数理解析研究所講究録
第 177 巻 1973 年 54-91

On Connes' Work (3)
III型 Factor の分類

東工大 理　中神祥臣

前に引き続き Connes の学位論文の才4，5章を紹介する．主として σ-finite な III_λ 型 Factor，$\lambda \in [0, 1)$ に対する次のような構造定理が調べられている：Factor M が III_λ 型であるためには，II_∞ 型 von Neumann 代数 N の上に或る条件をみたす自己同型写像 θ が与えられ $M \sim N \otimes_\theta Z$ となることが必要十分である．これは竹崎により得られた，Factor M が III 型であるための完全条件は，N 上に或る条件をみたす 1 径数自己同型群 θ_t，$t \in R$ が与えられ $M \sim N \otimes_\theta R$ であるという定理とよく似ている．この定理がこのような形をとるまでには，荒木，竹崎，冨田等による幾つかの仕事や話が在ったことを指適しておこう．

§0. 準備

von Neumann 代数は常に σ-finite とし，(自己)同型写像

は常に*(自己)同型写像を考える. f. n. とは faithful normal のことである. I_n 型 Factor を F_n と表わす.

これから本論に入るための準備をする.

定義. von Neumann 代数 M 上の自己同型写像を θ とする. $\theta^n e = e$ かつ $\theta^n \upharpoonright M_e$ が inner となるような射影 $e \in M \cap M'$ の内で最大のものを $p(\theta^n)$ で表わす. すべての $n \neq 0$ に対し $p(\theta^n) = 0$ のとき, θ は free であるという.

定義. 局所コンパクトな可換群 G から von Neumann 代数 $\{N, \mathcal{H}\}$ 上の自己同型写像群の中への弱連続な準同型写像を θ とする. $\xi \in L^2(G, \mathcal{H})$ に対し $I(x)\xi(s) = \theta_s(x)\xi(s)$, $U_t\xi(s) = \xi(s+t)$, $x \in N$, $s, t \in G$ としたとき, $I(N) \cup \{U_s : s \in G\}$ により生成される $L^2(G, \mathcal{H})$ 上の von Neumann 代数 $N \otimes_\theta G$ を N と G の接合積という. (I, U) を (N, G) から $N \otimes_\theta G$ への canonical map, I を canonical injection という. 特に $G = \mathbb{Z}$ のときには $\theta_n = \theta^n$ などの規約を使う.

Combes [Compositio Math. 23 (1971), 49-77, TH 3.4] によれば, von Neumann 代数 M 上の semi-finite f. n. weight φ に対し次の条件は同値である:

a) $\varphi \restriction M_\varphi$ は M_φ 上の semi-finite f. n. trace ;

b) M から M_φ 上への f. n. 条件付期待値 E_φ があって $\varphi = \varphi \circ E_\varphi$;

c) 互に直交した台を持つ M 上の n. 正値1次形式の集合 $\{\varphi_\iota : \iota \in I\}$ により, $\varphi(x) = \sum_{\iota \in I} \varphi_\iota(x)$, $x \in M_+$;

d) M から M_φ への σ_t^φ-不変な f. n. 条件付期待値がある.

G が discrete な場合, $M = N \otimes_\theta G$ の元は次のように行列表示される $I(x) = (I(x)_{s,t})$, $U_r = ((U_r)_{s,t})$;

$$I(x)_{s,t} = \begin{cases} \sigma_s(x) & st^{-1} = e \\ 0 & st^{-1} \neq e \end{cases} \qquad (U_r)_{s,t} = \begin{cases} 1 & st^{-1} = r \\ 0 & st^{-1} \neq r \end{cases}.$$

この場合, $y = (y_{s,t}) \in M$ に対し, $I(y_{e,e}) \in I(N)$ を対応させる写像は f. n. 条件付期待値である.

定義. von Neumann 代数 M 上の semi-finite f. n. weight φ が上の条件の一つをみたすとき <u>strictly semi-finite</u> という.

上の c) により von Neumann 代数上には常に strictly semi-finite f. n. weight φ がある. さらに b) により M から M_φ 上への f. n. 条件付期待値がある. 次に学位論文の才4章より前に得られた結果を想い起しておこう. そこでは局所コンパクトな加群 $\mathbb{R}$ とその双対群 $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}_+^*$ の関係を $\langle t, \lambda \rangle = \lambda^{it}$,

$t \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \hat{\mathbb{R}}$ で与えている．特に断わらない限り，ここでも同じように扱うことにする．従って $f \in L^1(\mathbb{R})$ の Fourier 変換 $\hat{f}$ は $\hat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \lambda^{-it} dt$ で与えられるし，$Sp(\sigma^\varphi) = \sigma(\Delta_\varphi) \cap \mathbb{R}_+^*$ となる．

定理．M を Factor，φ を M 上の semi-finite f. n. weight とすると $S(M) \cap \mathbb{R}_+^* = \Gamma(\sigma^\varphi)$ $(\equiv \bigcap_{e \in M_\varphi} Sp(\sigma^{\varphi_e}))$．

定理 $\lambda > 0$，M を Factor，N を $N' \cap M \subset N$ なる M の semi-finite な部分 von Neumann 代数，E を M から N 上への f. n. 条件付期待値，$\mathcal{G}$ を $M = (N \cup \mathcal{G})''$ なる $\mathcal{N}(E)$ の部分群，τ を N 上の semi-finite f. n. trace，$\rho_u = d\tau_u / d\tau$ $(u \in \mathcal{G}$, $\tau_u(x) = \tau(uxu^*))$ とする．次の条件は同値である．

a) $\lambda \in S(M)$;

b) 任意な $\varepsilon > 0$ と $e \in N \cap N'$ に対し 0 でない射影 $d \in N \cap N'$，$d \leq e$ と $u \in \mathcal{G}$ が存在して，$udu^* \leq e$ かつ $\sigma(\rho_u^{-1} \restriction N_d) \subset (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)$．

§1．学位論文の第4，5章の主要結果．

M を Factor とする．第3章の結果によれば $S(M) \cap \mathbb{R}_+^*$ は $\mathbb{R}_+^*$ の乗法に関する閉部分群である．したがって $S(M)$ とし

て考えられる形は $\{0\}$, $\{1\}$, $\{\lambda^n : n\in\mathbb{Z}\}$ $(\lambda\in[0,1))$, $\mathbb{R}_+$ のいずれかである. $S(M)=\{\lambda^n : n\in\mathbb{Z}\}$ のとき M を III_λ 型, $S(M)=\mathbb{R}_+$ のとき III_0 型と呼ぶことにする. M が III_λ 型 $(\lambda\in[0,1])$ の場合は, いずれも $0\in S(M)$ であるから, M は III 型である.

命題 1.1. von Neumann 代数 N 上の free な自己同型写像 θ が $N\cap N'$ 上へ ergodic に作用し, N から Factor M の中への同型写像 I が次の条件をみたしているものとする;

a) $I(N)'\cap M\subset I(N)$;

b) M から $I(N)$ 上へ f. n. 条件付期待値がある ;

c) $I(\theta x)=X\,I(x)X^*$, $x\in M$ なる M のユニタリ X が存在して $M=(I(N)\cup\{X\})''$.

このとき M から $N\otimes_\theta\mathbb{Z}$ 上への一意な同型写像 J が存在して $(J\circ I,\ U)$ は $(N,\ \mathbb{Z})$ から $N\otimes_\theta\mathbb{Z}$ への canonical map で $J(X)=U_1$.

証明. b) の条件付期待値を E とする. もし他に f. n. 条件付期待値 E' があったとする. $I(N)$ 上の semi-finite f. n. weight φ に対し, $\tilde{\varphi}=\varphi\circ E$ と $\tilde{\varphi}'=\varphi\circ E'$ は M 上の semi-finite f. n. weight である. $x\in I(N)$ ならば $\sigma_t^{\tilde{\varphi}}(x)=\sigma_t^{\varphi}(x)=\sigma_t^{\tilde{\varphi}'}(x)$

であるから intertwining operator $u_t = u_t^{\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}'}$ を使って, $u_t x = x u_t$ したがって $x \in M_\dagger$ に対し $u_t \in I(N)' \cap M \subset I(N)$ を適用して

$$\tilde{\varphi}'(\sigma_t^{\tilde{\varphi}}(x)) = \varphi(E'(\sigma_t^{\tilde{\varphi}}(x))) = \varphi \circ E'(u_t \sigma_t^{\tilde{\varphi}'}(x) u_t^*)$$

$$= \varphi(u_t E'(\sigma_t^{\tilde{\varphi}'}(x)) u_t^*) = \varphi \circ E'(\sigma_t^{\tilde{\varphi}'}(x)) = \tilde{\varphi}'(\sigma_t^{\tilde{\varphi}'}(x)) = \tilde{\varphi}'(x) .$$

Pedersen and Takesaki [The Radon-Nikodym theorem for von Neumann algebras. Preprint, TH 5.12] により $\tilde{\varphi}' = \tilde{\varphi}(h \cdot)$, $u_t = h^{it}$ となるような正値作用素 $h \eta M_{\tilde{\varphi}}$ が一意に存在する. $h^{it} \in I(N)' \cap M \subset I(N)$ であるから $h \eta I(N) \cap I(N)'$. $I(N)$ 上では $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}'$ であるから $h = 1$, 即ち, $\varphi \circ E = \varphi \circ E'$. これは φ の選び方によらないから $E = E'$. ここで $E''(x) = X^* E(X x X^*) X$, $x \in M$ とすれば, E'' は M から $I(N)$ への f. n. 条件付期待値となる. 上の結果により $E'' = E$ となるから, $E(X x X^*) = X E(x) X^*$, $x \in M$ である.

$M_1 = N \otimes_\theta \mathbb{Z}$ とし, (I_1, U) を $(N, \mathbb{Z})$ から M_1 への canonical map とする. θ は N 上で free, $N \cap N'$ 上で ergodic であるから, M_1 は Factor になり $I_1(N)' \cap M_1 \subset I_1(N)$ をみたす. E_1 を M_1 から $I_1(N)$ への f. n. 条件付期待値とする. $I_1(\theta x) = U_1 I_1(x) U_1^*$ かつ $M_1 = (I_1(N) \cup \{U_1\})''$ は接合積の作り方から明らかである. N 上の f. n. state φ に対し, M, M_1 上の f. n. state $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\varphi}_1$ をそれぞれ $\tilde{\varphi} = \varphi \circ I^{-1} \circ E$, $\tilde{\varphi}_1 = \varphi \circ I_1^{-1} \circ E_1$ で与え, それ等から導かれる M, M_1 の GNS 表現を $\{\pi, \mathcal{H}, \xi\}$, $\{\pi_1, \mathcal{H}_1, \xi_1\}$ とする.

$E(X^{i-k})=0$, $E_1(U_{j-k})=0$ $(j\neq k)$ であるから，任意な $x_{-n}, \cdots, x_1, x_2, \cdots, x_n$ に対し

$$\|\pi(\textstyle\sum_{j=-n}^{n} I(x_j)X^j)\xi\|^2 = \sum_{j=-n}^{n}\sum_{k=-n}^{n}\tilde{\varphi}(X^{-k}I(x_k^* x_j)X^j)$$
$$= \textstyle\sum_{j=-n}^{n}\sum_{k=-n}^{n}\varphi\circ I^{-1}\circ E(X^{-k}I(x_k^* x_j)X^j)$$
$$= \textstyle\sum_{j=-n}^{n}\sum_{k=-n}^{n}\varphi\circ I^{-1}(X^{-k}I(x_k^* x_j)E(X^{j-k})X^k)$$
$$= \textstyle\sum_{j=-n}^{n}\varphi\circ I^{-1}(X^{-j}I(x_j^* x_j)X^j)$$
$$= \textstyle\sum_{j=-n}^{n}\varphi(\theta^{-j}(x_j^* x_j)) = \|\pi_1(\sum_{j=-n}^{n} I_1(x_j)U_j\xi_1\|^2$$

となる．そこで $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}_1$ への対応 Y を

$$Y\pi(\textstyle\sum_{j=-n}^{n} I(x_j)X^j)\xi = \pi_1(\sum_{j=-n}^{n} I_1(x_j)U_j)\xi_1$$

により与えると，well defined で同型写像になる．$J=\pi_1^{-1}\circ \mathrm{ad}\,Y\circ\pi$ とすれば，J は M から M_1 上への同型写像である．$x\in N$ ならば

$$J\circ I(x) = \pi_1^{-1}\circ \mathrm{ad}\,Y\circ\pi(I(x)) = \pi_1^{-1}(Y\pi(I(x))Y^{-1})$$
$$= \pi_1^{-1}(\pi_1(I_1(x))) = I_1(x)$$
$$J(X) = \pi_1^{-1}\circ \mathrm{ad}\,Y\circ\pi(X) = \pi_1^{-1}(Y\pi(X)Y^{-1}) = \pi_1^{-1}(\pi_1(U_1)) = U_1.$$

命題 1.2. $\lambda\in[0,1)$，M を III_λ Factor，φ [resp. ψ] を M 上の strictly semi-finite [resp. semi-finite] f. n. weight とする．

a) $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}'\cap M\subset M_\varphi$ なる $\mathfrak{A}$ がある．このとき $M_\varphi'\cap M\subset M_\varphi$ となる．

b) $M_\varphi\subset M_\psi$ であるための完全条件は $\psi=\varphi(h\cdot)$ なる

$h_1 \eta M_\varphi \cap M'_\varphi$ が存在することである.

証明. a) の証明を三つの部分に分ける.

1) 1 が $\sigma(\Delta_\varphi)$ で孤立している場合.

$\mathfrak{A}$ が $M_\varphi = M(\sigma^\varphi, \{1\})$ で極大可換ならば $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' \cap M_\varphi \subset \mathfrak{A}' \cap M$

$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' \cap M_\varphi$ とすれば, $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}' \cap M$. もし $x \in \mathfrak{A}' \cap M$ かつ $x \notin M_\varphi$ なる $x \neq 0$ があったとする. $y \equiv \sigma(f)x \neq 0$ なる $f \in L^1(\mathbb{R})$ で f の台が十分小さいものを選ぶ. 1 は孤立点だから y^*y, $yy^* \in \mathfrak{A}' \cap M_\varphi = \mathfrak{A}$. $y = u|y|$ とすれば, $u \in \mathfrak{A}'$, $u \notin M_\varphi$, $e \equiv u^*u \in \mathfrak{A}$, $e' \equiv uu^* \in \mathfrak{A}$. したがって $e = e'$.
φ は strictly semi-finite だから, $0 < \varphi(e_0) < +\infty$, $e_0 \leq e$ なる $e_0 \in M_\varphi$ がある. $u_0 \equiv ue_0$ とすれば $\varphi(u_0^*u_0) = \varphi(u_0u_0^*)$ となり $u_0 \notin M_\varphi$ と矛盾する.

$\varphi \upharpoonright M_\varphi$ は M_φ 上の semi-finite f. n. trace になるから, M_φ には 1 の分割 $\{e_\iota : \iota \in I\}$ で $0 < \varphi(e_\iota) < +\infty$ なるものがある.
$\varphi_\iota = \varphi_{e_\iota}$, $M_\iota = M_{e_\iota}$ とする. $T_0 \equiv 2\pi/\log\lambda \in T(M)$ かつ $e_\iota \sim 1$ であるから, $T_0 \in T(M_\iota)$. したがって各 $\iota \in I$ に対し, M_ι 上の state ψ_ι と $h_\iota \eta M_\iota \cap M_{\varphi_\iota}$ が存在して $\psi_\iota = \varphi_\iota(h_\iota \cdot)$ かつ $\sigma^{\psi_\iota}_{T_0} = 1$ となる. h_ι のスペクトル射影を含む $M_\iota \cap M_{\varphi_\iota}$ の極大可換代数を $\mathfrak{A}_\iota$ とする. このときは $\mathfrak{A}'_\iota \cap M_{\varphi_\iota} = \mathfrak{A}'_\iota \cap M_{\psi_\iota}$ となるから, $\mathfrak{A}_\iota$ は M_{ι, ψ_ι} で極大可換になる. 1 は $\sigma(\Delta_{\psi_\iota})$ で孤立しているか

ら，1）より $\mathfrak{a}_\iota = \mathfrak{a}'_\iota \cap M_\iota$ となる．各 $\iota \in I$ について和をとると，$\mathfrak{a} \subset M_\varphi$ かつ $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}' \cap M$ となる．

3） M が III_0 Factor の場合．

φ を M 上の strictly semi-finite f. n. weight とする．ここで M が Factor の場合には $S(M) \cap \mathbb{R}_+^* = \Gamma(\sigma^\varphi)$ であったことを想起しよう．$\sigma = \sigma^\varphi$ とする．任意な $e_0 \in M_\varphi$，$0 < \varphi(e_0) < \infty$ と 1 のコンパクトな近傍 $V \subset \mathbb{R}_+^*$ に対し，0 でない e，$e_1 \in M_\varphi$，$e \leqq e_0$ が存在して

$$\mathrm{Sp}\,\sigma^e \subset V \cdot \mathrm{Sp}\,\sigma^{e_1}, \quad \mathrm{Sp}\,\sigma^{e_1} \subset V \cdot \mathrm{Sp}\,\sigma^e$$

が成り立つ．$\{V \cdot \mathrm{Sp}\,\sigma^{e'} : e' \in M_\varphi \cap M_{e_0}, V$ は 1 のコンパクト近傍$\}$ はフィルター base になり

$$\Gamma(\sigma) = \bigcap_{e_1' \in M_\varphi} V \cdot \mathrm{Sp}(\sigma^{e_1'}) = \bigcap_{e' \in M_\varphi \cap M_{e_0}} V \cdot \mathrm{Sp}(\sigma^{e'}) = \Gamma(\sigma^{e_0}).$$

M は III_0 Factor，すなわち，$\Gamma(\sigma^{e_0}) = S(M) \cap \mathbb{R}_+^* = \{1\}$ であるから，任意な $\varepsilon_0 > 0$ に対し $\mathrm{Sp}\,\sigma^e \subset ([e^{-2\varepsilon_0}, e^{-\varepsilon_0}] \cup [e^{\varepsilon_0}, e^{2\varepsilon_0}])^c$ となるような $e \in M_\varphi \cap M_{e_0}$，$e \neq 0$ がある．ここで $N = M_e(\sigma^e, [e^{-\varepsilon_0}, e^{\varepsilon_0}])$ とすれば，N は M_e の部分代数になり，N 上では $\mathrm{Sp}\,\sigma^e \subset [e^{-\varepsilon_0}, e^{\varepsilon_0}]$ である．したがって Averson [On groups of automorphisms of operator algebras To appear J. Functional Analysis] により $\sigma_t^e(H) = H$，$\|H\| \leqq \varepsilon_0/2$，$\sigma_t^e(x) = e^{itH} x e^{-itH}$，$x \in N$ となるような $H = H^*$，$H \in N$ がある．ここで $\sigma_t'(x) = e^{-itH} \sigma_t^e(x) e^{itH}$，$x \in N$ とすれば $\mathrm{Sp}_{\sigma'}(x) \subset \{1\}$ となる．さらに $M_e \otimes F_2$ 上で

$$\tilde{\sigma}_t\left(\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \sigma_t^e(x_{11}) & \sigma_t^e(x_{12}) e^{itH} \\ e^{-itH} \sigma_t^e(x_{21}) & \sigma_t'(x_{22}) \end{pmatrix}, \quad x_{ij} \in M_e$$

とすれば, $x\in M_e(\sigma^e, (e^{-2\varepsilon_0}, e^{2\varepsilon_0})^c)$ に対し

$$Sp_{\sigma'}(x) = Sp_{\tilde\sigma}\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&x\end{pmatrix}\right) = Sp_{\tilde\sigma}\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right) \subset Sp_{\tilde\sigma}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} Sp_{\sigma}(x)\, Sp_{\tilde\sigma}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}.$$

ところで, $f\in L^1(\mathbb{R})$ に対し

$$\tilde\sigma(f)\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,\tilde\sigma_t\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)dt = \begin{pmatrix}0&0\\ \hat f(e^H)&0\end{pmatrix}$$

であるから $Sp_{\tilde\sigma}\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right) = \sigma(e^H)\subset[e^{-\frac{\varepsilon_0}{2}}, e^{\frac{\varepsilon_0}{2}}]$, したがって $Sp_{\sigma'}(x)\subset(e^{-\varepsilon_0}, e^{\varepsilon_0})^c$. また $N\cup M_e(\sigma^e,[e^{-\varepsilon_0},e^{\varepsilon_0}])$ は M_e で *weakly total* であるから, $Sp_{\sigma'}(x)\cap(e^{-\varepsilon_0},e^{\varepsilon_0}) = \{1\}$, $x\in M_e$. (φの定数倍を調整して) M_e 上の f.n. *state* ψ を $\psi=\varphi_e(e^{-H}\cdot)$ で定義すれば, $\sigma^\psi_t=\sigma'_t$ かつ $\sigma(\Delta_\psi)\cap[e^{-\varepsilon_0},e^{\varepsilon_0}]=\{1\}$ となり, 1 は $\sigma(\Delta_\psi)$ で孤立しているから, M_e に対し 1) を適用できる. $1-e$ が 0 でない場合は $1-e$ を改めて e_0 として上の議論を繰り返せば, M に対する証明を得る.

b) $M_\varphi\subset M_\psi$ とする. a)によれば $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}'\cap M\subset M_\varphi$ なる $\mathfrak{A}$ があるから $M_\varphi'\cap M\subset\mathfrak{A}'\cap M\subset M_\varphi$. $x\in M_\varphi$ に対し $x=\sigma^\psi_t(x) = u^{\psi\varphi}_t\sigma^\varphi_t(x)u^{\psi\varphi*}_t = u^{\psi\varphi}_t x\, u^{\psi\varphi*}_t$ であるから $u^{\psi\varphi}_t\in M_\varphi'\cap M\subset M_\varphi\subset M_\psi$. $x\in M_T$ に対し

$$\psi(x)=\psi(\sigma^\psi_t(x)) = \psi(u^{\psi\varphi}_t\sigma^\varphi_t(x)u^{\psi\varphi*}_t) = \psi(\sigma^\varphi_t(x))$$

となるから, 命題 1.1 の証明でも使った *Pedersen and Takesaki* の定理により, $\psi=\varphi(h\cdot)$ となるような $h\;\eta\;M_\varphi$, $h^{it}=u^{\psi\varphi}_t$ があるか

ら $h \eta M_\varphi \cap M'_\varphi$ となる. 逆に $h \eta M_\varphi \cap M'_\varphi$ で $\psi = \varphi(h\cdot)$ とする. $x \in M_\varphi$ に対し $\sigma_t^\psi(x) = h^{it}\sigma_t^\varphi(x)h^{-it} = x$ であるから $x \in M_\psi$ となる.

命題 1.3. $\lambda \in (0,1)$, $T_0 = 2\pi/\log\lambda$, M を III_λ Factor, φ を M 上の strictly semi-finite f.n. weight とする. 次の条件は同値である.

a) $\sigma^\varphi_{T_0} = 1$

b) $\sigma(\Delta_\varphi) = S(M)$

c) M_φ は Factor

d) $M'_\varphi \cap M = \mathbb{C}$

e) ψ が M 上の semi-finite f.n. weight で $M_\varphi \subset M_\psi$ ならば $\varphi = \alpha\psi$, $\alpha > 0$.

f) M_φ は, M からの f.n. 条件付期待値があるような semi-finite von Neumann 部分代数のうちで極大である.

証明. a)→b) $\sigma(\Delta_\varphi^{iT_0}) = \{1\}$ であるから, $\sigma(\Delta_\varphi) \subset \{\lambda^n : n \in \mathbb{Z}\} = S(M)$.

b)→c) b)により $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} M(\sigma^\varphi, \{\lambda^n\})$ は Factor M で weakly total であるから, 任意な $e_1, e_2 \in M_\varphi$, $e_1 \neq 0$, $e_2 \neq 0$ に対し, n と $x \in M(\sigma^\varphi, \{\lambda^n\})$ が存在して $e_1 x e_2 \neq 0$ となる. $e =$

$S(e_1 x e_2)$ とすれば，$e \in M_\varphi$．再び M は Factor であるから，命題 1.2 の証明 a) の 3) の中のように $\Gamma(\sigma^\varphi) = \Gamma(\sigma^{\varphi_e})$ となり，したがって $M(\sigma^\varphi, \{\lambda^{-n}\}) \cap M_e \neq \{0\}$ である．$y \in M(\sigma^\varphi, \{\lambda^{-n}\}) \cap M_e$，$y \neq 0$ に対し $e_1 x e_2 y \in M_\varphi$ かつ $e_1(e_1 x e_2 y) e_2 \neq 0$ であるから，M_φ は Factor である．

c)→d) $M_\varphi' \cap M \subset M_\varphi \cap M_\varphi' = \mathbb{C}$．

d)→e) 命題 1.2, b) より $\psi = \varphi(h\,\cdot)$ なる $h \,\eta\, M_\varphi \cap M_\varphi'$ がある．d) より $h \in \mathbb{C}$ であるから $\psi = \alpha\varphi$，$\alpha > 0$．

e)→f) M_φ を含み，M からの f.n. 条件付期待値 E が存在するような，M の semi-finite な部分 von Neumann 代数を N とする．τ を N 上の semi-finite f.n. trace とすれば，$\psi = \tau \circ E$ は M 上の semi-finite f.n. weight で，$N \subset M_\psi$ を満たす．このとき $M_\varphi \subset M_\psi$ であるから e) が適用できて，$\psi = \alpha\varphi$，$\alpha > 0$ となる．したがって $N \subset M_\psi = M_\varphi$．

f)→a) $T_0 \in T(M)$ であるから，M 上に $\sigma^\psi_{T_0} = 1$ となるような semi-finite f.n. weight ψ が存在して $\psi = \varphi(h\,\cdot)$，$h \,\eta\, M_\varphi \cap M_\varphi'$．$x \in M$ に対し $E(x) = T_0^{-1}\int_0^{T_0} \sigma^\psi_t(x)\,dt$ とすれば，E は M から M_ψ への σ^ψ_t-不変な f.n. 条件付期待値になり，したがって ψ は strictly semi-finite である．$x \in M_\varphi$ ならば $h^{it}\sigma^\varphi_t(x)h^{-it} = x$ となるから，極大性で $M_\varphi = M_\psi$．ψ は a) をみたしているから e) により $\psi = \alpha\varphi$，$\alpha > 0$ となり，$\sigma^\varphi_{T_0} = \sigma^\psi_{T_0} = 1$ を得る．

定義 1.4. $\lambda \in [0, 1)$, M を III_λ Factor, φ を M 上の strictly semi-finite f. n. weight とする. φ が M 上の <u>generalized trace</u> であるとは, $\lambda \in (0, 1)$ の場合には $\varphi(1) = \infty$ かつ M_φ が Factor ; $\lambda = 0$ の場合には 1 が $\sigma(\Delta_\varphi)$ で孤立していて, M_φ が properly infinite となることである.

命題 1.5. $\lambda \in [0, 1)$ とする. III_λ Factor 上には generalized trace がある.

証明. $\lambda \in (0, 1)$. M を III_λ Factor とする. M 上の f. n. state φ を $\sigma^\varphi_{T_0} = 1$ となるように選ぶ. $M \otimes F_\infty$ 上で $\psi = \varphi \otimes Tr$ とすれば, ψ は strictly semi-finite かつ $\sigma^\psi_{T_0} = 1$. $M \otimes F_\infty \sim M$ であるから M 上に generalized trace がある.

次に M が III_0 Factor の場合を考える. φ_0 を M 上の strictly semi-finite f. n. weight とすれば命題 1.2 の a) の 3) の証明のように, ある $e \in M_{\varphi_0}$, $e \neq 0$ と M_e 上の f. n. state φ が存在して 1 は $\sigma(\Delta_\varphi)$ で孤立している. $M_e \otimes F_\infty$ 上の strictly semi-finite f. n. weight $\psi = \varphi \otimes Tr$ に対しても, 1 は $\sigma(\Delta_\psi)$ で孤立しておりしかも $M_\psi = M_{e,\varphi} \otimes F_\infty$ は properly infinite である. $M \sim M_e \sim M_e \otimes F_\infty$ であるから, M 上に generalized trace がある.

定理 1.6. $\lambda \in (0, 1)$ とする.

a) N を II_∞ Factor, τ をその上の semi-finite f.n. trace, θ を N の自己同型写像で $\tau\circ\theta = \lambda\tau$ をみたしているようなものとすれば, $N \otimes_\theta \mathbb{Z}$ は III_λ Factor である.

b) M が III_λ Factor ならば a) の条件をみたすような (N, θ) が存在して $M \sim N \otimes_\theta \mathbb{Z}$.

c) (N_1, θ_1), (N_2, θ_2) が条件 a) をみたしているとき, $N_1 \otimes_{\theta_1} \mathbb{Z} \sim N_2 \otimes_{\theta_2} \mathbb{Z}$ であるための完全条件は N_1 から N_2 上への同型写像 J があって $J\theta_1 J^{-1}\theta_2^{-1}$ が N_2 の内部自己同型写像に成っていることである.

証明. a) N は Factor で, $\tau\circ\theta = \lambda\tau$ であるから, θ は free である. N は Factor であるから, θ は $N \cap N'$ 上で ergodic である. したがって $M \equiv N \otimes_\theta \mathbb{Z}$ は Factor でしかも $I(N)' \cap M \subset I(N)$ かつ $I(\theta x) = U_1 I(x) U_1^*$ となる. ただし (I, U) は $(N, \mathbb{Z})$ から M への canonical map である. ここで第3章で得られた, $\mu > 0$ のとき, $\mu \in S(M)$ であるための完全条件が任意な $\varepsilon > 0$ に対し, ある n が存在して $\sigma(d\tau\circ\theta^n / d\tau) \subset (\mu-\varepsilon, \mu+\varepsilon)$ であることを想い起せば, $S(M) = \{\lambda^n : n \in \mathbb{Z}\}^-$, 即ち M は III_λ Factor であることがわかる.

b) 命題 1.5 により, M 上には generalized trace φ がある.

$\lambda\varphi$ も M 上の generalized trace で $\sigma_{T_0}^{\varphi}=\sigma_{T_0}^{\lambda\varphi}=1$, $T_0\equiv 2\pi/\log\lambda$ をみたしている. $P\equiv M\otimes F_2$ 上で

$$\psi\left(\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}\right)=\varphi(x_{11})+\lambda\varphi(x_{22}),\qquad x_{ij}\in M$$

とすれば, ψ は P上 strictly semi-finite f. n. weight で $\sigma_{T_0}^{\psi}=1$ となる. ところで $P\sim M$ は III_λ Factor であるから命題 1.3 により, P_ψ も Factor である. $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\in P_\psi$ は共に P_ψ で properly infinite であるから, 或る partial isometry $v\in P_\psi$ が存在して, それぞれ initial, final 射影に成っている. このとき $v=\begin{pmatrix}0&0\\X^*&0\end{pmatrix}$ として得られるユニタリー作用素 $X\in M$ に対し

$$\lambda\varphi(x)=\psi\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&x\end{pmatrix}\right)=\psi\left(v\begin{pmatrix}XxX^*&0\\0&0\end{pmatrix}v^*\right)=\varphi(XxX^*)$$

となる. $N=M_\varphi$, $\theta=\mathrm{ad}X$, $\tau=\varphi\restriction M_\varphi$ とすれば $\tau\circ\theta=\lambda\tau$ であるから, (N,θ) は a) の条件をみたしている. ここで I を N から M_φ への恒等写像とすれば, a) のように θ は N上で free, $N\cap N'$ 上で ergodic であるから, $I(N)'\cap M\subset I(N)$. φ は strictly semi-finite であるから M から $I(N)$ には f. n. 条件付期待値がある. また

$$\begin{pmatrix}0&0\\X^*&0\end{pmatrix}=\sigma_t^{\psi}\left(\begin{pmatrix}0&0\\X^*&0\end{pmatrix}\right)=\sigma_t^{\psi}\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)\sigma_t^{\psi}\left(\begin{pmatrix}X^*&0\\0&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0&0\\\lambda^{it}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_t^{\varphi}(X^*)&0\\0&0\end{pmatrix}$$

であるから $X = \lambda^{-it}\sigma_t^{\varphi}(X)$. 任意な $f \in L^1(\mathbb{R})$ に対し $\sigma^{\varphi}(f)X = \int f(t)\sigma_t^{\varphi}(X)\,dt = \hat{f}(\lambda^{-1})X$ となるから, $Sp_\sigma(X) = \{\lambda^{-1}\}$. 任意な $x \in M(\sigma, \{\lambda^n\})$ に対し, $x = X^{-n}(X^n x) \in X^{-n}I(N)$ である. $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} M(\sigma, \{\lambda^n\})$ は M で weakly total であるから, $M = (I(N) \cup \{X\})''$ となる. 命題 1.1 により $M \sim N \otimes_\theta \mathbb{Z}$.

c) $M_1 \equiv N_1 \otimes_{\theta_1} \mathbb{Z}$ と $M_2 \equiv N_2 \otimes_{\theta_2} \mathbb{Z}$ を共通の III_λ Factor M で考える. τ_j を N_j 上の semi-finite f. n. trace, $(I_j, U^{(j)})$ を $(N_j, \mathbb{Z})$ から M_j への canonical map, E_j を M_j から $I_j(N_j)$ への f. n. 条件付期待値とすれば, $\varphi_j \equiv \tau_j \circ I_j^{-1} \circ E_j$ は M_j 上の strictly semi-finite f. n. weight である. $x \in I_j(N_j)$ と $y \in M_j$ に対し

$$\varphi_j(xy) = \tau_j(I_j^{-1}(E_j(xy))) = \tau_j(I_j^{-1}(x)I_j^{-1}(E_j(y))) = \varphi_j(yx)$$

であるから $I_j(N_j) \subset (M_j)_{\varphi_j}$ となる. θ_j は free かつ ergodic であったから $I_j(N_j)' \cap M_j \subset I_j(N_j)$. したがって $(M_j)'_{\varphi_j} \cap M_j \subset I_j(N_j)' \cap M_j \subset I_j(N_j) \cap I_j(N_j)' = \mathbb{C}$ となり φ_j は M_j 上の generalized trace である. $X_j = U_1^{(j)}$ とする. 再び $I_j(N_j)' \cap M_j \subset I_j(N_j)$ であるから, 命題 1.1 の証明のようにして $E_j(X_j x X_j^*) = X_j E_j(x) X_j^*$, $x \in M_j$ となる. したがって

$$\varphi_j(X_j x X_j^*) = (\tau_j \circ I_j^{-1} \circ E_j)(X_j x X_j^*) = \tau_j \circ \theta_j \circ I_j^{-1} \circ E_j(x)$$
$$= \lambda \tau_j \circ I_j^{-1} \circ E_j(x) = \lambda \varphi_j(x).$$

一方 $P_j = M_j \otimes F_2$ 上で

$$\psi_j\left(\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\right) = \varphi_j(x_{11}) + \varphi_j(X_j x_{22} X_j^*) , \quad x_{ik} \in M_j$$

とすれば，$v_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X_j \end{pmatrix}$ を使って $\psi_j(x) = (\varphi_j \otimes Tr)(v_j x v_j^*)$ と表わせるから

$$\sigma_t^{\psi_j}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = v^* \sigma_t^{\varphi_j \otimes Tr}\left(v \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v^*\right) v = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ X_j^* \sigma_t^{\varphi_j}(X_j) & 0 \end{pmatrix} .$$

したがって $\sigma_t^{\varphi_j}(X_j) = \lambda^{-it} X_j$ となる．また E_{φ_j} は $E_{\varphi_j}(x) = T_0^{-1} \int_0^{T_0} \sigma_t^{\varphi_j}(x)\, dt$，$x \in M_j$ で表わされるから，$n \neq 0$ に対し $E_{\varphi_j}(X_j^n) = T_0^{-1} \int_0^{T_0} \sigma_t^{\varphi_j}(X_j^n)\, dt = T_0^{-1} \int_0^{T_0} (\lambda^{-n})^{it} X^n dt = 0$ となる．他方 $I(N_j) \subset (M_j)_{\varphi_j}$ かつ $M_j = (I_j(N_j) \cup \{X_j\})''$ であるから $E_j = E_{\varphi_j}$ となり $I_j(N_j) = (M_j)_{\varphi_j}$ が得られる．さて φ_j は M で generalized trace であったから，$\sigma_t^{\varphi_2}(x) = u_t^{\varphi_2\varphi_1} \sigma_t^{\varphi_1}(x) u_t^{\varphi_2\varphi_1 *}$，$x \in M$ なる intertwining operator $u_t^{\varphi_2\varphi_1} \in M$ がある．さらに $\sigma_{T_0}^{\varphi_j} = 1$ であるから $u_{T_0}^{\varphi_2\varphi_1} \in \mathbb{C}$，すなわち，ある $\alpha > 0$ に対し $\alpha^{iT_0} = u_{T_0}^{\varphi_2\varphi_1}$ となる．$P \equiv M \otimes F_2$ 上で i)のように

$$\psi\left(\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\right) = \varphi_1(x_{11}) + \alpha\varphi_2(x_{22}) , \quad x_{ik} \in M$$

とすれば，ψ は P 上の generalized trace になり，しかも $\alpha\varphi_2(x) = \varphi_1(X x X^*)$，$x \in M$ となるようなユニタリー作用素 $X \in M$ がある．τ_2 の代りに $\alpha^{-1}\tau_2$ を使って改めて φ_2 を定義し直すと，$\varphi_2(x) = \varphi_1(X x X^*)$，$x \in M$ とできる．上と同じようにして

$\sigma_t^{\varphi_2}(X) = u_t^{\varphi_2,\varphi_1} X$ が得られる．そこで $x \in \mathcal{I}_1(N_1) = M_{\varphi_1}$ ならば，

$\sigma_t^{\varphi_2}(X^* x X) = \sigma_t^{\varphi_2}(X^*)\sigma_t^{\varphi_2}(x)\sigma_t^{\varphi_2}(X) = \underbrace{\sigma_t^{\varphi_2}(X^*)\, u_t^{\varphi_2\varphi_1} x\, u_t^{\varphi_2\varphi_1 *}\, \sigma_t^{\varphi_2}(X)}_{=X^* x X}$ となる．ここで $J = \mathcal{I}_2^{-1} \circ \mathrm{ad}\,X^* \circ \mathcal{I}_1$ とすれば，J は N_1 から N_2 上への同型写像である．また $Sp_{\sigma^{\varphi_2}}((\mathrm{ad}\,X^*(X_1))X_2^*) \subset Sp_{\sigma^{\varphi_1}}(X_1)\, Sp_{\sigma^{\varphi_2}}(X_2^*) = \{1\}$ であるから，$\mathcal{I}_2(u) = (\mathrm{ad}\,X^*(X_1))X_2^*$ なるユニタリー作用素 $u \in N_2$ がある．したがって $y \in N_1$ に対し

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_2 J \theta_1(y) &= X^*(\mathcal{I}_1\theta_1(y))X = X^* X_1 \mathcal{I}_1(y) X_1^* X \\
&= \mathcal{I}_2(u) X_2 X^* \mathcal{I}_1(y) X X_2^* \mathcal{I}_2(u^*) \\
&= \mathcal{I}_2(u)(\mathcal{I}_2\theta_2 J(y))\mathcal{I}_2(u^*) = \mathcal{I}_2(u(\theta_2 J(y))u^*).
\end{aligned}
$$

そこで $x \in N_2$ に対し $J\theta_1 J^{-1}\theta_2^{-1}(x) = u x u^*$.

この定理と McDuff による II_1 型 Factor は連続濃度以上あるとう結果を組み合わせれば，可分なヒルベルト空間上には同型でない III_λ Factor が連続濃度以上存在することがわかる．

III_0 Factor に対しても上と同様な定理は成立するが，b) c) に対応する命題にはこれまでの結果をそのまゝ適用することができない．そこでそれに対応する補助定理を用意する．

補助定理 1.7. G を局所コンパクト可換群，M を Factor，U を G から M 上の自己同型写像群の中への準同型写像で M^U が properly infinite に成っているようなものとする．$x \in M$ に

対し $e=s^{M^U}(x)$, $e'=s^{M^U}(x^*)$ とする．もし $(Sp_U(x)-Sp_U(x))\cap(Sp\,U^e\cup Sp\,U^{e'})=\{0\}$ ならば，initial と final 射影が M^U の中心に含まれるような partial isometry v と M^U の正値自己共役作用素 k が次のように存在する：

1) $Sp_U(v)\subset Sp_U(x)$

2) $x=vk$

3) $vM^Uv^*\subset M^U$,　$v^*M^Uv\subset M^U$

証明．$E=Sp_U(x)$ とおき，x の極分解を $x=u|x|$ とする．x のスペクトルに対し仮定された条件により xx^*, $x^*x\in M^U$, したがって $e=u^*u$, $e'=uu^*\in M^U$. e, e' の M^U の中心での台をそれぞれ c, c' とする．M^U_e, $M^U_{e'}$ は $M^U\cap M^{U'}$ の射影 $d\leq c$, $d'\leq c'$ を使って次のように properly infinite な部分と finite な部分に直和分解される：

$$M^U_e=M^U_{de}\oplus M^U_{(c-d)e}\quad,\quad M^U_{e'}=M^U_{d'e'}\oplus M^U_{(c'-d')e'}.$$

$y\in M^U_e$ ならば $uyu^*\in M_{e'}$ となる．$Sp_U(uyu^*)\subset(E-E)\cap Sp\,U^{e'}=\{0\}$ であるから $uyu^*\in M^U_{e'}$ である．M^U_e から $M^U_{e'}$ への同型写像 $\mathrm{ad}\,u$ は type（型）を保存するから $udeu^*=d'e'$ となる．仮定により M^U は properly infinite でしかも σ-finite であるから，$(c-d)(c-e)$ の分割 $\{e_n\}_{n=2}^{\infty}\subset M^U$ で $e_n\sim e_1\equiv(c-d)e$ と成るものがある．同様に $(c'-d')(c'-e')$ の分割 $\{e'_n\}_{n=2}^{\infty}\subset M^U$

で $e_n' \sim e_1' \equiv (c'-d')e'$ となるものがある. ここで $w_j, w_j' \in M^U$ を $w_j^* w_j = e_1$, $w_j w_j^* = e_j$, $w_j'^* w_j' = e_1'$, $w_j' w_j'^* = e_j'$ に選ぶ. M^U_{de}, $M^U_{d'e'}$ は properly infinite であるから, $w_0, w_0' \in M^U$ が存在して $w_0^* w_0 = de$, $w_0 w_0^* = d$, $w_0'^* w_0' = d'e'$, $w_0' w_0'^* = d'$ となる. ここで $v \equiv \sum_{j=0}^{\infty} w_j' u w_j^*$ とすれば, $v^* v = c$, $v v^* = c'$ かつ $\mathrm{Sp}_U v \subset E$ である. e の M^U での中心の台が c であったから $(E-E) \cap \mathrm{Sp}\, U^c = (E-E) \cap \mathrm{Sp}\, U^e = \{0\}$ となる. したがって $y \in M^U$ に対し $\mathrm{Sp}_U(v^* y v) \subset (E-E) \cap \mathrm{Sp}\, U^c = \{0\}$, すなわち, $v^* y v \in M^U$. 同様にして $v y v^* \in M^U$ となる. $k \equiv v^* x$ とすれば, $\mathrm{Sp}_U k \subset (E-E) \cap \mathrm{Sp}\, U^c = \{0\}$ となり $k \in M^U$, $k \geq 0$ かつ $x = vk$ である.

局所コンパクト可換群 G から Factor M の自己同型写像群の中への準同型写像 U, V が $U \sim V$ であるとは, G から M のユニタリー群の中への強連続な写像 u があって

1) $u_{t_1+t_2} = u_{t_1} U_{t_1}(u_{t_2})$, $t_1, t_2 \in G$

2) $V_t(x) = u_t U_t(x) u_t^*$, $x \in M$, $t \in G$

をみたすことである.

定理 1.10 の b) を示すために

補助定理 1.8. 可換な加群 $\mathbb{R}$ の双対群 $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ を $\langle t, \gamma \rangle = e^{it\gamma}$,

で対応付ける．M を Factor，U を次の条件をみたすような $\mathbb{R}$ から M の自己同型写像群の中への準同型写像とする：

a) $U \not\sim 1$

b) M^U は properly infinite な von Neumann 代数

c) 0 は $Sp\, U$ で孤立している．

このとき M のユニタリー作用素 X で $XM^UX^* = M^U$, $M = (M^U \cup \{X\})''$, $Sp_U(X) \subset (0, \infty)$ をみたすものがある．

証明． c) より $Sp\, U \cap [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] = \{0\}$ をみたす $\varepsilon_0 > 0$ がある．$C \equiv M^U \cap (M^U)'$，M の partial isometries 全体を M_{pi}，$\mathcal{J} \equiv \{v \in M_{pi} : v^*v, vv^* \in C,\ vM^Uv^* \subset M^U,\ v^*M^Uv \subset M^U\}$ とし，$v_1 \in \mathcal{J}$ が $v_2 \in \mathcal{J}$ の拡張に成っている場合に $v_2 < v_1$ と表わす．さらに

$$\mathcal{E}_0 \equiv \{v \in \mathcal{J} : Sp_U(v) \subset (\varepsilon_0, \infty),\ Sp_U(v) - Sp_U(v) \subset [-\varepsilon_0/2, \varepsilon_0/2]\}$$

$$\mathcal{E}_1 \equiv \{v \in \mathcal{E}_0 : v_1, v_2 \in \mathcal{E}_0,\ v_1v_2 < v \text{ ならば } v_1v_2 = 0\}$$

とする．証明を 5 つの部分に分ける．

1) 任意な $v \in \mathcal{E}_0$, $v \neq 0$ に対し $0 \neq v_1v_2 \cdots v_p < v$ なる $v_j \in \mathcal{E}_1$ があることを示す．$Sp_U(v) \subset (0, \varepsilon_0)$ の場合は上が成りたつ．$Sp_U(v') \subset (0, n\varepsilon_0)$, $n \in \mathbb{N}$ をみたす任意な $v' \in \mathcal{E}_0$, $v' \neq 0$ に対して上が成り立っているものとする．今 $v \in \mathcal{E}_0$, $v \neq 0$, $Sp_U(v) \subset (0, (n+1)\varepsilon_0)$ とする．$v \notin \mathcal{E}_1$ と仮定できるから，$0 \neq w_1w_2 < v$ なる $w_1, w_2 \in \mathcal{E}_0$ がある．$e \equiv w_1^*w_1 \in C$，$w_3 \equiv ew_2 \in \mathcal{E}_0$，$f \equiv s(w_2^*w_1^*) \in C$ と置

けば，$w_3 \neq 0$ かつ $Sp_U(w_3) = Sp_U(w_1^* w_1 w_2) = Sp_U(w_1^* f v) \subset Sp_U(v) - Sp_U(w_1) \subset (0, (n+1)\varepsilon_0) + (-\infty, -\varepsilon_0) = (-\infty, n\varepsilon_0)$ となるから，仮定により $0 \neq v_1 \cdots v_p < w_3$ なる $v_j \in \mathcal{E}_1$ がある．$f' \equiv s(v_p^* \cdots v_1^*) \in C$ とすれば $w_1 f' \in \mathcal{E}_0$ かつ $Sp_U(w_1 f') = Sp_U(w_1 w_1^* f v v_p^* \cdots v_1^*) \subset Sp_U(v) - Sp_U(v_1 \cdots v_p) \subset (-\infty, n\varepsilon_0)$ となるから，再び仮定により，$0 \neq v_{p+1} \cdots v_{p+q} < w_1 f'$ なる $v_j \in \mathcal{E}_1$ がある．したがって

$$0 \neq v_{p+1} \cdots v_{p+q} v_1 \cdots v_p < w_1 f v_1 \cdots v_p < w_1 f w_3 < w_1 w_3 < v.$$

これで帰納法により 1) が示された．

2) i) $u \in \mathcal{J}$ が $Sp_U(u) \subset (\varepsilon_0, \infty)$, $Sp_U(u) - Sp_U(u) \subset [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ をみたせば，$w \in \mathcal{E}_0$, $w \neq 0$ があって $w < u$． ii) $v_1, v_2 \in \mathcal{E}_1$ ならば $v_2^* v_1$, $v_1 v_2^* \in M^U$．先ず i) を示す．$g \in L^1(R)$ を $\mathrm{Car}\,\hat{g} - \mathrm{Car}\,\hat{g} \subset [-\varepsilon_0/2, \varepsilon_0/2]$ と $u^*(U(g)u) \neq 0$ をみたすように選ぶ．$x \equiv U(g)u$, $e = s^{M^U}(x)$, $e' = s^{M^U}(x^*)$ とすれば，$(Sp_U(x) - Sp_U(x)) \cap (Sp\, U^e \cup Sp\, U^{e'}) = \{0\}$ となるから補助定理 1.7 により $v \in \mathcal{J}$, $k \in M^U$ が存在して $U(g)u = vk$, $Sp_U(v) \subset Sp_U(U(g)u)$ となる．$k^* v^* u = (U(g)u)^* u \neq 0$ であったから $v^* u \neq 0$． $Sp_U(v) \subset Sp_U(U(g)u) \subset Sp_U(u) \cap \mathrm{Car}\,\hat{g}$ であるから，$v \in \mathcal{E}_0$．したがって $Sp_U(v^* u) \subset Sp_U(u) - Sp_U(u) \subset [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$．ここで $w \equiv v v^* u \in \mathcal{J}$ とすれば $w \neq 0$ かつ $Sp_U(w) \subset Sp_U(v)$ であるから，$w \in \mathcal{E}_0$ かつ $w < u$ となる．次に ii) を示す．$u = v_2^* v_1$ とする． $Sp_U(u) - Sp_U(u) \subset [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ であるから，

$Sp_U(u) \subset \{0\}$ 又は (ε_0, ∞) 又は $(-\infty, -\varepsilon_0)$ である．そこで $Sp_U(u) \subset (\varepsilon_0, \infty)$ と仮定する．i) により $w \in \mathcal{E}_0$, $w \neq 0$ があって $w < u$ となるから $v_1 w < v_1 v_1^* v_2 < v_2$ となる．$s(w^*) \leqq s(u^*) \leqq s(v_1)$ であるから $v_1 w \neq 0$ となり，$v_2 \in \mathcal{E}_1$ と矛盾する．$Sp_U(u) \subset (-\infty, -\varepsilon_0)$ の場合も同様にして矛盾を生ずるから $v_1^* v_2 \in M^U$ である．

3) $(\mathcal{E}_1 \cup M^U)'' = M$ を示す．

$$N \equiv \{x \in M : Sp_U(x) - Sp_U(x) \subset [-\varepsilon_0/2, \varepsilon_0/2]\}$$

とすれば，N は M で weakly total である．$Sp_U(x) \subset (\varepsilon_0, \infty)$ なる $x \in N$ に対して補助定理 1.7 を適用すると，$x = vk$ なる $v \in \mathcal{E}_0$ と $k \in M^U$ がある．$e \equiv v^* v$, $\gamma \equiv \{e' \in C : e' \leqq e,\ ve' \in (\mathcal{E}_1 \cup M^U)''\}$ とすれば，γ は通常の順序により帰納集合になり，γ に極大な元 e_1 がある．極大性より から $e_1 = e$ である．したがって $v = ve \in (\mathcal{E}_1 \cup M^U)''$, $x = vk \in (\mathcal{E}_1 \cup M^U)''$．これで $(\mathcal{E}_1 \cup M^U)'' = M$ が示された．

4) $\{v_j\} \subset \mathcal{E}_1$ を $v_j \neq 0$, $v_j v_k^* = 0$, $v_j^* v_k = 0$ $(j \neq k)$ をみたすような極大集合とし，$e \equiv \sum v_j^* v_j$, $e' \equiv \sum v_j v_j^*$ とする．もし $1 - e \neq 0$ ならば，a) より $U^{1-e} \not\sim 1$，すなわち，$Sp_U(x_1) \neq \{0\}$ なる $x_1 \in M_{1-e}$ がある．したがって $Sp_U(x) - Sp_U(x) \subset [-\varepsilon_0/2, \varepsilon_0/2]$ と $Sp_U(x) \subset (\varepsilon_0, \infty)$ をみたす $x \in M_{1-e}$ がある．ここで補助定理 1.7 を適用すると $v^* v$, $v v^* \leqq 1 - e$ なる

$v \in \mathcal{E}_0,\ v \neq 0$ がある．したがって 1) により $w \in \mathcal{E}_1,\ w \neq 0$ があって $w^*w \leqq 1-e$．2) の ii) によれば $w^* v_j \in M^U$ である．さらに $S(w^*v_j) \leqq e_j$，$S(v_j^*w) \leqq 1-e_j$ でしかも $S(w^*v_j),\ S(v_j^*w) \in C$ であるから $w^*v_j = 0$．$v_j w^* = 0$ は明らかだから $\{v_j\}$ の極大性に矛盾する．したがって $e = 1$．同様にして $e' = 1$ である．

5) 4) で得られた $\{v_j\}$ を使って $X \equiv \sum v_j \in \mathcal{J}$ とすれば X はユニタリーで $XM^UX^* = M^U$ となる．$v \in \mathcal{E}_1$ ならば $X^*v \in M^U$，したがって $v \in XM^U$，即ち，$M = (M^U \cup \{X\})''$．さらに $Sp_U(v_j) \subset (\varepsilon_0, \infty)$ であるから，$Sp_U(X) \subset (\varepsilon_0, \infty)$．

定理 1.10 の c) を示すために次の補助定理を用意する．

補助定理 1.9．M を III_0 Factor，φ_1 と φ_2 を M 上の generalized trace とする．任意な $\varepsilon > 0$ に対して次の条件をみたすような 0 でない partial isometry $v \in M$ がある：

a) $e_1 \equiv v^*v \in M_{\varphi_1} \cap M'_{\varphi_1}$，$e_2 \equiv vv^* \in M_{\varphi_2} \cap M'_{\varphi_2}$

b) $j \equiv \mathrm{ad}\, v \upharpoonright M_{e_1}$ は M_{e_1} から M_{e_2} 上への同型写像で $j(M_{\varphi_1} \cap M_{e_1}) = M_{\varphi_2} \cap M_{e_2}$．

c) $\sigma_j \equiv \sigma^{\varphi_j} \upharpoonright M_{e_j}$ とすれば，$x \in M_e$ に対して

$$\mathrm{Log}\, Sp_{\sigma_2}(jx) \subset \mathrm{Log}\, Sp_{\sigma_1}(x) + [-\varepsilon, \varepsilon]$$

$$\mathrm{Log}\, Sp_{\sigma_1}(x) \subset \mathrm{Log}\, Sp_{\sigma_2}(jx) + [-\varepsilon, \varepsilon].$$

証明. $\sigma_k = \sigma^{\varphi_k}$ とする. $\mathrm{Log}(\mathrm{Sp}\,\sigma_k) \cap [-\varepsilon, \varepsilon] = \{0\}$ と仮定できる. $P = M \otimes F_2$上で

$$\psi\left(\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\right) = \varphi_1(x_{11}) + \varphi_2(x_{22}), \quad x_{ij} \in M$$

とし, $\sigma = \sigma^\psi$ とし, M から P への同型写像 I_1, I_2 を

$$I_1(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_2(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

で与えると, $I_k(\sigma_{k,t}(x)) = \sigma_t(I_k(x))$, $x \in M$ となる. $f_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in P_\psi$ は, $P_{\psi, f_k} = I_k(M_{\varphi_k})$ であることに注意すれば, P_ψ で properly infinite である. したがって P_ψ も properly infinite である. f_k の P_ψ の中心での台を a_k とすれば, $\mathrm{Sp}\,\sigma^{a_k} = \mathrm{Sp}\,\sigma_k$ となるから, 0 は $\mathrm{Log}\,\mathrm{Sp}\,\sigma^{a_k}$ で孤立している. P は Factor であるから $f_2 x f_1 \neq 0$ なる $x \in P$ がある. $g \in L^1(\mathbb{R}_+^*)$ を $\mathrm{Log}\,\mathrm{Car}\,\hat{g} - \mathrm{Log}\,\mathrm{Car}\,\hat{g} \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$, $\sigma(g)(f_2 x f_1) \neq 0$ となるように選ぶ. $y \equiv \sigma(g)(f_2 x f_1)$ とすれば, $f_2 y = y = y f_1$ となる. さらに $\mathrm{Log}\,\mathrm{Sp}_\sigma(y^* y) \subset \mathrm{Log}\,\mathrm{Sp}_\sigma(y) - \mathrm{Log}\,\mathrm{Sp}_\sigma(y) \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$, $\mathrm{Sp}_\sigma(y y^*) \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$ であるから, $y^* y$, $y y^* \in P_\psi$ である. $e \equiv s(y)$, $e' \equiv s(y^*)$ とし, e と e' の P_ψ の中心での台をそれぞれ b_1, b_2 とすれば, $b_j \neq 0$ かつ $b_j \leq a_j$ となる. 再び $(\mathrm{Log}\,\mathrm{Sp}_\sigma(y) - \mathrm{Log}\,\mathrm{Sp}_\sigma(y)) \cap (\mathrm{Log}\,\mathrm{Sp}\,\sigma_1 \cup \mathrm{Log}\,\mathrm{Sp}\,\sigma_2) = \{0\}$ であるから, 補助定理 1.7 により partial isometry $v_1 \in P$ が存在して $v_1^* v_1 = b_1$, $v_1 v_1^* = b_2$,

$Sp_\sigma(v_1) \subset Sp_\sigma(y)$ をみたしている. したがって, $y \in P_{\mathcal{B}_1}$ に対し

$$\mathrm{Log}\, Sp_\sigma(v_1 y v_1^*) \subset \mathrm{Log}\, Sp_\sigma(y) + [-\varepsilon, \varepsilon]$$

$$\mathrm{Log}\, Sp_\sigma(y) \subset \mathrm{Log}\, Sp_\sigma(v_1 y v_1^*) + [-\varepsilon, \varepsilon]$$

となる. $e_k \equiv I_k^{-1}(b_k f_k) \in M_{\varphi_k}$ とすれば, $b_k f_k$ は P_ψ で properly infinite である. したがって $w_k^* w_k = b_k f_k$, $w_k w_k^* = b_k$ なる $w_k \in P_\psi$ がある. $u \equiv w_2^* v_1 w_1$ とすれば, $v^* v = e_1$, $v v^* = e_2$ をみたす $v \in M$ が存在して $u = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v & 0 \end{pmatrix}$ と表わせる. $Sp_{\sigma_1}(x) = Sp_\sigma\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ かつ $Sp_{\sigma_2}(v x v^*) = Sp_\sigma\left(u \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u^*\right)$ であるから,

$$\begin{aligned} \mathrm{Log}\, Sp_{\sigma_1}(x) - \mathrm{Log}\, Sp_{\sigma_2}(jx) &\subset \mathrm{Log}\, Sp_\sigma(u) - \mathrm{Log}\, Sp_\sigma(u) \\ &\subset \mathrm{Log}\, Sp_\sigma(v_1) - \mathrm{Log}\, Sp_\sigma(v_1) \subset [-\varepsilon, \varepsilon]. \end{aligned}$$

同様にして

$$\mathrm{Log}\, Sp_{\sigma_2}(jx) - \mathrm{Log}\, Sp_{\sigma_1}(x) \subset [-\varepsilon, \varepsilon].$$

定理に入る前に induced 自己同型写像を想い起しておこう. 中心が non atomic な II_∞ 型 von Neumann 代数 N 上の自己同型写像 θ が $N \cap N'$ 上で ergodic ならば θ は $N \cap N'$ で conservative である. したがって, 任意な $e \in N \cap N'$ に対し, e の分割 $\{d_n\}_{n=1}^{\infty} \subset N \cap N'$ が在って $j = 1, \cdots, n-1$ に対し $e\,\theta^j(d_n) = 0$, $\theta^n(d_n) \leq e$, $\sum_{n=1}^{\infty} \theta^n(d_n) = e$ となっている. このとき

$$\theta_e(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta^n(x\, d_n) \qquad x \in N_e$$

とすれば，$\theta_e \oplus 1_{(1-e)} \in [\theta]$ である．この θ_e を θ の e 又は N_e 上への induced 自己同型写像という．

定理 1.10. a) N を $N \cap N'$ が non atomic な II_∞ von Neumann 代数，τ をその上の semi-finite f. n. trace，θ を $N \cap N'$ 上で ergodic な N の自己同型写像で $\tau \circ \theta \leq \lambda_0 \tau$，$0 < \lambda_0 < 1$ をみたしているようなものとすれば，$N \otimes_\theta \mathbb{Z}$ は III_0 Factor である．

b) M が III_0 Factor ならば a) の条件をみたすような (N, θ) が存在して $M \sim N \otimes_\theta \mathbb{Z}$ である．

c) (N_1, θ_1)，(N_2, θ_2) が a) の条件をみたしているとき，$N_1 \otimes_{\theta_1} \mathbb{Z} \sim N_2 \otimes_{\theta_2} \mathbb{Z}$ であるための完全条件は $e_j \in N_j \cap N_j'$，$e_j \neq 0$ と N_{1, e_1} から N_{2, e_2} 上への同型写像 J が存在して $J \theta_{1, e_1} J^{-1} \theta_{2, e_2}^{-1}$ が N_{2, θ_2} で内部自己同型写像になっていることである．ただし θ_{j, e_j} は θ_j の e_j 上への induced 自己同型写像である．

証明. a) θ は $N \cap N'$ で ergodic でしかも $\tau \circ \theta \leq \lambda_0 \tau$ であるから，$n \neq 0$ に対し $p(\theta^n) \neq 0$，つまり θ は N 上で free である．したがって，$M = N \otimes_\theta \mathbb{Z}$ は Factor である．$\rho_n = d\tau \circ \theta^n / d\tau$ とすれば，$n > 0$ のとき $\tau(\rho_n x) \leq \lambda_0^n \tau(x)$，

$\lambda_0^{-n}\tau(x) \leqq \tau(\rho_{-n}x)$, $x \in N_+$ である．したがって $n>0$ に対し $0<\rho_n \leqq \lambda_0^n < 1$, $1 \leqq \lambda_0^{-n} \leqq \rho_{-n}$ となる．$\lambda \in (0,1)$ とすると $\lambda_0^{n_0} < \lambda < 1$ なる $n_0 > 0$ と $\lambda_0^{n_0}, 1 \notin (\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)$ なる $\varepsilon > 0$ がある．$N \cap N'$ が non atomic であることと，θ が $N \cap N'$ 上で ergodic なことから，θがfree，従って 0でない射影 $e \in N \cap N'$ で $e, \theta^{-1}e, \cdots, \theta^{-n_0}e$ が互に直交しているものがある．もし $N \cap N'$ の 0でない射影 d で，ある n' に対し $d \leqq e$, $\theta^{n'}d \leqq e$, $\sigma(\rho_{n'}^{-1} \restriction N_d) \subset (\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)$ が成り立っていたとすると，$\lambda+\varepsilon < 1$ であることから，$n'<0$ でなければならない．したがって $\lambda_0^{+n_0} \leqq \rho_{n'}^{-1} \restriction N_d \leqq \lambda_0^{-n'}$, すなわち，$-n' < n_0$ であるが，これは $e\theta^{+n'}e = 0$ と矛盾する．したがって第3章の定理により $\lambda \notin S(M)$ となり，$S(M) \subset \{0, 1\}$ が得られる．次に M が semi-finite でないことを示す．もし N 上に θ-不変な semi-finite f.n. trace τ_1 が存在したとする．$h \equiv d\tau/d\tau_1 \, \eta\, N \cap N'$ に対し

$$\tau_1((\theta^{-1}h)x) = \tau(\theta x) \leqq \lambda_0 \tau(x) = \lambda_0 \tau_1(hx), \quad x \in N_+$$

であるから，$h \leqq \lambda_0 \theta h$ となる．$h = \int \lambda \, de(\lambda)$ とすれば，ある n に対して $e \equiv e([\lambda_0^{n+1}, \lambda_0^n]) \neq 0$ ．したがって，0でない $e_1, e_2 \in N \cap N'$ が $e_1, e_2 \leqq e$, $e_1 e_2 = 0$ となるように選べる．すべての $k>0$ に対し $\theta^k e_j \leqq e([0, \lambda_0^{n+1}])$ であるから $V_n \theta^n(e_j)$ は θ-不変である．これは θ の ergod 性と矛盾する．したがって，M は III_0 Factor である．

b)[補)] 命題1.5によりM上には generalized trace φ がある．$\tau=\varphi\restriction M_\varphi$，$\sigma=\sigma^\varphi$，$N=M_\varphi$，$E=E_\varphi$，$I$ を N から M の中への恒等写像とする．もし M が semi-finite でなければ，σ は補助定理1.8の条件をすべて満たす．したがって，M のユニタリー作用素 X が存在して $XM^\sigma X^*=M^\sigma$，$M=(M^\sigma\cup\{X\})''$，$Sp_\sigma(X)\subset(1,\infty)$ となっている．$\rho\equiv d\tau_X/d\tau$ とすれば，定理1.6のc)の証明の中のようにして $\sigma_t^\varphi(X)=X\rho^{it}$ となる．$f\in L^1(R_+)$ に対して

$$\sigma^\varphi(f)X=\int f(t)\sigma_t^\varphi(X)dt=\int f(t)X\rho^{it}=X\hat{f}(\rho^{-1})$$

であるから $Sp_\sigma(X)=\sigma(\rho^{-1})$．したがって $\sigma(\rho^{-1})\subset(1,\infty)$，すなわち，$\sigma(\rho)\subset[0,\lambda_0]$ なる $\lambda_0<1$ が在る．$\theta x=XxX^*$，$x\in N$ とすれば $\tau\circ\theta\leqq\lambda_0\tau$ である．$e\in N\cap N'$，$\theta e=e$ ならば $e\in(M_\varphi\cup\{X\})'=M'$ となり，θ は $N\cap N'$ 上で ergodic となる．$\tau\circ\theta\leqq\lambda_0\tau$ であるから $p(\theta^n)=0$，$n\neq0$ となり θ は N で free である．命題1.2により $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}'\cap M\subset M_\varphi$ なる $\mathfrak{A}$ があるから，$M_\varphi'\cap M\subset\mathfrak{A}'\cap M=\mathfrak{A}\subset M_\varphi$．したがって命題1.1により $M\sim N\otimes_\theta Z$ となる．あとは semi-finite von Neumann algebra N が I_∞ 型でないことを示せばよい．もし N が I_∞ 型の部分があったとしてそれを改めて N とすると，中心での台が1であるような abelian 射影 $e\in N$ がある．$\theta e\neq e$ な場合には $\theta'e=e$ なる $\theta'\in\mathcal{E}_N(\theta)$ を選び直せば θ と θ' は同じ役割を果しているから $\theta e=e$ と仮定できる．$\tau\restriction N_e$ は N_e 上で semi-finite f.n. trace であるし，θ は $N_e=(N\cap N')e$ で ergodic である．

N_e は non atomic であるから，θ は conservative である．これは $\tau\circ\theta \leqq \lambda\tau$ と矛盾する．

c) τ_j を N_j 上の semi-finite f.n. trace で $\tau_j\circ\theta_j \leqq \lambda_0\tau_j$，$\lambda_0<1$ を満たすようなものとする．$M_j = N_j \otimes_{\theta_j} \mathbb{Z}$，$(I_j, U^{(j)})$ を $(N_j, \mathbb{Z})$ から M_j への canonical map，E_j を M_j から $I_j(N_j)$ への f.n. 条件付期待値，$X_j = U_1^{(j)}$，$\varphi_j = \tau_j\circ I_j^{-1}\circ E_j$，$\sigma_j = \sigma^{\varphi_j}$ とし，$\varepsilon>0$ を $\varepsilon < -\log\lambda_0$ に選ぶ．$M_1 \sim M_2$ であるから $M_1=M_2=M$ とできる．M 上で φ_j は strictly semi-finite f.n. weight である．$\rho_n \equiv d\tau_j\circ\theta^n/d\tau_j$ とすれば b) のように $f\in L^1(\mathbb{R})$ に対して

$$\sigma(f)X_j^n = \int f(t)\sigma_t(X_j^n)\,dt = X_j^n \hat{f}(\rho_n^{-1})$$

であるから $Sp_{\sigma_j}(X_j^n) = \sigma(\rho_n^{-1})$．ところで $n>0$ のとき $0<\rho_n \leqq \lambda_0^n$ と $\lambda_0^{-n} \leqq \rho_{-n}$ であるから，$Sp_{\sigma_j}(X_j^n) \subset (\lambda_0, \lambda_0^{-1})^c$ となる．条件付期待値の与え方により $n\neq 0$ に対し $E_j(X_j^n)=0$ であるから，$X_j^n - E(X_j^n) \in M(\sigma_j, (\lambda_0,\lambda_0^{-1})^c)$ となる．$I_j(N_j)\subset M^{\sigma_j}$ であるから，任意な $x\in M$ に対して $x - E_j(x) \in M(\sigma_j, (\lambda_0,\lambda_0^{-1})^c)$，つまり，$Sp_{\sigma_j}(x)\setminus\{1\} \subset (\lambda_0,\lambda_0^{-1})^c$ が云える．したがって $Sp\,\sigma_j \cap (\lambda_0,\lambda_0^{-1}) = (\bigcup_{x\in M} Sp_{\sigma_j}(x))^- \cap (\lambda_0,\lambda_0^{-1}) = \{1\}$ となり，$Sp\,\sigma_j = \sigma(\Delta_{\varphi_j})$ であるから，1 は $\sigma(\Delta_{\varphi_j})$ で孤立している．再び定理1.6の c) の証明のように $M_{\varphi_j} = I_j(N_j)$ であるから M_{φ_j} は properly infinite となる．したがって，φ_j は M 上の generalized trace に成っている．ここで補助定理1.9を使うと partial isometry

$v \in M$ があって $v^*v \in M_{\varphi_1} \cap M_{\varphi_1}'$, $vv^* \in M_{\varphi_2} \cap M_{\varphi_2}'$, $j = \mathrm{ad}\, v \restriction M_{v^*v}$, $j(M_{\varphi_1} \cap M_{v^*v}) = M_{\varphi_2} \cap M_{vv^*}$, $x \in M_{v^*v}$ に対し $\mathrm{Log}\, Sp_{\sigma_2}(jx) \subset \mathrm{Log}\, Sp_{\sigma_1}(x) + [-\varepsilon, \varepsilon]$ となっている. $e_1 = I_1^{-1}(v^*v)$, $e_2 = I_2^{-1}(vv^*)$ とすれば, $I_1(N_{1,e_1}) = M_{\varphi_1} \cap M_{v^*v}$, $I_2(N_{2,e_2}) = M_{\varphi_2} \cap M_{vv^*}$ となる. $J = I_2^{-1} \circ j \circ I_1$ とすれば J は N_{1,e_1} から N_{2,e_2} 上への同型写像である. θ_j は $N_j \cap N_j'$ 上で conservative であるから, e_j の分割 $\{d_{j,n}\}_{n=1}^{\infty} \subset N_j \cap N_j'$ を使って N_{j,e_j} 上へ induced 自己同型写像 $\theta_{(j)} \equiv \theta_{j,e_j}$ を導くことができる. $N_{(j)} \equiv N_{j,e_j}$, $M_{(j)} \equiv N_{(j)} \otimes_{\theta_{(j)}} \mathbb{Z}$, $\tau_{(j)} \equiv \tau_j \restriction N_{(j)}$, $(I_{(j)}, U^{(j)})$ を $(N_{(j)}, \mathbb{Z})$ から $M_{(j)}$ への canonical map, $E_{(j)}$ を $M_{(j)}$ から $I_{(j)}(N_{(j)})$ への f.n. 条件付期待値, $X_{(j)} = U_1^{(j)}$, $\varphi_{(j)} = \tau_{(j)} \circ I_{(j)}^{-1} \circ E_{(j)}$, $\sigma_{(j)} = \sigma^{\varphi_{(j)}}$ とする. 接合積の定義の仕方から $X_{(j)} I_{(j)}(N_{(j)}) X_{(j)}^* = I_{(j)}(N_{(j)})$ である.

命題1.1を使って $M_{(j)}$ と $M_{I_j(e_j)}$ の間の同型写像を求めるために, 命題の条件 a), b), c) を調べる.[補2] 命題1.2により $I_j(N_j)' \cap M_j \subset I_j(N_j)$ であるから $I_j(N_{j,e_j})' \cap M_{I_j(e_j)} \subset I_j(N_{j,e_j})$. E_j の $M_{I_j(e_j)}$ 上への制限は $M_{I_j(e_j)}$ から $I_j(N_{j,e_j})$ 上への f.n. 条件付期待値である. $Y_j \equiv \sum_{n=1}^{\infty} X_j^n I_j(d_{j,n})$ とすれば, $I_j(\theta_{(j)} x) = Y_j I_j(x) Y_j^*$, $x \in N_{(j)}$ である. $(I_j(N_{j,e_j}) \cup \{Y_j\})'' \subset M_{I_j(e_j)}$ であるから逆向きの包含関係を示そう. $I_j(e_j) X_j^n I_j(e_j) = X_j^n I_j(\theta_j^{-n}(e_j) e_j)$ となる. $\theta_j^{-n}(e_j) e_j$ は次のような射影 $d \in N_j \cap N_j'$ の和で表わせる: $k_1 + k_2 + \cdots + k_p = n$, $d \leq d_{j,k_1}$, $\theta_j^{k_1}(d) \leq d_{j,k_2}$, $\cdots$

$\theta_j^{k_1+\cdots+k_{p-1}}(d) \leq d_{jk_p}$. また $Y_j I_j(d) = X_j^{k_1} I_j(d)$, $Y_j^2 I_j(d) = Y_j X_j^{k_1} I_j(d) = Y_j I_j(\theta_j^{k_1} d) X_j^{k_1} = X_j^{k_2} I_j(\theta_j^{k_1} d) X_j^{k_1} = I(\theta_j^{k_1+k_2} d) X_j^{k_1+k_2}, \cdots, Y_j^p I_j(d) = I_j(\theta_j^{k_1+\cdots+k_p} d) X_j^{k_1+\cdots+k_p} = X_j^n I_j(d)$ となるから $X_j^n I_j(d) \in (I_j(N_{(j)}) \cup \{Y_j\})''$. したがって $M_{I_j(e_j)} = (I_j(N_{j,e_j}) \cup \{Y_j\})''$ となる. ここで命題 1.1 を適用すれば, $M_{(j)}$ から $M_{I_j(e_j)}$ 上への同型写像 J_j があって $J_j I_{(j)} = I_j$, $J_j(X_{(j)}) = \sum_{n=1}^{\infty} X_{(j)}^n I_j(d_{j,n})$, $\varphi_{(j)} = \varphi_j \circ J_j$ などが成り立つ. つまり下の図が可換である.

$$
\begin{tikzcd}
M_{I_1(e_1)} \arrow[rrr, "j"] & & & M_{I_2(e_2)} \\
& N_{(1)} = N_{1,e_1} \arrow[ul, "I_1"'] \arrow[dl, "I_{(1)}"] \arrow[r, "J"] & N_{(2)} = N_{2,e_2} \arrow[ur, "I_2"] \arrow[dr, "I_{(2)}"'] & \\
M_{(1)} = N_{(1)} \otimes_{\theta_{(1)}} \mathbb{Z} \arrow[uu, "J_1"] & & & M_{(2)} = N_{(2)} \otimes_{\theta_{(2)}} \mathbb{Z} \arrow[uu, "J_2"']
\end{tikzcd}
$$

ここで $Y_j = J_j(X_{(j)})$ であるが, Y_j は上のような性質を持っているので, 以前と同じ論法を繰り返して $I_j(N_{(j)}) = (M_{(j)})_{\varphi_{(j)}}$, したがって $I_j(N_{j,e_j}) = (M_{I_j(e_j)})_{\varphi_j}$ となり, $\mathrm{ad}\, j(Y_1)$ と $\mathrm{ad}\, Y_2$ は共に $(M_{I_2(e_2)})_{\varphi_2}$ を不変にしている. この場合には, Haga and Takeda [Correspondence between subgroups and subalgebras in a cross product von Neumann algebra, Preprint 1972, Th 1] と同様にして, $I_2(N_{2,e_2})$ 上で $\mathrm{ad}\, j(Y_1) \in [\mathrm{ad}\, Y_2]$ となり, $\bigvee_{n=-\infty}^{\infty} p((\mathrm{ad}\, Y_2)^{-n}\, \mathrm{ad}\, j(Y_1)) = 1$ となる. また $I_2(N_{2,e_2})' \cap M_{I_2(e_2)} \subset I_2(N_{2,e_2})$ であるから, 1 の分割 $\{d_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \subset I_2(N_{2,e_2} \cap N_{2,e_2}')$ と $u_n^* u_n = u_n u_n^* = d_n$ なる $\{u_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \subset I_2(N_{2,e_2})$ があって $j(Y_1) d_n = Y_2^n u_n$ となる. 他方上のように

$Sp_{\sigma_{(j)}}(x_{(j)}) = \sigma(d\tau_{(j)} \cdot \theta_{(j)} / d\tau_{(j)})$ であったから $Sp_{\sigma_j}(Y_j) \subset (\lambda_0^{-1}, \infty)$.
したがって $n \leq 0$ の場合には $Sp_{\sigma_2}(Y_2^{*n} u_n) = \phi$，つまり $Y_2^{*n} u_n = 0$ である．そこで $j(Y_1) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_2^{*n} u_n$ となる．再び $I_2(N_{2,e_2})$ 上で $\mathrm{ad}\, Y_2 \in [\mathrm{ad}\, j(Y_1)]$ であるから，同様にして partial isometries の集合 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty} \subset I_2(N_{2,e_2})$ を使って $Y_2 = \sum_{n=1}^{\infty} j(Y_1) v_n$ と表わせる．いま $m > 1$ に対し $u_m \neq 0$ とする．このとき $n \geq 1$ に対し $E_2(Y_2^* j(Y_1)^n u_m) = 0$ である．したがって

$$E_2(u_m) = \sum_n E_2(Y_2^* Y_2 v_n^* v_n u_m) = \sum_n E_2(Y_2^* j(Y_1)^n v_n u_m)$$
$$= \sum_n E_2(Y_2^* j(Y_1)^n u_m) v_n = 0$$

となり $u_m \neq 0$ と矛盾する．したがって $j(Y_1) Y_2^* = I_2(w)$ となるようなユニタリー作用素 $w \in N_{2,e_2}$ がある．$y \in N_{1,e_1}$ に対して

$$I_2(J\theta_{1,e_1}(y)) = j I_1(\theta_{1,e_1}(y)) = j(Y_1 I_1(y) Y_1^*)$$
$$= I_2(w) Y_2 (j I_1(y)) Y_2^* I_2(w^*) = I_2(w) Y_2 (I_2 J(y)) Y_2^* I_2(w^*)$$
$$= I_2(w) I_2(\theta_{2,e_2} J(y)) I_2(w^*) = I_2(w(\theta_{2,e_2} J(y)) w^*),$$

つまり $J\theta_{1,e_1} J^{-1} \theta_{2,e_2}(x) = w x w^*$，$x \in N_{2,e_2}$ が得られた．

§2．その他の結果．

定理 2.1． $\lambda \in (0,1)$，$T_0 = 2\pi / \log \lambda$，$N$ を II_∞ Factor，τ を N 上の semi-finite f. n. trace，θ を N 上の自己同型写像で

$\tau\circ\theta=\lambda\tau$ をみたすもの，$M=N\otimes_\theta\mathbb{Z}$，$E$ を M から $I(N)$ への f.n. 条件付期待値，$\varphi=\tau\circ I^{-1}\circ E$，$G_0=\{\varepsilon_N(\theta^n):n\in\mathbb{Z}\}$，$G=\{g\in G:gh=hg,\ h\in G_0\}/G_0$，$t\in\mathbb{R}$ に対し $\delta_t=\varepsilon_M(\sigma_t^\varphi)$ とする．このとき Out M から G への準同型写像 δ' が存在して

$$0\longrightarrow\mathbb{Z}\xrightarrow[n\to nT_0]{}\mathbb{R}\xrightarrow[\delta]{}\mathrm{Out}\,M\xrightarrow[\delta']{}G\longrightarrow 0$$

が exact である．

定理 2.2. $\lambda\in(0,1)$，N を II_∞ Factor，θ を N の自己同型写像，$M=N\otimes_\theta\mathbb{Z}$，$E$ を M から $I(N)$ への f.n. 条件付期待値とする．M 上の f.n. state ψ は N 上の f.n. state φ と M のユニタリー作用素 u により $\psi_u=\varphi\circ I^{-1}\circ E$ となる．

定理 2.3. Hyperfinite な III_0 Factor で ITPFI でないものがある．

この定理の証明は Krieger [Inventiones math. 15 (1972), 144–163] の結果へ帰着させる．

§3. 竹崎の結果．

定理 3.1. G を局所コンパクト可換群，M を von Neumann

代数，σ を G から M の自己同型写像群の中への弱連続な準同型写像とすれば，$\hat{G}$ から $M \otimes_\sigma G$ の自己同型写像群の中への弱連続な準同型写像 θ が存在して $(M \otimes_\sigma G) \otimes_\theta \hat{G} \sim M \otimes B(L^2(G))$ となる．

証明は Takesaki [*Dualité dans le produits croisés des algèbres de von Neumann. Preprint*] を参照．

以下ではこのとき得られる θ を dual 準同型写像ということにする．

定理 3.2．G を局所コンパクト可換群，M を von Neumann 代数，σ を G から M の自己同型写像群の中への弱連続な準同型写像，θ を $\hat{G}$ から $M \otimes_\sigma G$ の自己同型写像群の中への dual 準同型写像とする．

a) G の閉部分群 H に対して

$$\{\chi \in \hat{G} : \theta_\chi(x) = x,\ x \in M \otimes_\sigma H\} = H^\perp$$

b) $\hat{G}$ の閉部分群 $\hat{H}$ に対して

$$\{x \in M \otimes_\sigma G : \theta_\chi(x) = x,\ \chi \in \hat{H}\} = M \otimes_\sigma \hat{H}^\perp.$$

定理 3.3．φ を von Neumann 代数 M 上の semi-finite

f. n. weight, $\sigma = \sigma^{\varphi}$, $\mathfrak{m}_{\varphi} = \{x \in M : \varphi(x^* x) < +\infty\}$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{m}_{\varphi} \cap \mathfrak{m}_{\varphi}^*$ を full (achieved) ヒルベルト代数, $\mathfrak{a}_0$ を $\mathfrak{A}$ の冨田代数, $\mathfrak{b}_0 = C_0(\mathbb{R}, \mathfrak{A}_0)$ を冨田代数とする．このとき $M \otimes_\sigma \mathbb{R} \sim \mathcal{L}(\mathfrak{b}_0)$ でこれらは semi-finite である．

定理 3.4. M を properly infinite な von Neumann 代数，φ をその上の semi-finite f. n. weight, $\sigma = \sigma^{\varphi}$, $N = M \otimes_\sigma \mathbb{R}$, θ を $\hat{\mathbb{R}}$ ($\langle t, \gamma \rangle = e^{it\gamma}$, $t \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \hat{\mathbb{R}}$ に関する双対群) の dual な準同型，$\tilde{\varphi}$ を $\mathfrak{b}_0 = C_0(\mathbb{R}, \mathfrak{A}_0)$ から導かれる N 上の canonical weight, $h \,\eta\, N$ を $\sigma_t^{\tilde{\varphi}} = \mathrm{ad}\, h^{it}$ なる正則かつ正値な自己共役作用素で $\tau = \tilde{\varphi}(h^{-1} \cdot)$ とする．

a) τ は N 上の semi-finite f. n. trace で $\tau \circ \theta_t = e^t \tau$;

b) $M \sim N \otimes_\theta \mathbb{R}$

c) $N = M^\sigma$

定理 3.5. N を semi-finite な von Neumann 代数，τ をその上の semi-finite f. n. trace, θ を $\mathbb{R}$ から N の自己同型写像群の中への弱連続な準同型写像で $\tau \circ \theta_t = e^t \tau$ をみたすもの，$M = N \otimes_\theta \mathbb{R}$ とする．

a) M が Factor であるための完全条件は θ が $N \cap N'$ 上で ergodic なことである．

b) N_* が separable なとき，M が III 型であるための完全条件は $N \cap N'$ 上での θ_t の点スペクトルが $\mathbb{R}$ の真部分集合になることである．

c) (N_1, θ_1), (N_2, θ_2) が上のような条件をみたしているとき，$N_1 \otimes_{\theta_1} \mathbb{R} \sim N_2 \otimes_{\theta_2} \mathbb{R}$ であるための完全条件は N_1 から N_2 上への同型写像 J が存在して，$\theta_1^{-1} J^{-1} \theta_2 J$ が N_1 上で内部に成ることである．

定理 3.6．定理 3.4 において，M_* が separable で M は III 型 Factor とする．

a) N は II_∞ von Neumann 代数である．

b) M が III_1 Factor であるための完全条件は N が II_∞ Factor となることである．

c) M を III_1 Factor とし，$T_0 = 2\pi / \log \lambda$ とすれば，$M \otimes_\theta (T_0 \mathbb{Z})$ は III_λ Factor である．

§4. Connes の問題

1° $\mathbb{R}$ の部分群 G が可分な predual を持つ Factor M により $T(M) = G$ と表わせるための，G に対する特徴付を与えよ。

2° 局所コンパクトな可換群 G から Factor M 上の自己同型写像群の中への準同型写像 U に対し，$\Gamma(U) = \Gamma\ (\equiv \hat{G})$ は

$M \otimes_{U} G$ が Factor であるための完全条件か？

3° $\lambda \in (0, 1/2)$ に対し Powers の性質 L_λ は $\lambda(1-\lambda)^{-1} \in S(M)$ と同値か？

4° 概周期的な f.n. state が存在しないような σ-finite Factor は在るか？（M は III_1 型となる）

5° R_λ $(\lambda \in (0,1))$ を Powers による Factor とする．M が hyperfinite III_λ Factor ならば，$M \sim R_\lambda$ か？

6° R_∞ を荒木－Woods の Factor とする．M が hyperfinite III_1 Factor ならば，$M \sim R_\infty$ か？

7° ITPFI ではない hyperfinite III型 factor の中には，どんな２つの III型 Factor のテンソル積とも同型になっていないようなものがあるか？

8° II型の Factor に対し Out N の中心は trivial か？

補）もし $N \cap N'$ が minimal projection f を持てば $Sp(\sigma^f) = \Gamma(\sigma^f) = \Gamma(\sigma)$．したがってある表現 σ' が存在して $\sigma' \sim \sigma$，$Sp(\sigma') = Sp(\sigma^f)$．他方 M は III_0 Factor であったから $\{1\} = S(M) \cap \mathbb{R}_+^* = \Gamma(\sigma) = Sp(\sigma')$ となり，これは M が III型であることと矛盾する．従って $N \cap N'$ は non atomic である．

補2）Induced 自己同型写像の ergod 性は例えば十時：Ergod 理論入門，に証明がある．