in M}Sp_{\sigma^{\varphi}}(x))^{-}=Sp(\sigma^{\varphi})$ (d)より).
逆に, 今 $M(\sigma^{\varphi},V)=\{0\}$ なる compact neighborhood V of λ
in $\mathbb{R}_+^*$ が存在したとする. support of $\hat{f}\subset V$ なる $f\in L^1(\mathbb{R})$,
と $x\in M$ に対し, $Sp_{\sigma^{\varphi}}(\sigma^{\varphi}(f)x)\subset V$. g)より $\sigma^{\varphi}(f)x=0$.
しかしながら, $\hat{f}(\lambda)\neq 0$ なる $f\in L^1(\mathbb{R})$ が存在するから.
$\lambda\notin Sp(\sigma^{\varphi})$.

i) $M_{e_1}\subset M_{e_2}$ と e) より明らか.

j) $^{\forall}x\neq 0$, $\in M$ に対し, $f\in L^1(\mathbb{R})$ と $\psi\in M_*$ が存在し,

$\psi(\sigma^\varphi(f)x) \neq 0$. 又 Hahn-Banach' Theorem より. density が示される。

k) $\mu \overset{\text{def}}{=} \mu_1 - \mu_2$ とすると finite measure on $\mathbb{R}$ で, $Sp_{\sigma^\varphi}(x)$ のある neighborhood の上で $\hat{\mu}(\lambda) = 0$. $f \in L^1(\mathbb{R})$ に対し, $\sigma^\varphi(f)(\sigma^\varphi(\mu)x) = \sigma^\varphi(\mu * f)x = 0$. $\therefore \sigma^\varphi(\mu)x = 0$.

l) $$\sigma^\varphi(\mu)(axb) = \int_{\mathbb{R}} \sigma_t^\varphi(axb)\,d\mu(t)$$
$$= \int_{\mathbb{R}} a\,\sigma_t^\varphi(x)\,b\,d\mu(t) = a(\sigma^\varphi(\mu)x)\,b.$$

証明終り。

<u>Lemma 1.1.3</u>

$^\forall x \in M \Rightarrow x \in$ strong closure of $\{\sigma^\varphi(f)x\ ;\ f \in L^1(\mathbb{R})$
$\|f\|_1 \leqq 1$, $\hat{f}$ は compact support を持つ$\}$.

<u>Proof</u>

$^\forall \varepsilon > 0$, $^\forall K$: compact subset of $\mathbb{R}_+^*$ に対し,
$^\exists f(K,\varepsilon) \in L^1(\mathbb{R})$ such that $\|f(K,\varepsilon)\|_1 \leqq 1$, $\hat{f}(K,\varepsilon)$ は compact support を持ち. $^\forall \lambda \in K$ に対し. $\hat{f}(K,\varepsilon)(\lambda) = 1 - \varepsilon$. [10]. 又. ideal $\{f \in L^1(\mathbb{R})\ ;\ \hat{f}$ は compact support を持つ$\}$ は normed dense in $L^1(\mathbb{R})$ ゆえ, $^\forall f \in L^1(\mathbb{R})$ に対し,
$(K,\varepsilon) \longrightarrow (\mathbb{R}_+^*, 0)$ ならば, $f(K,\varepsilon) * f \longrightarrow f$.
又 Lemma 1.1.2 j) より, $^\forall \psi \in M_*$ に対し, $(K,\varepsilon) \longrightarrow (\mathbb{R}_+^*, 0)$ ならば, $\psi \circ \sigma^\varphi(f(K,\varepsilon)) \longrightarrow \psi$. ゆえに $\sigma^\varphi(f(K,\varepsilon))x \longrightarrow x$.

証明終り。

Lemma 1.1.4

E_1, E_2 : closed subset of $\mathbb{R}_+^*$, E_3: closure of E_1E_2 とする。
この時 $M(\sigma^\varphi, E_1)\cdot M(\sigma^\varphi, E_2) \subset M(\sigma^\varphi, E_3)$.

Proof

$x_1 \in M(\sigma^\varphi, E_1)$, $x_2 \in M(\sigma^\varphi, E_2)$ とする。Lemma 1.1.3 と M の bounded part において, strong topology に関し, product の bi-continuity と Lemma 1.1.2 g), b) より, $Sp_{\sigma^\varphi}(x_1)$ と $Sp_{\sigma^\varphi}(x_2)$ を compact と, したがって, E_1 と E_2 を compact としても一般性を失わない。そこで, $x_1x_2 \in M(\sigma^\varphi, E_3)$ を言うためには, any compact neighborhood V of 1 in $\mathbb{R}_+^*$ と any $f \in L^1(\mathbb{R})$ such that $E_1E_2VV \subset \hat{f}^{-1}(0)$ ならば $\sigma^\varphi(f)x_1x_2 = 0$ を言えばよい。(Lemma 1.1.2 a)). したがって, V と f をそのようなものとし, $j = 1, 2$ に対し, $f_j \in L^1(\mathbb{R})$ を ある neighborhood of $Sp_{\sigma^\varphi}(x_j)$ で $\hat{f}_j(\lambda) = 1$ とし, $\hat{f}_j$ は compact support を E_jV の中に持つ様なものとする。
Lemma 1.1.2 h) より $x_j = \sigma^\varphi(f_j)x_j$. ここで, $\forall \psi \in M_*$ に対し, $\psi(\sigma^\varphi(f)x_1x_2)$ を計算しよう。そのために, $t \in \mathbb{R}$, $X \in B(M)$ に対し, $\Phi_t(X)x \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_t^\varphi \circ X \circ \sigma_{-t}^\varphi(x)$ とすると $\Phi_t(X) \in B(M)$. さらに, $f \in L^1(\mathbb{R})$ に対して, $x \in M$ に対し,

$$(\Phi(f)X)x \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} f(t)\, \Phi_t(X)x\, dt$$

とすると，Φ は，$L^1(\mathbb{R})$ から $B(M)$ への homomorphism である．

又，$L_x(y) \overset{def}{=} xy$ for $y \in M$ とすると $L_x \in B(M)$.

すると，$\Phi_t(L_x)(y) = \sigma_t^\varphi \circ L_x \circ \sigma_{-t}^\varphi(y) = \sigma_t^\varphi(x)y = L_{\sigma_t^\varphi(x)}y$.

ゆえに，$\Phi_t(L_x) = L_{\sigma_t^\varphi(x)}$．又．$x_1 = \sigma^\varphi(f_1)x_1$ より，

$$L_{x_1}y = x_1 y = \int_{\mathbb{R}} f_1(t)\,\sigma_t^\varphi(x_1)y\,dt = \int_{\mathbb{R}} f_1(t)\,L_{\sigma_t^\varphi(x_1)}y\,dt$$
$$= \Phi(f_1)L_{x_1}y. \quad \text{ゆえに}\quad L_{x_1} = \Phi(f_1)L_{x_1}.$$

ゆえに．
$$\psi(\sigma^\varphi(f)x_1x_2) = \psi(\sigma^\varphi(f)(L_{x_1}x_2))$$
$$= \psi(\sigma^\varphi(f)(\Phi(f_1)L_{x_1})(\sigma^\varphi(f_2)x_2))$$
$$= \iiint f(t)f_1(t_1)f_2(t_2)\,g(t,t_1,t_2)\,dt\,dt_1\,dt_2$$

ここで，$g(t,t_1,t_2) = \psi(\sigma_{t+t_1}^\varphi(x(\sigma_{t_2-t_1}^\varphi(x_2))))$.

ゆえに．$^\exists h$: bounded, continuous function $\mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow C$ such that $g(t,t_1,t_2) = h(t+t_1,\ t_2-t_1)$.

ここで，$u = t,\ v = t+t_1,\ w = t_2 - t_1$ とし，

$k(v,w) \overset{def}{=} \int_{\mathbb{R}} f(u)f_1(v-u)f_2(v-u+w)\,du$ とすると，

Fubini's Theorem より．$\psi(\sigma^\varphi(f)x_1x_2) = \iint k(v,w)\,h(v,w)\,dv\,dw$.

又．$f_{2,-w}(t) \overset{def}{=} f_2(t+w)$ for $^\forall t \in \mathbb{R}$ とすると．$\hat{f}_j$ は compact support を持つことから．$f_1 \cdot f_{2,-w}$ は．$L^2(\mathbb{R})$ の pointwise product．ゆえに．$f_1 \cdot f_{2,-w} \in L^1(\mathbb{R})$.

又．$(f_1 \cdot f_{2,-w})^\wedge(\lambda) = \hat{f}_1 * \hat{f}_{2,-w}(\lambda) = 0$. for all $\lambda \in ((\text{support of } \hat{f}_1)\cdot(\text{support of } \hat{f}_2))^c$，しかも，$w$ に関係しない．ゆえに，$\widehat{f_1 \cdot f_{2,-w}}$ は $(E_1E_2\nabla\nabla)^c$ で，w に関係

なく 0 である．一方，仮定の条件より．$\hat{f}$ は $E_1 E_2 \nabla \nabla$ 上で 0．ゆえに，$k(v, w) = 0$ a.e. v for $^\forall w$.
ゆえに．$\psi(\sigma^\varphi(f)x_1 x_2) = 0$．$\psi$ はかってな M_* の元ゆえ，
$\sigma^\varphi(f)x_1 x_2 = 0$.　　　　　　　　　　　　　証明終り．

Lemma 1.1.5

$\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を open covering of $\mathbb{R}_+^*$ とすると，$^\exists B$: directed set, $^\exists \{g_{\alpha,\beta}\}_{\alpha\in A, \beta\in B}$ in $L^1(\mathbb{R})$ such that a) $^\forall \beta \in B$ に対し，$\{\alpha \in A\ ;\ g_{\alpha,\beta} \neq 0\}$ は finite set b) $\alpha \in A$, $\beta \in B$ に対し，support of $\widehat{g_{\alpha,\beta}} \subset V_\alpha$．c) $^\forall x \in M$ に対し．$\sum_\alpha \sigma^\varphi(g_{\alpha,\beta})x \longrightarrow x$ (weakly) if $\beta \longrightarrow \infty$.

Proof

ideal $\{g \in L^1(\mathbb{R})\ ;\ g = \sum_{i=1}^n g_{\alpha_i}\ ,\ g_{\alpha_i} \in L^1(\mathbb{R})$, support of $\widehat{g_{\alpha_i}} \subset V_{\alpha_i}\}$ は normed dense in $L^1(\mathbb{R})$．すると，$^\forall \psi \in M_*$ に対し，$\psi \circ \sigma^\varphi(g_\beta) \longrightarrow \psi$ if $\beta \longrightarrow \infty$ より，Lemma 1.1.2 j) より c) が得られる．

証明終り．

1．2 Invariant Γ

1.1 の記号をそのまま使う．

Definition 1.2.1.

$$\Gamma(\sigma^\varphi) \overset{\text{def}}{=} \bigcap \{S_p(\sigma^{\varphi_e})\ ;\ e \text{ は non-zero projection of } M_\varphi\}.$$

この$\Gamma(\sigma^\varphi)$に関して次の性質がある.

<u>Lemma 1.2.2.</u>

a) e: non-zero projection of M_φ, E: closed set in $\mathbb{R}_+^*$, $z(e)$: central support of e in M_φ とする時.

$$M(\sigma^\varphi, E) \cap M_{z(e)} \neq \{0\} \Rightarrow M(\sigma^\varphi, E) \cap M_e \neq \{0\}.$$

b) C_φ: center of M_φ とすると,

$$\Gamma(\sigma^\varphi) = \bigcap \{ S_p(\sigma^{\varphi_e}) ; e: \text{non-zero projection of } C_\varphi \}.$$

c) M_φ: factor $\Rightarrow S_p(\sigma^\varphi) = \Gamma(\sigma^\varphi)$.

d) e_1, e_2: non-zero projections of M_φ, $e_1 \sim e_2$ in M とする時 $\Gamma(\sigma^{\varphi_{e_1}}) = \Gamma(\sigma^{\varphi_{e_2}})$.

<u>Proof</u>

a) 定義より $z(e) = \bigvee_{u \in (M_\varphi)_u} ueu^*$. 今 x を non-zero element of $M(\sigma^\varphi, E) \cap M_{z(e)}$ とすると,

$\exists u, v \in (M_\varphi)_u$; $ueu^* x vev^* \neq 0$.

そこで $y \overset{\mathrm{def}}{=} eu^* x ve$ とすると, $y \neq 0$, $y \in M_e$.

さらに Lemma 1.1.4 から, $M(\sigma^\varphi, \{1\}) M(\sigma^\varphi, E) M(\sigma^\varphi, \{1\}) \subset M(\sigma^\varphi, E)$ であることから, $y \in M(\sigma^\varphi, E)$. $\therefore y \in M(\sigma^\varphi, E) \cap M_e$.

b) e を non-zero projection of M_φ とし, a) の記号 $z(e)$ を使う. まず, $e \leqq z(e)$ より, Lemma 1.1.2 j) より $S_p(\sigma^{\varphi_e}) \subset S_p(\sigma^{\varphi_{z(e)}})$. 又, $\lambda \in S_p(\sigma^{\varphi_{z(e)}})$ とすると

Lemma 1.1.2 h)より. any compact neighborhood V of λ に対し, $M(\sigma^{\varphi_{z(e)}}, V) \neq \{0\}$. したがって Lemma 1.1.2 e) より $M(\sigma^{\varphi}, V) \cap M_{z(e)} \neq \{0\}$. ゆえに a) より. $M(\sigma^{\varphi}, V) \cap M_e \neq \{0\}$. 再び, Lemma 1.1.2 e)より $M(\sigma^{\varphi_e}, V) \neq \{0\}$. ゆえに Lemma 1.1.2 h)より $\lambda \in Sp(\sigma^{\varphi_e})$.

以上より, $Sp(\sigma^{\varphi_e}) = Sp(\sigma^{\varphi_{z(e)}})$. ゆえに $\Gamma(\sigma^{\varphi}) \supset \cap \{ Sp(\sigma^{\varphi_e})$; e: non-zero projection of $C_\varphi \}$.

逆向きは, $C_\varphi \subset M_\varphi$ より明らか. ゆえに 等しい.

c) b)より明らか.

d) 条件より, $\exists u \in M_{p.i.}$; $u^*u = e_1$, $uu^* = e_2$. 今 $\lambda \in \Gamma(\sigma^{\varphi_{e_1}})$ とする. この時, any compact neighborhood V of λ, any non-zero projection e_2' of $M_\varphi \cap M_{e_2}$ に対し, $M(\sigma^{\varphi}, V) \cap M_{e_2'} \neq \{0\}$ を示せば十分である. なんとなれば, もしこのことが言えたとすると, Lemma 1.1.2 e) より, $M(\sigma^{\varphi}, V) \cap M_{e_2'} = M(\sigma^{\varphi_{e_2'}}, V) \neq \{0\}$. ゆえに Lemma 1.1.2 h)より, $\lambda \in Sp(\sigma^{\varphi_{e_2'}})$. e_2' は any projection of $M_\varphi \cap M_{e_2}$ より $\lambda \in \Gamma(\sigma^{\varphi_{e_2}})$. ゆえに $\Gamma(\sigma^{\varphi_{e_1}}) \subset \Gamma(\sigma^{\varphi_{e_2}})$. e_1, e_2 を置き換えれば, 求める等号が得られる.

したがって, $M(\sigma^{\varphi}, V) \cap M_{e_2'} \neq \{0\}$ を示せばよい. そこで, W を nlighborhood of 1 in $\mathbb{R}_+^*$, V' を neighborhood of λ in $\mathbb{R}_+^*$ such that $V'W \subset V$ とする.

さらに $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$: open covering of $\mathbb{R}_+^*$ such that $V_\alpha/V_\alpha \subset W$ for $\forall\alpha\in A$ とすると, Lemma 1.1.5 より ($e_2'u \neq 0$ より) $\exists g\in L^1(\mathbb{R})$, $\exists\alpha\in A$; $\sigma^\varphi(g)(e_2'u)\neq 0$, support of $\hat{g}\subset V_\alpha$.
今 $x \overset{\text{def}}{=} \sigma^\varphi(g)(e_2'u)$ とすると, support projection of $x\leqq e_1$, support projection of $x^*\leqq e_2'$. すると Lemma 1.1.2 g) より, $Sp_{\sigma^\varphi}(x)\subset$ support of $\hat{g}$. ゆえに, 以上から.

$$Sp_{\sigma^\varphi}(x)\cdot V'/Sp_{\sigma^\varphi}(x) \subset (\text{support of } \hat{g})\cdot V'/\text{support of } \hat{g}$$
$$\subset V_\alpha\cdot V'/V_\alpha \subset WV' \subset V.$$

さて一方, $\lambda\in\Gamma(\sigma^{\varphi_{e_1}})$ より, $\exists y$: non-zero element of $M(\sigma^\varphi, V')\cap M_{e_1'}$. ここで $e_1' \overset{\text{def}}{=} \bigvee_{t\in\mathbb{R}}$ support proj. of $\sigma_t^\varphi(x)$ なる $M_\varphi\cap M_{e_1}$ の non-zero projection である. 又. range of $y\subset$ range of $e_1'\neq\{0\}$ より, $\exists t_1\in\mathbb{R}$; $\sigma_{t_1}^\varphi(x)y\neq 0$. 同様に, range of $\sigma_{t_1}^\varphi(x)y \subset$ range of $y^*\subset$ range of e_1' より, $\exists t_2\in\mathbb{R}$; $\sigma_{t_2}^\varphi(x)(\sigma_{t_1}^\varphi(x)y)^*\neq 0$. すると, Lemma 1.1.2 c), Lemma 1.1.4 より,

$$\sigma_{t_1}^\varphi(x)\,y\,\sigma_{t_2}^\varphi(x^*) \in M_{e_2'}\cap M(\sigma^\varphi, Sp_{\sigma^\varphi}(x)\cdot V'/Sp_{\sigma^\varphi}(x))$$
$$\subset M_{e_2}\cap M(\sigma^\varphi, V).$$

証明終り.

Theorem 1.2.3.

a) $Sp(\sigma^\varphi)\cdot\Gamma(\sigma^\varphi) = Sp(\sigma^\varphi)$.

b) $\Gamma(\sigma^\varphi)$: closed multiplicative subgroup of $\mathbb{R}_+^*$.

c) ψ : faithful normal semi-finite weight on M とすると, $\Gamma(\sigma^\varphi) = \Gamma(\sigma^\psi)$.

Proof.

a) $\Gamma(\sigma^\varphi) \ni 1$ (この時 $Sp_{\sigma^\varphi}(1) = \{1\}$) であるから, $\lambda_1 \in Sp(\sigma^\varphi)$, $\lambda_2 \in \Gamma(\sigma^\varphi)$ とする時, $\lambda_1\lambda_2 \in Sp(\sigma^\varphi)$ を, すなわち, Lemma 1.1.2 h) より, any compact neighborhood V of $\lambda_1\lambda_2$ に対し, $M(\sigma^\varphi, V) \neq \{0\}$ を言えばよい.
そこで, V をそのようなものとし, $j = 1, 2$ に対し, V_j を λ_j の neighborhood で, $V_1 V_2 \subset V$ なるものとする.
$\lambda_1 \in Sp(\sigma^\varphi)$ より Lemma 1.1.2 h) より, $\exists x_1$; non-zero element of $M(\sigma^\varphi, V_1)$. ここで $e \overset{\text{def}}{=} \bigvee_{t\in\mathbb{R}}$ support $\sigma_t^\varphi(x_1)$ とすると, e は non-zero projection of M_φ. さらに, この e に対し, $\exists x_2$; non-zero element of $M(\sigma^\varphi, V_2) \cap M_e$.
又 $\exists t_1 \in \mathbb{R}$; $\sigma_{t_1}^\varphi(x_1)x_2 \neq 0$. ゆえに Lemma 1.1.4 から $M(\sigma^\varphi, V_1)\cdot M(\sigma^\varphi, V_2) \subset M(\sigma^\varphi, V_1V_2) \subset M(\sigma^\varphi, V)$ より, $\sigma_{t_1}^\varphi(x_1)x_2 \in M(\sigma^\varphi, V)$.

b) a) より any non-zero projection e of M_φ に対し, $\Gamma(\sigma^{\varphi_e})\cdot Sp(\sigma^{\varphi_e}) = Sp(\sigma^{\varphi_e})$. 又 一般に,

$\Gamma(\sigma^{\varphi}) \subset \Gamma(\sigma^{\varphi_e})$ より，$\Gamma(\sigma^{\varphi})\cdot S_p(\sigma^{\varphi_e}) \subset S_p(\sigma^{\varphi_e})$.
e は any projection of M_φ より，$\Gamma(\sigma^{\varphi})\cdot\Gamma(\sigma^{\varphi}) \subset \Gamma(\sigma^{\varphi})$.
ゆえに，$\Gamma(\sigma^{\varphi})$ は closed multiplicative subgroup of $\mathbb{R}_+^*$.

c) 題意の ψ に対し，(Invariant $T(M)$ の報告から)
$\exists\{u_t\} \subset M_u$; $\sigma_t^{\psi}(x) = u_t\,\sigma_t^{\varphi}(x)\,u_t^*$ for $\forall t\in\mathbb{R}$, $\forall x\in M$.
この u_t の求め方から，$B(\mathcal{H}_2)$ を type I_2 factor とし，$\{e_{ij}\}_{i,j=1,2}$ を matrix unit とする時，$\exists\theta$: faithful normal semi-finite weight on $M\otimes B(\mathcal{H}_2)$ such that $\sigma_t^{\theta}(x\otimes e_{11}) = \sigma_t^{\varphi}(x)\otimes e_{11}$, $\sigma_t^{\theta}(x\otimes e_{22}) = \sigma_t^{\psi}(x)\otimes e_{22}$ for $\forall t\in\mathbb{R}$, $\forall x\in M$. さらに $1\otimes e_{11}$, $1\otimes e_{22} \in M_\varphi$ で $1\otimes e_{11} \sim 1\otimes e_{22}$ in $M\otimes B(\mathcal{H}_2)$ より，Lemma 1.2.2 d) より，$\Gamma(\sigma^{\theta_{1\otimes e_{11}}}) = \Gamma(\sigma^{\theta_{1\otimes e_{22}}})$. 一方，$\Gamma(\sigma^{\theta_{1\otimes e_{11}}}) = \Gamma(\sigma^{\varphi})$, $\Gamma(\sigma^{\theta_{1\otimes e_{22}}}) = \Gamma(\sigma^{\varphi})$. ゆえに，$\Gamma(\sigma^{\varphi}) = \Gamma(\sigma^{\psi})$.

証明終り.

1.3 Orthogonal of $\Gamma(\sigma^{\varphi})$.

この section も 1.1 の記号を使用する. この section は Theorem 1.3.6 を示すことが目的である. しばらく，そのための用意をする.

Lemma 1.3.1.

V を compact neighborhood of 1 in $\mathbb{R}_+^*$ とし，e_1, e_2 を non-zero projections of M_φ とする時，

$\exists f_1, f_2$; non-zero projections of M_φ, $f_1 \leqq e_1$, $f_2 \leqq e_2$,

$Sp(\sigma^{\varphi_{f_1}}) \subset \mathcal{V} \cdot Sp(\sigma^{\varphi_{f_2}})$, $Sp(\sigma^{\varphi_{f_2}}) \subset \mathcal{V} \cdot Sp(\sigma^{\varphi_{f_1}})$.

<u>Proof.</u>

M: factor より $\exists x$: non-zero element of M such that $e_1 x = x$, $x e_2 = x$. 又 Lemma 1.1.5 より, $\exists g \in L^1(\mathbb{R})$; $\cancel{\text{support of } \hat{g}}$ support of $\hat{g}$ $\subset \mathcal{V}$, $\sigma^\varphi(g)x \neq 0$.

ここで $y \overset{def}{\equiv} \sigma^\varphi(g)x$ とすると, $e_1 y = y$. (なぜならば, $e_1 y = e_1 \sigma^\varphi(g)x = \sigma^\varphi(g)(e_1 x) = \sigma^\varphi(g)x = y$ より)

同様に $y e_2 = y$. さらに Lemma 1.1.2 g) より,

$\cancel{Sp_{\sigma^\varphi}(y)}$ $Sp_{\sigma^\varphi}(y) \subset$ $\cancel{\text{support of } \hat{g}}$ support of $\hat{g}$ $\subset \mathcal{V}$.

そこで, $f_1 \overset{def}{\equiv} \bigvee_{t \in \mathbb{R}} \text{support } \sigma_t^\varphi(y^*)$, $f_2 \overset{def}{\equiv} \bigvee_{t \in \mathbb{R}} \text{support } \sigma_t^\varphi(y)$

とするとこれが求めるものである. それを示すために, まず作り方より, f_1, f_2 : non-zero projections of M_φ, $f_1 \leqq e_1$, $f_2 \leqq e_2$. 次に, $Sp(\sigma^{\varphi_{f_1}}) \subset \mathcal{V} \cdot Sp(\sigma^{\varphi_{f_2}})$ を示す. そのためには. $\lambda \in Sp(\sigma^{\varphi_{f_1}})$ とする時. $\lambda \in \mathcal{V} \cdot Sp(\sigma^{\varphi_{f_2}})$ を, つまり, Lemma 1.1.2 h), e) より, any compact neighborhood $\mathcal{W}$ of λ に対し, ($\mathcal{V}$ は仮定より compact であるから, $\mathcal{V} \cdot Sp(\sigma^{\varphi_{f_2}})$ は closed であるから)

$M(\sigma^\varphi, \mathcal{W}/\mathcal{V}) \cap M_{f_2} \neq \{0\}$ を言えばよい. そこで, $\lambda \in Sp(\sigma^{\varphi_{f_1}})$ より, Lemma 1.1.2 h), e) より,

$\exists x_1$; non-zero element of $M(\sigma^\varphi, W) \cap M_{f_1}$.

すると，Lemma 1.2.2 d) の proof と同様にして，

$\exists t_1 \in \mathbb{R}$; $\sigma_{t_1}^\varphi(y^*)x_1^* \neq 0$, $\exists t_2 \in \mathbb{R}$; $x_2 \overset{\mathrm{def}}{=} \sigma_{t_2}^\varphi(y^*)x_1\sigma_{t_1}^\varphi(y) \neq 0$.

この時，$f_2x_2 = x_2$，$x_2f_2 = x_2$ より $x_2 \in M_{f_2}$.

さらに，Lemma 1.1.4 より

$$M(\sigma^\varphi, 1/Sp_{\sigma^\varphi}(y)) \cdot M(\sigma^\varphi, W) \cdot M(\sigma^\varphi, Sp_{\sigma^\varphi}(y))$$
$$\subset M(\sigma^\varphi, Sp_{\sigma^\varphi}(y) \cdot W / Sp_{\sigma^\varphi}(y)) \subset M(\sigma^\varphi, \tfrac{W}{V}).$$

であるから $x_2 \in M(\sigma^\varphi, \frac{W}{V})$.

ゆえに $M(\sigma^\varphi, W/V) \cap M_{f_2} \neq \{0\}$.

同様にして，$Sp(\sigma^{\varphi_{f_2}}) \subset V \cdot Sp(\sigma^{\varphi_{f_1}})$ も示される.

証明終り.

<u>Lemma 1.3.2.</u>

e を non-zero projection of M_φ とすると $\Gamma(\sigma^{\varphi_e}) = \Gamma(\sigma^\varphi)$.

<u>Proof.</u>

一般に，$\Gamma(\sigma^\varphi) \subset \Gamma(\sigma^{\varphi_e})$. 逆は，

$$\Gamma(\sigma^\varphi) = \bigcap \{ Sp(\sigma^{\varphi_f}) \cdot V ;\ f: \text{non-zero projection of } M_\varphi,\ V: \text{compact neighborhood of } 1 \}$$

より，Lemma 1.3.1 より，$\exists e_0$; non-zero projection of M_φ such that $e_0 \leqq f$ and $Sp(\sigma^{\varphi_{e_0}}) \subset Sp(\sigma^{\varphi_f}) \cdot V$ より.

証明終り.

Lemma 1.3.3.

$F(\sigma^{\varphi}) \overset{\text{def}}{=} \{ V \cdot Sp(\sigma^{\varphi_e})$; V: compact neighborhood of 1 in $\mathbb{R}_+^*$, e: non-zero projection of M_φ $\}$ は filter basis をなし, $\bigcap_{F \in F(\sigma^\varphi)} F = \Gamma(\sigma^\varphi)$ である.

Proof.

後半は明らか. 与 $V_1 \cdot Sp(\sigma^{\varphi_{e_1}})$, $V_2 \cdot Sp(\sigma^{\varphi_{e_2}}) \in F(\sigma^\varphi)$ とし, V: compact neighborhood of 1 in $\mathbb{R}_+^*$ such that $V \subset V_1$, $V^2 \subset V_2$ とする. V と e_1, e_2 に Lemma 1.3.1 を apply して, $\exists f_1, f_2$: non-zero projections of M_φ such that $f_1 \leqq e_1$, $f_2 \leqq e_2$, $V \cdot Sp(\sigma^{\varphi_{f_1}}) \subset V_1 \cdot Sp(\sigma^{\varphi_{e_1}})$, $V\, Sp(\sigma^{\varphi_{f_1}}) \subset V V\, Sp(\sigma^{\varphi_{f_2}}) \subset V_2 \cdot Sp(\sigma^{\varphi_{f_2}})$.
明らかに, $V \cdot Sp(\sigma^{\varphi_{f_1}}) \in F(\sigma^\varphi)$ より, $F(\sigma^\varphi)$ は filter basis をなす. 証明終り.

Lemma 1.3.4. (注: M ; von Neumann algebra でよい)

$\lambda_0 \in \mathbb{R}_+^*$ とすると, 次の条件は同値である.

a) $\lambda_0 \in Sp(\sigma^\varphi)$.

b) $\exists \{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ in M such that $\|x_\alpha\| = 1$ for ${}^\forall\alpha \in A$ and $\| \sigma_t^\varphi(x_\alpha) - \overline{(t, \lambda_0)}\, x_\alpha \| \longrightarrow 0$ if $\alpha \to \infty$ uniformly on any compact set of $\mathbb{R}$.

c) any finite measure μ on $\mathbb{R}$ に対して,

$$|\hat{\mu}(\lambda_0)| \leqq \| \delta^{\varphi}(\mu) \|_{B(M)}.$$

d) $^{\forall} f \in L^1(\mathbb{R})$ に対して, $|\hat{f}(\lambda_0)| \leqq \| \delta^{\varphi}(f) \|_{B(M)}$.

Proof.

a) ⇒ b). $\lambda_0 \in Sp(\delta^{\varphi})$ とする時, Lemma 1.1.2 h) より, any compact neighborhood V of λ_0 に対し, $M(\delta^{\varphi}, V) \neq \{0\}$ であるから, $^{\forall}\varepsilon > 0$, $^{\forall}K$: compact set of $\mathbb{R}$ に対し, $^{\exists}V$: compact neighborhood of λ_0 such that $\| \delta_t^{\varphi}(x) - \overline{(t, \lambda_0)} x \| \leqq \varepsilon \|x\|$ for $^{\forall} x \in M(\delta^{\varphi}, V)$, $^{\forall} t \in K$ を示せばよい. そこで, ε, K をその様なものとする. V_1 を compact neighborhood of λ_0 とし, $f \in L^1(\mathbb{R})$; $\hat{f}(\lambda) = 1$ for $^{\forall}\lambda \in V_1$ とする.

又 $t_0 \in K$ に対し, $F(t_0)(t) \overset{def}{=} f(t - t_0) - \overline{(t_0, \lambda_0)} f(t)$ for $^{\forall} t \in \mathbb{R}$ とすると, $F(t_0) \in L^1(\mathbb{R})$, かつ $^{\forall}\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ に対し

$$\widehat{F(t_0)}(\lambda) = \overline{(t_0, \lambda)}\, \hat{f}(\lambda) - \overline{(t_0, \lambda_0)}\, \hat{f}(\lambda)$$

さらに [10] より, $^{\forall} t_0 \in K$, $^{\exists} k \in L^1(\mathbb{R})$; $\| F(t_0) * k \| < \varepsilon$ かつ, $\hat{k}(\lambda) = 1$ on a neighborhood of λ_0.

又, $t_0 \in K \longrightarrow F(t_0) \in L^1(\mathbb{R})$ の continuity から, λ_0 の neighborhood V_2 が存在して, $^{\forall} t_0 \in K$, $^{\exists} k \in L^1(\mathbb{R})$ such that $\hat{k}(\lambda) = 1$ on V_2 and $\| F(t_0) * k \| < \varepsilon$.

ここで, V : compact neighborhood of λ_0 such that $V \subset V_1 \cap V_2$ とし, 又 $x \in M(\delta^{\varphi}, V)$, $t_0 \in K$ とする.

今 $\mu \overset{\text{def}}{=} \delta_{t_0} - \overline{(t_0, \lambda_0)}\,\delta_0$ とすると、$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*$ に対し、

$\hat{\mu}(\lambda) = \overline{(t_0, \lambda)} - \overline{(t_0, \lambda_0)}$, $\sigma^{\varphi}(\mu)x = \sigma^{\varphi}_{t_0}(x) - \overline{(t_0, \lambda_0)}\,x$.

さらに、$\forall \lambda \in V$ に対し、

$(F(t_0) * k)^{\wedge}(\lambda) = \widehat{F(t_0)}(\lambda)\,\hat{k}(\lambda) = \hat{\mu}(\lambda)$.

ゆえに Lemma 1.1.2 k) より、

$$\| \sigma^{\varphi}_{t_0}(x) - \overline{(t_0, \lambda_0)}\,x \| = \| \sigma^{\varphi}(\mu) x \|$$
$$= \| \sigma^{\varphi}(F(t_0) * k)(x) \|$$
$$\leqq \| F(t_0) * k \| \cdot \| x \| \leqq \varepsilon \| x \|.$$

b) $\Rightarrow$ c). μ を finite measure on $\mathbb{R}$ とし、$\{x_\alpha\}$ は条件 b) をみたすものとする。$\forall K$: compact set of $\mathbb{R}$ に対し、

$$\| \sigma^{\varphi}(\mu)(x_\alpha) - \hat{\mu}(\lambda_0) x_\alpha \| = \| \int_{\mathbb{R}} (\sigma^{\varphi}_t(x_\alpha) - \overline{(t, \lambda_0)}\,x_\alpha)\, d\mu(t) \|$$
$$\leqq \sup_K \| \sigma^{\varphi}_t(x_\alpha) - \overline{(t, \lambda_0)}\,x_\alpha \| \cdot \| \mu \| + 2 |\mu| (K^c).$$

ゆえに、$\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_\alpha \in M$ such that $\| x_\alpha \| = 1$ and

$\| \sigma^{\varphi}(\mu) x_\alpha \| \geqq |\hat{\mu}(\lambda_0)| - \varepsilon$.

ゆえに $|\hat{\mu}(\lambda_0)| \leqq \| \sigma^{\varphi}(\mu) \|_{B(M)}$.

c) $\Rightarrow$ d). $\forall f \in L^1(\mathbb{R})$ に対し、$d\mu \overset{\text{def}}{=} f\,dt$ とすれば c) より d) が得られる。

d) $\Rightarrow$ a). $Sp(\sigma^{\varphi})$ の定義より明らか。

証明終り。

<u>Lemma 1.3.5.</u> （注：M; von Neumann algebra でよい）

$s \in \mathbb{R}$ とすると $Sp_{B(M)}(\sigma_s^\varphi) = \{\overline{(s, \lambda)} ; \lambda \in Sp(\sigma^\varphi)\}^-$.

ここで $Sp_{B(M)}(\sigma_s^\varphi)$ は，Banach algebra $B(M)$ における，σ_s^φ の spectrum を表わす．(以後 その様にする．)

<u>Proof.</u>

Lemma 1.3.4 より，左辺が右辺より大きい．逆向きについては，今 $\lambda_0 \notin \{\overline{(s, \lambda)} ; \lambda \in Sp(\sigma^\varphi)\}^-$ とする．

又，W を open subset of $T_1 \overset{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} ; |z| = 1\}$ で $W \supset \{\overline{(s, \lambda)} ; \lambda \in Sp(\sigma^\varphi)\}^-$, $\lambda_0 \notin W$ とする．

さらに，$f \in C^\infty(T_1)$; $f(z) = (z - \lambda_0)^{-1}$ for $\forall z \in W$ とする．この時 $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$, $\sum |a_n| < +\infty$ for $\forall z \in T_1$ と出来る．そこで $\Phi \overset{\text{def}}{=} \sum a_n \sigma_{ns}^\varphi$ とすると $\Phi \in B(M)$. さらに，$\Phi = \sigma^\varphi(\sum a_n \delta_{ns})$. すると，$\mu \overset{\text{def}}{=} (\delta_s - \lambda_0 \delta_0) * (\sum a_n \delta_{ns})$ とすると，

$$\Phi \cdot (\sigma_s^\varphi - \lambda_0) = (\sigma_s^\varphi - \lambda_0) \cdot \Phi = \sigma^\varphi(\mu).$$

この時 $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*$ に対し．

$$\hat{\mu}(\lambda) = (\overline{(s, \lambda)} - \lambda_0) \cdot (\sum a_n \overline{(ns, \lambda)})$$
$$= (\overline{(s, \lambda)} - \lambda_0) f(\overline{(s, \lambda)}).$$

f の定義のしかたより，$\hat{\mu}(\lambda) = 1$ for $\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{R}_+^* ; \overline{(s, \lambda)} \in W\}$.

この set は open で，$Sp(\sigma^\varphi)$ を含んでいるから，Lemma 1.1.2 b) より $\forall x \in M$ に対し．$\sigma^\varphi(\mu)x = \sigma^\varphi(\delta_0)x = x$.

ゆえに, $\lambda_0 \notin Sp_{B(M)}(\sigma_s^\varphi)$.

証明終り.

Remark.

上のLemmaより, σをautomorphism of von Neumann algebra Mとし, $Sp_{B(M)}(\sigma) = \{1\}$ならば, $\sigma = 1$を示している.

以上の用意から, $\Gamma(\sigma^\varphi)$のorthogonalは次の様に与えられる.

Theorem 1.3.6. (M : factor に戻る.)

$Sp(\sigma^\varphi)/\Gamma(\sigma^\varphi)$: compact

$\Rightarrow \Gamma(\sigma^\varphi) = T(\sigma^\varphi)^\perp$

ここで $T(\sigma^\varphi) \overset{def}{=} \{t \in \mathbb{R} ; \exists u \in (C_\varphi)_u,\ \sigma_t^\varphi(x) = uxu^* \text{ for } \forall x \in M\}$.

(実は, $T(M) = T(\sigma^\varphi)$である.)

Proof.

[I] $t_0 \in T(\sigma^\varphi)$, i.e. $\exists u \in (C_\varphi)_u$; $\sigma_{t_0}^\varphi(x) = uxu^*$ for $\forall x \in M$ とする時, $t_0 \in \Gamma(\sigma^\varphi)^\perp$を, i.e. $(t_0, \lambda) = 1$ for $\forall \lambda \in \Gamma(\sigma^\varphi)$を示す. そのために, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists e$: non-zero spectral projection of M_φ, $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ such that $|\lambda| = 1$, $\|ue - \lambda e\| < \varepsilon$.

したがって, この時 $\sigma_{t_0}^{\varphi_e}(x) = uxu^*$ for $\forall x \in M_e$より

$Sp_{B(M_e)}(\sigma_{t_0}^{\varphi_e}) \subset \{\lambda_1 \lambda_2^{-1} ; \lambda_1, \lambda_2 \in Sp(ue)\}$であるから.

$$Sp_{B(M_e)}(\sigma_{t_0}^{\varphi_e}) \subset \{z \in \mathbb{C} \,;\, |z-1| \leqq \varepsilon\}.$$

Lemma 1.3.5 より，$\forall \lambda \in Sp(\sigma^{\varphi_e})$ に対し，

$|\overline{(t_0, \lambda)} - 1| \leqq \varepsilon$ ．ゆえに $\forall \lambda \in \Gamma(\sigma^\varphi)$ に対し，$(t_0, \lambda) = 1$.

[II] 逆に $t_0 \in \Gamma(\sigma^\varphi)^\perp$ とする時 $t_0 \in T(\sigma^\varphi)$ を示す．

今 $0 < \forall \varepsilon < 1$ に対し，$V_\varepsilon \stackrel{def}{=} \{\lambda \in \mathbb{R}_+^* \,;\, Re(t_0, \lambda) > 1 - \varepsilon\}$

とすると，$\forall \lambda \in \Gamma(\sigma^\varphi)$ に対し，$V_\varepsilon \cdot \lambda = V_\varepsilon$ ．

したがって，Φ を canonical mapping from $\mathbb{R}_+^*$ into $\mathbb{R}_+^*/\Gamma(\sigma^\varphi)$

とすると，$\Phi^{-1}\Phi(V_\varepsilon) = V_\varepsilon$ ． さらに $\{\Phi(F_1) \,;\, F_1 \in F(\sigma^\varphi)\}$

は compact set の filter basis をなし，(Theorem 1.2.3 a))

$\Phi^{-1}\Phi(F_1) = F_1$ and $\displaystyle\bigcap_{F_1 \in F(\sigma^\varphi)} \Phi(F_1) = \{1\}$.

したがって，上の ε に対し，$\exists F_1 \in F(\sigma^\varphi)$ such that

$\Phi(F_1) \subset \Phi(V_\varepsilon)$ ． i.e. $F_1 \subset V_\varepsilon$ ．ゆえに non-zero

projection f of M_φ が 存在して，$Sp(\sigma^{\varphi_f}) \subset V_\varepsilon$ ．

一方 Lemma 1.3.5 より，$Sp_{B(M_f)}(\sigma_{t_0}^{\varphi_f}) = \overline{\{\overline{(t_0, \lambda)} \,;\, \lambda \in Sp(\sigma^{\varphi_f})\}}$

であるから，[11] の Theorem 4.1.19 より，$\exists u \in M_u$

such that $\sigma_{t_0}^\varphi(x) = uxu^*$ for $\forall x \in M$ ．

したがって 又，$u \in (M_\varphi)_u$ ． ゆえに $u \in (C_\varphi)_u$.

ゆえに $t_0 \in T(\sigma^\varphi)$.

証明終り．

<u>Proposition 1.3.7.</u>

a) any non-zero projection e of M_φ に対し，$\exists\psi$: faithful normal semi-finite weight on M such that

$$Sp(\sigma^\psi) \subset Sp(\sigma^{\varphi_e}).$$

b) $\Gamma(\sigma^\varphi) = \bigcap \{ Sp(\sigma^\psi);\ \psi$: faithful normal semi-finite weight on $M.\}$

<u>Proof.</u>

a) e を non-zero projection of M_φ とする.

<u>Case [I]</u> $e \sim 1$ in M の場合. 条件より $\exists u \in M_{p.i}$; $uu^* = e$, $u^*u = 1$. 今 $\forall x \in M$, $\forall t \in \mathbb{R}$ に対し

$$V_t(x) \overset{\mathrm{def}}{=} u^*\sigma_t^\varphi(uxu^*)u \quad \left(= (u^*\sigma_t^\varphi(u))\sigma_t^\varphi(x)(u^*\sigma_t^\varphi(u))^* \right)$$

とすると，$u^*\sigma_t^\varphi(u) \in M_u$ $(\forall t \in \mathbb{R})$

かつ $\quad u^*\sigma_{t_1}^\varphi(u)\sigma_{t_1}^\varphi(u^*\sigma_{t_2}^\varphi(u)) = u^*\sigma_{t_1+t_2}^\varphi(u).$

したがって（Invariant $T(M)$ の報告参照）$\exists\psi$; faithful normal semi-finite weight on M such that $V_t(x) = \sigma_t^\psi(x)$ for $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall x \in M$. 一方 $x \in M \longrightarrow uxu^* \in M_e$ は $*$-isomorphism より $Sp(\sigma^\psi) = Sp(\sigma^{\varphi_e})$.

<u>Case [II]</u> $e \not\sim 1$ in M かつ M_φ は minimal projection を含まない場合. まず M を finite とする. i.e. $\exists\tau$: finite trace on M such that $\tau(1) = 1$. 仮定より，any non-zero projection f of M_φ と，$\forall\varepsilon > 0$ に対し，$\exists f_1$; non-zero

projection of M_φ such that $f_1 \leqq f$ and $\tau(f_1) < \varepsilon$
であるから, $n \in \mathbb{Z}$ を $\frac{1}{n} \leqq \tau(e)$ とすると 次の様な,
maximal family $\{f_\alpha\}$ of non-zero projections of M_φ.
すなわち, $f_\alpha \leqq e$, $\sum_\alpha \tau(f_\alpha) \leqq \frac{1}{n}$, 互いに orthogonal.
ここで $e_1 \overset{def}{=} \sum_\alpha f_\alpha$ とすると maximality から $\tau(e_1) = \frac{1}{n}$.
したがって, この時, $\exists e_1$; non-zero projection of M_φ; $e_1 \leqq e$,
$\exists \{e_\beta\}$: mutually orthogonal non-zero projections of M such that $e_\beta \sim e_1$ in M for $\forall \beta$ and $\sum e_\beta = 1$ and $e_1 \in \{e_\beta\}$.
このことは, M が finite でなくても成立する. なぜならば,
M が finite でなく, $e \not\sim 1$ より, mutually orthogonal projections $\{g_\beta\}$ が存在し, $g_\beta \sim e$ for $\forall \beta$ and $1 - e = \sum g_\beta$.
したがって, $\{g_\beta\} \cup \{e\}$ が求めるものである.
したがって, いずれにしても, F を type I factor とし, p を minimal projection of F とすると, $x \in M_{e_1}$ に対し,
$I(x) \overset{def}{=} x \otimes p$ とすると, I は M から $M_{e_1} \otimes F$ への $*$-isomorphism である. ここで $\forall t \in \mathbb{R}$ に対し, $V_t \overset{def}{=} I^{-1}(\sigma_t^{\varphi_{e_1}} \otimes 1) I$ とすると, $\forall f \in L^1(\mathbb{R})$ に対し, $V(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t) V_t(\cdot)\, dt = I^{-1}(\sigma^{\varphi_{e_1}}(f) \otimes 1) I$.
ゆえに $S_p(V) = S_p(\sigma^{\varphi_{e_1}})$. 又 $e_1 \leqq e$ より Lemma 1.1.2 j) より $S_p(\sigma^{\varphi_{e_1}}) \subset S_p(\sigma^{\varphi_e})$. ゆえに $S_p(V) \subset S_p(\sigma^{\varphi_e})$.
一方, faithful normal semi-finite weight ψ on M が存在して, $V_t = \sigma_t^\psi$ がわかるから, $S_p(\sigma^\psi) \subset S_p(\sigma^{\varphi_e})$.

Case [III] M_φ が minimal projection を含む場合.

今 f を non-zero minimal projection of M_φ such that $f \leqq e$ とすると, $Sp(\sigma^{\varphi_e}) \supset Sp(\sigma^{\varphi_f}) = \Gamma(\sigma^{\varphi_f}) = \Gamma(\sigma^{\varphi})$.
(f の minimality と, Lemma 1.3.2 より).
したがって次の様な, 一般的な Lemma を示せばよい.

Lemma 1.3.8.

M を von Neumann algebra (でよい.) とし, M_φ を Case [III] の条件を満たすとするならば, faithful normal semi-finite weight ψ on M が存在し, $Sp(\sigma^{\psi}) = \Gamma(\sigma^{\varphi})$.

Proof.

f を minimal projection of M_φ とすると,
$Sp(\sigma^{\varphi_f}) = \Gamma(\sigma^{\varphi_f}) = \Gamma(\sigma^{\varphi})$. ゆえに $^\forall s \in \Gamma(\sigma^{\varphi})^\perp$ に対し Lemma 1.3.5 より. $Sp_{B(M)}(\sigma_s^{\varphi_f}) = \{1\}$. ゆえに, $\sigma_s^{\varphi_f} = 1$.
すると, $^\forall s \in \Gamma(\sigma^{\varphi})^\perp$ に対し, f の central support は 1 より.
$^{\exists_1} u_s \in M_u$ such that $fu_s = u_s f = f$ and $\sigma_s^\varphi(x) = u_s x u_s^*$ for $^\forall x \in M$. じつは, さらに $u_s \in M_\varphi$ である. なぜならば, φ は, σ_t^φ-invariant であるから, $^\forall y \in M$, $^\forall t \in \mathbb{R}$ に対し, $\varphi(u_s y u_s^*) = \varphi(\sigma_s^\varphi(y)) = \varphi(y)$. 今, 特に, $^\forall x \in M$ に対し, xu_s を y に代入すると, $\varphi(u_s x) = \varphi(x u_s)$. 一方, 又, $u_s \mathfrak{m}_\varphi \subset \mathfrak{m}_\varphi$, $\mathfrak{m}_\varphi u_s \subset \mathfrak{m}_\varphi$. (ここに $\mathfrak{m}_\varphi$ は, $\mathfrak{n}_\varphi \overset{\text{def}}{=} \{x \in M ; \varphi(x^* x) < +\infty$ とする時, $\mathfrak{n}_\varphi^* \mathfrak{n}_\varphi$ である.)
ゆえに, [9] Theorem 3.6 より, $u_s \in M_\varphi$.

$s \longrightarrow u_s$ は multiplicative, strong continuous より,
$\forall t \in \mathbb{R}$ に対し, $\exists v_t \in (M_\varphi)_u$ such that $v_t = u_t$ for $\forall t \in T(\sigma^\varphi)^\perp$.
ここで, $\forall t \in \mathbb{R}$ に対し, $\tau_t(x) \overset{def}{=\!=} v_t^* \sigma_t^\varphi(x) v_t$ for $\forall x \in M$
とする. 又. faithful normal semi-finite weight ψ on M が
存在し, $\tau_t = \sigma_t^\psi$ なることがわかる. したがって.
$t \in T(\sigma^\varphi)^\perp = T(\sigma^\varphi)$ に対し, $\sigma_t^\psi = 1$. すると, Lemma 1.3.5
及び, Theorem 1.2.3 c) より $S_p(\sigma^\psi) = T(\sigma^\varphi)$.

証明終り.

§2. Invariant S

2.1. Preliminary

以後, §2 では. M を factor とする.

Definition 2.1.1.

$$S(M) \overset{def}{=\!=} \bigcap \{ S_p(\Delta_\varphi) ; \varphi : \text{faithful normal semi-finite weight on } M. \}$$

定義から, $S(M)$ は closed subset of $\mathbb{R}_+$ でかつ
algebraic invariant of M である.

Lemma 2.1.2.

M を factor とする時, 次の条件は, 同値である.

a) $0 \notin S(M)$ b) $S(M) = \{1\}$ c) M: semi-finite

Proof

c) ⇒ b) ⇒ a) は明らか.

a) ⇒ c) φ を faithful normal semi-finite weight on M such that $0 \notin Sp(\Delta_\varphi)$. とする. $J_\varphi \Delta_\varphi J_\varphi = \Delta_\varphi^{-1}$ より, $\exists \lambda \geqq 1$; $Sp(\Delta_\varphi) \subset [1/\lambda, \lambda]$. したがって, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall x \in M$ に対し, $H_\varphi \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Log}\,\Delta_\varphi$ とすれば, bounded で, $\pi_\varphi(\sigma_t^\varphi(x)) = e^{itH_\varphi}\pi_\varphi(x)e^{-itH_\varphi}$. [11] Theorem 4.1.15 と [9] Theorem 7.4 から, M は semi-finite.

証明終り.

<u>Lemma 2.1.3.</u>

M : finite $\Longleftrightarrow \exists \varphi$; faithful normal positive linear form on M ; $0 \notin Sp(\Delta_\varphi)$.

<u>Proof</u>

M を finite factor とする時 τ を faithful normal trace on M とすると, $0 \notin Sp(\Delta_\tau)$.

逆に, φ を faithful normal positive linear form on M such that $0 \notin Sp(\Delta_\varphi)$ とすると, Δ_φ は bounded operator. 今 $\{x_\alpha\}$ in M such that $\|x_\alpha\| \leqq 1$ and $x_\alpha \longrightarrow x$ strongly とすると, $\mathcal{H}_\varphi$ において, $\eta_\varphi(x_\alpha) \longrightarrow \eta_\varphi(x)$. したがって, $\Delta_\varphi^{1/2}$ は bounded operator ゆえ,

$$\eta_\varphi(x_\alpha^*) = J_\varphi \Delta_\varphi^{1/2}\eta_\varphi(x_\alpha) \longrightarrow J_\varphi \Delta_\varphi^{1/2}\eta_\varphi(x) = \eta_\varphi(x^*).$$

$\xi \overset{\mathrm{def}}{=} \eta_\varphi(1)$ in $\mathcal{H}_\varphi$ は cyclic, separating vector for $\pi_\varphi(M)$.

又、$\|\pi_\varphi(x_\alpha^*)\| \leqq 1$, $\pi_\varphi(x_\alpha^*)\xi \longrightarrow \pi_\varphi(x^*)\xi$. ゆえに、$x_\alpha^* \longrightarrow x^*$: strongly. ゆえに [8] の P303 より M は finite.

証明終り.

Definition 2.1.4.

M を von Neumann algebra とする. faithful normal semi-finite weight φ on M が faithful normal strictly semi-finite weight on M とは、次の同値な条件のいずれかを満たす事である.

a) any non-zero positive element x of M に対し、$\forall t \in \mathbb{R}$ で σ_t^φ-invariant で、x で positive になる normal positive linear form ψ が存在する.

b) $\varphi|_{M_\varphi}$ は、faithful normal semi-finite trace on M_φ.

c) M から M_φ への faithful normal conditional expectation E_φ が存在し、$\varphi \circ E_\varphi = \varphi$.

d) $\exists \{\psi_i\}_{i \in I}$; normal positive linear form such that these supports は互いに orthogonal で、かつ $\forall x \in M_+$ に対し $\varphi(x) = \sum \psi_i(x)$.

e) $\forall t \in \mathbb{R}$ に対し、σ_t^φ-invariant な M から M_φ への faithful normal conditional expectation が存在する.

(同値なことは、[1] Theorem 3.4 を参照.)

2. 2. Equality $S(M)\cap \mathbb{R}_+^* = \Gamma(\sigma^\varphi)$

記号は 全て §1 と同じである.

Lemma 2.2.1

φを faithful normal semi-finite weight on M とすると

$$Sp(\sigma^\varphi) = Sp(\Delta_\varphi)\cap \mathbb{R}_+^*.$$

Proof

μを finite measure on $\mathbb{R}$ とすると, $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$に対し,

$$\hat{\mu}(\lambda^{-1}) = \int_{\mathbb{R}} (t,\lambda)\, d\mu(t).$$

$\hat{\mu}$ は $(0,\infty)$ 上で bounded, continuous function で, Δ_φは positive, self-adjoint, non-singular operator より, $\hat{\mu}(\Delta_\varphi^{-1})$ は意味をもち, $\mathfrak{H}_\varphi$ における bounded operator を定義する. この時, $x\in\mathfrak{N}_\varphi$ とし, $y \overset{\mathrm{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} \sigma_t^\varphi(x)\, d\mu(t)$ とすると, $y\in\mathfrak{N}_\varphi$ でかつ, $\hat{\mu}(\Delta_\varphi^{-1})\eta(x)=\eta(y)$ である.

なんとなれば, μを今 positive で mass 1 と仮定してよい. weight φの weakly lower semi-continuity より, $\{y\in M\ ;\ \|y\|\leqq\|x\|,\ \varphi(y^*y)\leqq\varphi(x^*x)\}$ は strong* topology で closed. 又この集合は convex であるから weakly closed. そして y は, この集合の weakly closure の元である. ゆえに $\varphi(y^*y)<+\infty$ より, $y\in\mathfrak{N}_\varphi$. ゆえに $\eta(y)$は意味を持ち, $\forall z\in\mathfrak{N}_\varphi$ に対し,

$$\langle \eta(y),\eta(z)\rangle = \varphi(z^*y) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(z^*\sigma_t^\varphi(x))\, d\mu(t)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \langle \Delta_\varphi^{it} \eta(x), \eta(z) \rangle \, d\mu(t)$$
$$= \langle \hat{\mu}(\Delta_\varphi^{-1}) \eta(x), \eta(z) \rangle \text{ より.}$$

したがって，$f \in L^1(\mathbb{R})$ とすると，

$$\sigma^\varphi(f) = 0 \iff \sigma^\varphi(f)x = 0 \quad \text{for } {}^\forall x \in \mathfrak{n}_\varphi$$
$$\iff \hat{f}(\Delta_\varphi^{-1})\eta_\varphi(x) = 0 \quad \text{for } {}^\forall x \in \mathfrak{n}_\varphi$$
$$\iff \hat{f} = 0 \text{ on } Sp(\Delta_\varphi^{-1}) \cap \mathbb{R}_+^*$$
$$= Sp(\Delta_\varphi) \cap \mathbb{R}_+^*.$$

ゆえに，$Sp(\sigma^\varphi) = Sp(\Delta_\varphi) \cap \mathbb{R}_+^*$.

証明終り.

以上の用意から 次の Theorem を得る.

Theorem 2.2.2.

Mを factor とし，φを any faithful normal semi-finite weight on M とすると

$$S(M) \cap \mathbb{R}_+^* = \Gamma(\sigma^\varphi).$$

Proof.

$$S(M) \cap \mathbb{R}_+^* = \left(\bigcap_\psi Sp(\Delta_\psi) \right) \cap \mathbb{R}_+^* \quad (\text{ここで}$$

ψは M上の faithful normal semi-finite weight)

$$= \bigcap_\psi \left(Sp(\Delta_\psi) \cap \mathbb{R}_+^* \right)$$
$$= \bigcap_\psi Sp(\sigma^\psi) \quad (\text{Lemma 2.2.1 より})$$
$$= \Gamma(\sigma^\varphi) \quad (\text{Proposition 1.3.7 より.}).$$

証明終り.

Theorem 2.2.2 と §1 の用意から 次のことがわかる.

Corollary 2.2.3.

M を factor, φ を faithful normal semi-finite weight on M とする.

a) $S(M) \cap \mathbb{R}_+^*$: closed multiplicative subgroup of $\mathbb{R}_+^*$.

b) $Sp(\Delta_\varphi)$ は invariant for multiplication of non zero, any element of $S(M)$.

c) $S(M) \cap \mathbb{R}_+^* = \bigcap \{ Sp(\Delta_{\varphi_e}) \cap \mathbb{R}_+^* ;\ e$ は any non-zero projection of M_φ. $\}$

d) c) において, e は any non-zero projection of C_φ つまり, center of M_φ でも 同じ結果を得る.

e) $S(M) = \bigcap \{ Sp(\Delta_\psi) ;\ \psi$ は faithful normal strictly semi-finite weight on M. $\}$

f) M を σ-finite とし, properly infinite, semi-finite でなければ. $S(M) = \bigcap \{ Sp(\Delta_\varphi) ;\ \varphi$ は faithful normal state on M. $\}$

もし, properly infinite, semi-finite の時は. 左辺 $= \{1\}$ で, 右辺 $= \{0, 1\}$ である.

g) M_φ ; factor $\Rightarrow S(M) = Sp(\Delta_\varphi)$.

h) $S(M) = \{0, 1\} \Rightarrow$ center of M_φ, i.e. C_φ は minimal projection を含まない.

i) M を factor とし, N を semi-finite factor とすると,

$$S(M \otimes N) = S(M).$$

j) e を non-zero projection of M とする時.

$$S(M) = S(M_e).$$

k) M を factor acting on Hilbert space $\mathcal{H}$ とすると.

$$S(M) = S(M').$$

<u>Proof</u>

a) b) Theorem 2.2.2, Lemma 2.2.1, Theorem 1.2.3 a) b) より明らか.

c) Theorem 2.2.2 と $\Gamma(\sigma^\varphi)$ の定義より.

d) Theorem 2.2.2 と Lemma 1.2.2 b) より.

e) M が semi-finite なら明らか. 今 M は purely infinite facto とする. 又 ψ を faithful normal strictly semi-finite weight on M とし, e を any non-zero projection of M_φ とすると, 条件より. type I factor F が存在して. M と $M_e \otimes F$ は $*$-isomorphic. すると $\psi_e \otimes$ (trace) は $M_e \otimes F$ 上の faithful normal strictly semi-finite weight であるから. faithful normal strictly semi-finite weight w on M が存在して.

$$Sp(\Delta_w) = Sp(\Delta_{\psi_e} \otimes 1) = Sp(\Delta_{\psi_e})$$

より, c) を apply すればよい.

f) Mをσ-finite, purely infinite とする. 今φを faithful normal positive linear form on Mとし, eを non-zero projection of M_φとすると, MからM_eへの $*$-isomorphism Iが存在する. 一方φ_eは faithful normal positive linear form on M_e であるから, faithful normal positive linear form ψ on Mが存在し, $\psi = \varphi_e \circ \mathrm{I}$, かつ $Sp(\Delta_\psi) = Sp(\Delta_{\varphi_e})$. そして c) を apply すればよい.

次に Mを finite とするならば, 両辺 $\{1\}$ に等しい.

最後に Mをσ-finite, semi-finite, properly infinite とすると, Lemma 2.1.2 より $S(M) = \{1\}$. 一方 Mが semi-finite の時は $T(M) = \mathbb{R}$ より, $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ に対し, faithful normal positive linear form ψ on Mが存在して, $\sigma_{t_0}^{\psi} = 1$. つまり $\Delta_\psi^{it_0} = 1$. したがって, $\lambda^{it_0} \neq 1$ ならば, $\lambda \notin Sp(\Delta_\psi)$. ゆえに Lemma 2.1.2, Lemma 2.1.3 より 右辺 $= \{0, 1\}$.

g) d) より明らか.

h) center of M_φが minimal projection を含むとすると, Lemma 1.2.2 b) と Proposition 1.3.7 より faithful normal semi-finite weight ψ on Mが存在して, $Sp(\sigma^\psi) = \Gamma(\sigma^\psi) = \Gamma(\sigma^\varphi)$ より.

i) φを faithful normal semi-finite weight on M, τを

faithful normal semi-finite trace on N とし, $\psi \overset{\mathrm{def}}{=} \varphi \otimes \tau$ とすると. $\forall t \in \mathbb{R}$ に対し. $\sigma_t^{\psi} = \sigma_t^{\varphi} \otimes 1$, $M_{\psi} = M_{\varphi} \otimes N$. ゆえに center of M_{ψ} = (center of M_{φ}) $\otimes 1$. したがって, d) と [11] Theorem 2.6.6 より.

j) Theorem 2.2.2, Lemma 1.3.2 及び. M: semi-finite $\Leftrightarrow$ M_e: semi-finite より.

k) M_1, M_2 を factor とし, J を M_1 から M_2 への onto antiisomorphism とし, φ_2 を faithful normal semi-finite weight on M_2 とする. $\varphi_1 \overset{\mathrm{def}}{=} \varphi_2 \circ J$ とすると, φ_1 は faithful normal semi-finite weight on M_1. ゆえに Lemma 2.1.2, Theorem 2.2.2 より, $\Gamma(\sigma^{\varphi_1}) = \Gamma(\sigma^{\varphi_2})$, $S(M_1) = S(M_2)$. ゆえに, i), j) より.

証明終り.

2.3. Orthogonal of $S(M)$

記号は全て以前のものと同じとする.

Theorem 2.3.1.

M を factor とする. $S(M) \neq \{0, 1\}$ ならば.

$$T(M) = (S(M) \cap \mathbb{R}_+^*)^{\perp} \quad \text{for duality}$$

$(t, \lambda) \overset{\mathrm{def}}{=} \lambda^{it}$, $(t \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}_+^*)$.

Proof

$S(M)=\{1\}$ の時は Lemma 2.1.2 より M は semi-finite. ゆえに $T(M)=\mathbb{R}$ より. 次に $S(M)\neq\{1\}$, $S(M)\neq\{0,1\}$ とすると, $\mathbb{R}_+^*/S(M)\cap\mathbb{R}_+^*$ は compact. ゆえに φ を faithful normal semi-finite weight on M とすると, Theorem 2.2.2 より $\mathbb{R}_+^*/\Gamma(\sigma^\varphi)$ は compact. ゆえに Theorem 1.3.6 より, $\Gamma(\sigma^\varphi)=T(\sigma^\varphi)^\perp$.

証明終り.

§3. Example.

この section では ある種の M の $S(M)$ の計算を報告する. その一部は [2], [3], [4], [5], [6] にある. 特に [2], [3] では 証明が載っているので参照されたい.

[A] Ω を measure space with positive σ-finite measure μ とし, G を ergodic かつ freely acting on Ω なる group で, μ は G のもとで quasi-invariant とする. この時 Krieger の ratio set $r(G)$ とは

$\{\lambda\geq 0\,;\ {}^\forall\varepsilon>0,\ {}^\forall\Omega'$: non-null measurable subset of Ω に対し, $s\in G$ が存在して, $\mu(\{\omega\in\Omega'\cap s^{-1}\Omega'\,;\,|\frac{d\,s\mu}{d\mu}(\omega)-\lambda|<\varepsilon\})$ が positive.$\}$ である.

この時 $S(L^\infty(\Omega,\mu)\times G)=r(G)$.

[B] M を factor acting on Hilbert space $\mathcal{H}$ とし, $\lambda \geqq 0$ とすると 次の事は 同値である.

a) $\lambda \in S(M)$

b) $\forall \varepsilon > 0$ と any non-zero element ξ of $\mathcal{H}$ に対し, $x \in M$ と $y \in M'$ が存在し, $\|x\xi\| > 1$, $\|x\xi - y\xi\| < \varepsilon$ かつ $\|x^*\xi - \lambda y^*\xi\| < \varepsilon$ を満たす. (cyclic, separating vector をもつ von Neumann algebra M の $S(M)$ について. [2] にある.)

[C] $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$ とし, M を property L_λ を持つ factor とする時, $\lambda/1-\lambda \in S(M)$ である.

[D] M を factor とし, $\lambda \geqq 0$ とする.

$r_\infty(M) \overset{\text{def}}{=\!=} \{\lambda \geqq 0 \,;\, M \otimes R_\lambda$ は isomorphic to $M\}$

又 $\rho \in [0,1]$ に対し $\rho_0 \in \rho(M) \Leftrightarrow M \otimes R_{\rho_0}$: isomorphic to R_{ρ_0} とする. この時 $\lambda \in (0,1)$ に対し

a) $\lambda \in r_\infty(M)$ $\Rightarrow$ b) M は property $L_{1/1+\lambda}$ を持つ $\Rightarrow$ c) $\lambda \in S(M)$ である. 特に M を Araki-Woods の factor とすると上の a), b), c) は同値で, さらに, Araki-Woods の ratio set $r_\infty(M, \Omega)$ に λ が入ることと同値である. ([3])

さらに. $T_0 > 0$ とし, $\rho_0 \overset{\text{def}}{=\!=} \exp(-2\pi/T_0)$ とし, M を factor とする時, a) $\rho_0 \in \rho(M) \Rightarrow T_0 \in T(M)$ である.

特に．M を Araki-Woods の factor とするならば，a), b) は同値である．（［3］）

［E］ $\lambda \in (0, 1)$ とし，P_λ を Pukanszky の factor （See. ［11］ P192）with $p = \lambda q$ とすると，

$S(P_\lambda) = \{\lambda^n ; n \in \mathbb{Z}\}$，しかし．$r_\infty(P_\lambda) = \{0\}$．

又．G を free group with two generators とし，$U(G)$ を group von Neumann algebra associated with G とすると，$\rho(U(G)) = \phi$ であるが，$T(U(G)) = \mathbb{R}$ である．

［F］ faithful normal state φ on a von Neumann algebra M が almost periodic とは．operator Δ_φ が diagonalizable の時に言う．この時

M を factor とし．any normal state on M が almost periodic faithful normal state の norm limit として与えられる時 $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$ とすると，

M が property $L_\lambda \iff \lambda/1-\lambda \in S(M)$ である．

この証明において使用される Lemma で，次のことが成立する．

φ を faithful normal state on von Neumann algebra M とする時　φ : almost periodic

$\iff \forall a, b \in M$ に対し，$f(t) \overset{\mathrm{def}}{=} \varphi(\sigma_t^\varphi(a^*)b)$ が almost periodic

である．

Corollary として次の事が成立する．

M を $S(M)=\{\lambda^n;\ n\in\mathbb{Z}\}$ なる factor とし，$\mu\in(0,\frac{1}{2})$ とする．この時 M が Powers の property L_μ を持つ

$$\Leftrightarrow\ {}^{\exists}m\in\mathbb{Z}\ ;\ \mu/1-\mu=\lambda^m .$$

最后に，$\lambda\in(0,\frac{1}{2})$ とすると．Powers の property L_λ をもつが，Araki の property L'_λ を持たない factor が separable Hilbert space に act して存在する．

参 考 文 献

[1] F. Combes : Poids associés à une algèbre Hilbertienne à gauche. Comp. Math. 23(1) (1971) P. 49~77.

[2] A. Connes : Un nouvel invariant pour les algèbres de Von Neumann. C. R. Acad. Sci. Paris. 273 (1971) p. 900~903.

[3] A. Connes : Calcul des deux invariants d'Araki et Woods par la théorie de Tomita et Takesaki. C. R. Acad. Sci. 274 (1972) p. 175~178.

[4] A. Connes : Etats presque périodiques sur une algèbre de Von Neumann. C. R. Acad. Sci. 274 (1972) p. 1402~1405.

[5] A. Connes : Groupe modulaire d'une algèbre de Von Neumann. C. R. Acad. Sci. 274 (1972) p. 1923 ~ 1926.

[6] A. Connes : Une classification des facteurs de type III. C. R. Acad. Sci. 275 (1972) p. 523 ~ 525.

[7] A. Connes : Thèse. (Preprint)

[8] J. Dixmier : Les algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien. 2ème édition. Paris Gauthier Villars. 1969.

[9] G. Pedersen and M. Takesaki : The Radon-Nikodym theorem for Von Neumann algebras. (Preprint)

[10] W. Rudin : Fourier analysis on groups. Interscienne Tracts n° 12 (1960).

[11] S. Sakai : C^*-algebras and W^*-algebras. Ergebnisse der Mathematik und ihre grenzbiete Band 60.