数理解析研究所講究録
第177巻 1973年 92-111

Automorphism groups and equivalence in von Neumann algebras and ergodic type theorems

東北大 理 斎藤和之

§0 Introduction. "非可換力学系" (M, G) (M は von Neumann algebra とし, G は M の *-automorphisms のつくる a group) に於ける "G-invariant measure" (G-invariant finite normal traces, G-invariant normal semi-finite traces, G-invariant normal states) の存在問題及びそれと関連した M と G との Cross product $M\times G$ の type の決定問題を最近 Størmer [8] によって導入された "equivalence" (定義は後で述べる) を使用して調べることにする。話の内容は次の3つの論文による。

1. E. Størmer, Automorphisms and equivalence in von Neumann algebras, to appear in Pacific J. Math..
2. G. K. Pedersen and E. Størmer, ______________, II. Preprint.
3. K. Saitô, automorphism groups of von Neumann algebras

and ergodic type theorems, preprint.

§1 Preliminaries. 話を簡単にするために M と G との covariant 表現を考えることにより([10]), M を Hilbert space $\mathfrak{H}$ 上に act する von Neumann algebra とし, G を M の unitarily に implement された *-automorphism group とする。すなわち $g \to u_g$ (G の unitary 表現) があって $u_g M u_g^* = M$ ($\forall g \in G$) とする。 Theorems を述べる前に cross product の理論を解説しておこう([1] 参照)。

各 $g \in G$ に対して $\mathfrak{H}_g$ を $\mathfrak{H}$ と同じ dimension の Hilbert space とし $\hat{\mathfrak{H}} = \sum_{g \in G} \oplus \mathfrak{H}_g$ とする。J_g を $\mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_g$ の linear isometric mapping とする。$\tilde{\mathfrak{H}}$ 上の bounded linear operators 全体 $\mathcal{B}(\hat{\mathfrak{H}})$ の元 R を $R_{s,t} = J_s^* R J_t \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ なる matrix 表現する。今 $t \in M$ に対して, $\pi(t) = (R_{st})$ $R_{st} = \delta_{s,t} t$ とすれば, π は M onto $\tilde{M} \subset \mathcal{B}(\hat{\mathfrak{H}})$ の *-isomorphism である。又各 $g \in G$ に対して $\tilde{u}_g \in \mathcal{B}(\hat{\mathfrak{H}})$ を $\tilde{u}_g = \langle R_{st} \rangle$ $R_{st} = \delta_{st^{-1},g} u_g$ とすると, $g \to \tilde{u}_g$ は G の $\hat{\mathfrak{H}}$ 上の unitary 表現で, $\pi(u_g^* x u_g) = \tilde{u}_g^* \pi(x) \tilde{u}_g$ ($\forall g \in G$, $x \in M$) が成立する。 $M \times G$ を $\tilde{M}$ と $\{\tilde{u}_g ; g \in G\}$ とから生成される von Neumann algebra とするとよく知られたように $r \in M \times G$ は $r = \langle R_{st} \rangle$ $R_{st} = a_{st^{-1}} u_{st^{-1}}$ $\forall s, t \in G$ ($a_g \in M$ for $g \in G$) となるように書ける。 さらに $s \in M \times G$ $s = \langle t_{gh^{-1}} u_{gh^{-1}} \rangle$ と

するならば,

$$(1)\cdots\cdots \begin{cases} (SS^*)_{ee} = \sum_{g\in G} t_g t_g^* \\ (S^*S)_{ee} = \sum_{g\in G} u_g^* t_g^* t_g u_g \end{cases} \quad (\text{但し } e \text{ は } G \text{ の単位元})$$

が成立し, $\Phi(S) = S_{ee}$ と置くと, Φ は $M \times G$ onto M の faithful normal G-expectation である。

従来 von Neumann algebra では次の2種類の equivalence が考えられた。

1. Murray - von Neumann による projections の lattice に於ける equivalence. [6]

2. non-negative part に於ける Kadison - Pedersen の equivalence [4]。 N を von Neumann algebra として,

Definition 1. $a, b \in N^+$ (non-negative part) に対して $a \approx b \rightleftarrows \exists \{a_i\} \subset N$: $a = \sum a_i^* a_i$, $b = \sum a_i a_i^*$ 。

特に e, f が N の projections の時は次のことが成立する [4]。

Proposition 1 (Fundamental equivalence theorem).

(a) $e \approx f \rightleftarrows e \sim f$。

(b) e が finite $\rightleftarrows$ e が $\approx$ finite ($e \geqq a$ $a \in N^+$ $e \approx a$ ならば, $e = a$)。

証明は最後の appendix に述べてある。

以上のことに注意して今 $e, f \in M_p$ に対して e と f との "equivalence" を $\pi(e)$, $\pi(f)$ $(\in M \times G)$ の $M \times G$ に於ける equivalence

"$\sim$"で入れてみる。i.e. $\pi(e)\sim\pi(f)$ ならば $\exists v\in M\times G$: $\pi(e)=v^*v$, $\pi(f)=vv^*$ が成立する。従って $v\sim\langle a_{gh^{-1}}u_{gh^{-1}}\rangle$ とすると(1)式から Φ を apply して

$$\left.\begin{aligned} e &= \Phi(v^*v) = \sum_{g\in G} u_g{}^* a_g{}^* a_g u_g \\ f &= \Phi(vv^*) = \sum_{g\in G} a_g a_g{}^* \end{aligned}\right\} \text{が成立する。}$$

従ってこれを Definition として採用しようというのが Størmer [8] である。

Definition 2 ([8]). e, f を M の projections としこれが $e\overset{G}{\sim}f$ (G-equivalent) であるというのは，各 $g\in G$ に対して M の元 a_g があって $e=\sum_{g\in G} a_g a_g{}^*$, $f=\sum_{g\in G} u_g(a_g{}^* a_g)u_g{}^*$ を満すことである。

Remark 1. 実際もし $e\overset{G}{\sim}f$ ならば $\pi(e)\sim\pi(f)$ in $M\times G$ が成立する([8])。$e\overset{G}{\sim}f$ ならば各 $g\in G$ に対して $a_g\in M$ があって上の条件を満す。従って，

$$\pi(e) = \sum_{g\in G}\pi(a_g)\pi(a_g)^* = \sum_{g\in G}(\pi(a_g)\widetilde{u_g})(\pi(a_g)\widetilde{u_g})^*$$
$$\pi(f) = \sum_{g\in G}\widetilde{u_g}{}^*\pi(a_g)^*\pi(a_g)\widetilde{u_g} = \sum_{g\in G}(\pi(a_g)\widetilde{u_g})^*(\pi(a_g)\widetilde{u_g})$$

従って $\pi(e)\approx\pi(f)$ in $M\times G$ となる。故に Proposition 1 により $\pi(e)\sim\pi(f)$ が成立する。

Remark 2. "$\overset{G}{\sim}$" は Remark 1 から equivalence relation で，しかも completely additive になっていることに注意する。

Definition 3 ([8]). $e, f\in M$ projections に対して $e\overset{G}{\prec}f$ というのは，$\exists e_1\leqq e$ $e_1\in M$, projection : $e_1\overset{G}{\sim}e$ となるときである。

Remark 3. 注意すべきことは，$\pi(e) < \pi(f)$ in $M \times G$ がそのまま M で $e \overset{G}{\sim} f$ を意味しないということである。i.e. $\pi(e) \sim h \leq \pi(f)$ $h \in M \times G$: projection としても $\Phi(h)$ が M の projection とはかならずしもならない。

§2. Main theorems. まず equivalence $\overset{G}{\sim}$ に関する finiteness と従来の Kovács – Szücs の [5] G-finiteness との関連を示す定理として次のことを述べる。

Theorem 1 ([9]). a) $\tilde{G}$ を G と M の inner automorphisms 全体のつくる group とから生成された group とするならば，

M が G-finite ($1 \overset{G}{\sim} e \Rightarrow e = 1$) $\rightleftarrows$ M が $\tilde{G}$-finite ($\tilde{G}$-invariant states i.e. G-invariant normal traces が充分沢山ある) $\rightleftarrows$ $M \times G$ が finite。

(b) M が G-finite $\rightleftarrows$ M_* (M の predual i.e. M 上の (bounded) normal functionals 全体のつくる Banach space) のかってな weakly relatively compact subset K に対して，K の $\tilde{G}$ による orbit が又 M_* で weakly relatively compact になることである。但し K の $\tilde{G}$ による orbit とは $\{\phi \circ g \mid \phi \in K, g \in \tilde{G}, a^g = u_g a u_g^* \ \forall g \in G \ a \in M\}$ のことである。

Theorem 2 ([7]). $e \in M$: projection に対して次は同値である。

(i) e が G-finite，

(ii) $\pi(e)$ が $M \times G$ で finite.

このことから M が G~semi-finite であるための必要充分条件は，M^+ に G-invariant faithful normal semi-finite trace が存在することであることがわかる．そしてもちろん M が G~semi-finite ならば，$M \times G$ は semi-finite である。

但しここに M が G~semi-finite というのは，M の non-zero projection が non-zero G~finite subprojection を含むことである。

さらに Theorem 1 の他に Kovács - Szücs の G-finiteness との関連は次のようである。G~finite von Neumann algebra はかならず finite だから G-finite，semi-finite von Neumann algebra が G~finite になることは期待できないが次のことは成立する。

Theorem 3 ([8]). M を semi-finite von Neumann algebra とし Z をその center とする。

1. G が Z の元を elementwise に fix する場合，

   M が G-finite $\rightleftarrows$ M が G~semi-finite 且つ M^G (M の G による fixed subalgebra) に M の finite projections が充分沢山ある．

2. M の center Z 上 G が ergodic に act するならば，

   M が G-finite $\rightarrow$ M が G~semi-finite 且つ M^G に M の finite projections が充分沢山ある．

← はかならずしも成立しない。

§3 Proofs of Theorems. Theorem 1の証明については昨年8月の数理解析研究所での研究会でお話ししたし又講究録1661に述べたのでそちらを参照していただくことにし，ここではその中で重要な役割をした $\overset{G}{\sim}$ に関する comparability theorem を述べそれを証明することにする。

Proposition 2. M の projections の pair e, f に対して M の $\tilde{G}$ による fixed subalgebra $M^{\tilde{G}}$ (M の G による fixed subalgebra M^G と center Z との intersection) の projection z が，

$$ez \overset{G}{\precsim} fz \ , \qquad e(1-z) \overset{G}{\succsim} f(1-z)$$

を満して存在する。

$M \times G$ の comparability theorem から M の $\overset{G}{\sim}$ に関する comparability theorem を導びくことは Remark 3 でも述べたようにそれほど単純ではないが いずれにしても $M \times G$ の center と Z との関係，特に M の projection e に対して $\pi(e)$ の $M \times G$ での central carrier の解析が必要である。

Proposition 2 の証明。今 $z^G(e)$ を M の projection e を majorize する $M^{\tilde{G}}$ $(= M^G \cap Z)$ の projections のうち最小のもの (存在!) とする。まず $z^G(e)$ の structure を調べよう。結論は $z^G(e) = \sum_\alpha f_\alpha$ (f_α: orthogonal projection in M, ＋ 各 α に対し,

$e_\alpha \le e$ と $g_\alpha \in \tilde{G}$ が $u_{g_\alpha}^* e_\alpha u_{g_\alpha} = f_\alpha$ を満して存在する）の形
に書ける。実際 $\{f_\alpha\}$ を e を含む各 α に対して上の条件を
満す an orthogonal family とする。Zorn の Lemma によれば maximal な
ものが存在するのでこれを改めて $\{f_\alpha\}$ とする。そのとき
$f \equiv \sum_\alpha f_\alpha$ とすると $f = Z^G(e)$ となることを証明する。まず

(a) $u_g f u_g^* = f \quad \forall g \in \tilde{G}$ の証明。もしそうでなければ, $\exists g \in \tilde{G}$:
$u_g f u_g^*(1-f) \neq 0$ である。又

$$1-f \ge f \vee u_g f u_g^* - f \sim u_g f u_g^* - u_g f u_g^* - u_g f u_g^* \wedge f \neq 0$$

が成立するから $\exists g_0 \in \tilde{G}$ $\exists \tilde{f} \neq \underbrace{0 : \tilde{f}}_{\text{projection}} \le 1-f$, $u_{g_0} \tilde{f} u_{g_0}^* \le f$ で
ある。又 $f = \sum_\alpha f_\alpha$ であるから $\exists \alpha : u_{g_0} \tilde{f} u_{g_0}^* f_\alpha \neq 0$ となり故に

$$u_{g_0} \tilde{f} u_{g_0}^* \ge u_{g_0} \tilde{f} u_{g_0}^* - u_{g_0} \tilde{f} u_{g_0}^* \wedge (1-f_\alpha) \sim (1-f_\alpha) \vee u_{g_0} \tilde{f} u_{g_0}^* - (1-f_\alpha) \neq 0$$

に注意して上と同様に $\exists \tilde{\tilde{f}}(\neq 0) \le \tilde{f}$ (projection) $\le 1-f$,
$\exists g' \in \tilde{G}$: $u_{g'} \tilde{\tilde{f}} u_{g'}^* \le f_\alpha$ である。又仮定によれば f_α
に対して $\exists g_\alpha \in \tilde{G}$ $\exists e_\alpha \in M$ projection $e_\alpha \le e$: $u_{g_\alpha}^* e_\alpha u_{g_\alpha}$
$= f_\alpha$, $e_\alpha = u_{g_\alpha} f_\alpha u_{g_\alpha}^*$ 従って $g_\alpha g' = \tilde{g} \in \tilde{G}$ とすると $u_{\tilde{g}} \tilde{\tilde{f}} u_{\tilde{g}}^* \le$
$e_\alpha \le e$ 従って $\{\tilde{\tilde{f}}, f_\alpha\} \supsetneq \{f_\alpha\}$ から $\{f_\alpha\}$ の maximality に
矛盾する。従って $u_g f u_g^* = f \quad \forall g \in \tilde{G}$ より $f \in Z^G$ となる。

(b) $f \le Z^G(e)$ の証明。

$$\begin{aligned} Z^G(e) f &= \sum_\alpha Z^G(e) f_\alpha = \sum_\alpha Z^G(e) u_{g_\alpha}^* e_\alpha u_{g_\alpha} \\ &= \sum_\alpha u_{g_\alpha}^* Z^G(e) e_\alpha u_{g_\alpha} = \sum_\alpha u_{g_\alpha}^* e_\alpha u_{g_\alpha} = \sum_\alpha f_\alpha \\ &= f \text{。} \end{aligned}$$

故に $f \leqq z^G(e)$ i.e. $f = z^G(e)$ である。 e, f を M の projections のかってな pair とすると $z^G(e)z^G(f) \neq 0$ ならば、$\exists e_1 \leqq e$, M の projection, $\exists f_1 \leqq f$, M の projection : $e_1 \overset{G}{\sim} f_1$ となる。故に Murray-von Neumann の equivalence の場合と同様にして comparability theorem を証明できる。たとえば Dixmier [1] を参照されたい。

以上.

Remark 4. 実は $\pi(z^G(e)) = z(\pi(e))$ in $M \times G$ が成立する [8]。

この comparability theorem を使用して Theorem 2 の証明をしよう。

(i) → (ii) の証明。 $\pi(e)$ が $M \times G$ で finite でなく e が M で G-finite とする。 $\exists p \in M \times G$: projection : $0 \neq p \leqq \pi(e)$, $p \sim \pi(e)$ in $M \times G$ となる。 $p \neq 0$ から $\Phi(p) \gneqq 0$ で (i) から $\Phi(p)$ は not projection である ($\Phi(p)$ projection ならば $\Phi(p) \overset{G}{\sim} e$ が成立し $\Phi(p) \leqq e$)。故に $\exists\, 0 < \alpha < 1$ (real) : $f \equiv \chi_{(0,\alpha)}(\Phi(p)) \neq 0$ ($f \leqq e$ projection in M) である。 又

$$\frac{1}{1-\alpha}(e - \Phi(p)) \geqq f$$

から $e - \Phi(p)$ を何倍かすると

$$n\,(e - \Phi(p)) \geqq f > 0 \quad \cdots\cdots (2)$$

が成立する。又 $p \sim \pi(e)$ から $\pi(\Phi(p)) \approx \pi(e)$ in $(M \times G)^+$ が成立する。実際 $p \sim \pi(e)$ in $M \times G$ より $\exists v \in M \times G$: $p = v^*v$, $vv^* = \pi(e)$ である。 $v \sim \langle v_{gh^{-1}} u_{gh^{-1}} \rangle$ とすると

$$\left.\begin{aligned} \pi(e) &= \sum_k \pi(v_k)\pi(v_k)^* \\ \pi(\Phi(e)) &= \sum_k \tilde{u}_k^* \pi(v_k)^*\pi(v_k)\tilde{u}_k \end{aligned}\right\} \text{となる。}$$

故に $\pi(\Phi(p)) \approx \pi(e)$ in $(M\times G)^+$ である。従って $n\pi(\Phi(p)) \approx n\pi(e)$ となる。よって (2) によれば、$\pi(f) \leq n\pi(e) - n\pi(\Phi(p))$ に注意して

$$n\pi(e) + \pi(f) \precsim n\pi(e) \quad \text{-----} \quad (3)$$

が成立する。故に

$$\begin{aligned} n\pi(e) + n\pi(f) &= n\pi(e) + \pi(f) + (n-1)\pi(f) \\ &\precsim n\pi(e) + (n-1)\pi(f) \qquad ((3)\text{による}) \\ &\precsim n\pi(e) + (n-2)\pi(f) \\ &\;\vdots \\ &\precsim n\pi(e) + \pi(f) \precsim n\pi(e) \end{aligned}$$

となる。従って $\pi(e) + \pi(f) \precsim \pi(e)$ で $\precsim$ は常に成立するから $\precsim$ に関する Bernstein type の Theorem ([4] Proposition 2.7) により $\pi(e) + \pi(f) \approx \pi(e)$ in $(M\times G)^+$ が成立する。

今 $z^G(f)e = e_0$ とすると $\pi(z^G(f)) \in M\times G$ の center だから、$\pi(e_0) + \pi(f) \approx \pi(e_0)$ が成立する。

次に $\pi(e_0)$ が $M\times G$ で properly infinite になることを示そう。$g_0 \equiv g\pi(e_0)$ が ($g \in M\times G$ の central projection の集合) $M\times G$ で finite としよう。$(M\times G)\otimes M_2$ (M_2 は 2×2 matrix algebra) の中の議論に直して $p_0 \overset{\text{def}}{=} g\pi(f)$ とすると $p_0 \leq g_0$ に注意し、

$$\begin{pmatrix} p_0 + g_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} g_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} g_0 & 0 \\ 0 & g_0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} p_0+q_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \precsim \begin{pmatrix} q_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & p_0 \end{pmatrix} \leqq \begin{pmatrix} q_0 & 0 \\ 0 & p_0 \end{pmatrix} \leqq \begin{pmatrix} q_0 & 0 \\ 0 & q_0 \end{pmatrix}$$

が成立する。又 $\begin{pmatrix} q_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} q_0 & 0 \\ 0 & p_0 \end{pmatrix}$ はともに projections だから $\begin{pmatrix} q_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} q_0 & 0 \\ 0 & p_0 \end{pmatrix}$ in $(M\times G)\otimes M_2$ が proposition 1 によって成立する。

$\begin{pmatrix} q_0 & 0 \\ 0 & q_0 \end{pmatrix}((M\times G)\otimes M_2)\begin{pmatrix} q_0 & 0 \\ 0 & q_0 \end{pmatrix}$ が finite algebra であるから

$\begin{pmatrix} q_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \leqq \begin{pmatrix} q_0 & 0 \\ 0 & p_0 \end{pmatrix} \leqq \begin{pmatrix} q_0 & 0 \\ 0 & q_0 \end{pmatrix}$ 且つ $\begin{pmatrix} q_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} q_0 & 0 \\ 0 & p_0 \end{pmatrix}$ によって,

$\begin{pmatrix} q_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 & 0 \\ 0 & p_0 \end{pmatrix}$ i.e. $p_0 = 0$ が成立する。

$p_0 = q\pi(f) = 0$ から $\Phi(q)f = 0$ i.e. $\Phi(q) \in Z^G$ から $\Phi(q)Z^G(f) = 0$。又 $q_0 = q\,\pi(Z^G(f)e)$ から $\Phi(q_0) = \Phi(q)Z^G(f)e = 0$ で, Φ の faithfulness から $q_0 = 0$ が成立 i.e. $\pi(e_0)$ は properly infinite となる。従って $\exists\, q_1, q_2 \in (M\times G)$; projections :

$$\pi(e_0) \sim q_1 \sim q_2 \qquad 且つ \qquad \pi(e_0) = q_1 + q_2 \quad \cdots\cdots \ (4)$$

が成立する。従って $\pi(e_0) \approx 2\pi(e_0)$ である。

次に $e_0Me_0 = Z^G e_0$ (e_0 は G-abelian) を証明しよう。今 $g \leqq e_0$, $g \in M$: projection としたとき, g と $e_0 - g$ とに proposition 2 の comparability theorem を使用して $\exists\, z \in Z^G$: projection:

$$zg \overset{G}{\precsim} z(e_0-g) \ , \qquad (1-z)g \overset{G}{\succsim} (1-z)(e_0-g)$$

が成立する。π を apply して $\overset{G}{\precsim}$ を $\precsim$ (in $M\times G$) に置きかえることができる。従って,

$$2\pi(ze_0) \approx \pi(ze_0) = \pi(zg) + \pi(z(e_0-g))$$

$$\lessapprox 2\pi(z(e_0-g)) \leqq 2\pi(ze_0)$$

だから，$ze_0 \overset{G}{\sim} z(e_0-g)$ が成立する。(i) によれば，ze_0 は，G-finite だから $ze_0 = z(e_0-g)$ i.e. $zg=0$ である。又

$$2\pi((1-z)e_0) \approx \pi((1-z)e_0) = \pi((1-z)g) + \pi((1-z)(e_0-g))$$

$$\lessapprox 2\pi((1-z)g) \leqq 2\pi((1-z)e_0)$$

より $(1-z)e_0 \overset{G}{\sim} (1-z)g$，よって前と同様 (i) により $g=(1-z)g = (1-z)e_0$ が成立するので主張が証明された。(4) により

$\exists v \in M \times G$: $v^*v = q_1$, $vv^* = \pi(e_0)$ $(v \in \pi(e_0)(M\times G)\pi(e_0))$

である。$v \sim \langle s_{gh^{-1}} u_{gh^{-1}} \rangle$ に注意して，(1) によれば，

$$\Phi(v^*v) = \sum_k u_k^* s_k^* s_k u_k \ (= \Phi(q_1) \leqq e_0)$$

$$\Phi(vv^*) = \sum_k s_k s_k^* \quad (= e_0)$$

で，$u_k^* s_k^* s_k u_k \leqq e_0$，$s_k s_k^* \leqq e_0$ $(\forall k \in G)$ が成立する。よって上の議論によれば，$s_k s_k^* = a_1 e_0$ $(a_1 \in Z^G,\ a_1 \geqq 0)$，$u_k^* s_k^* s_k u_k = b_1 e_0$ $(b_1 \in Z^G\ b_1 \geqq 0)$ と書ける。$s_k = v_k|s_k|$ を s_k の polar decomposition とすると，$a_1 e_0 = s_k s_k^* = v_k s_k^* s_k v_k^* = v_k b_1 u_k e_0 u_k^* v_k^* = b_1 v_k u_k e_0 u_k^* v_k^* \leqq b_1 v_k v_k^* \leqq b_1 e_0$ となる。対称な議論から $a_1 e_0 \geqq b_1 e_0$ i.e. $a_1 e_0 = b_1 e_0$，$u_k^* s_k^* s_k u_k = s_k s_k^*$ $(\forall k \in G)$ となる。i.e. $\Phi(q_1) = e_0$ である。$q_1 \leqq \pi(e_0)$ 且つ Φ の faithfulness により $\pi(e_0) = q_1$ が成立し (4) によれば $q_2 = 0$ となる。よって $\pi(e_0) \sim q_2$ から $\pi(e_0) = \pi(eZ^G(f)) = 0$ となる。i.e. $eZ^G(f) = 0$

x $e \geq f$ から $f=0$ となり $f \neq 0$ という仮定に反する。従って $\pi(e)$ は $M \times G$ で finite である。

(ii) → (i) は明らかである。

さらに「M が G~semi-finite ⟷ M^+ が G-invariant normal faithful semi-finite trace をもつ」の証明は，$M \times G$ の finite projection で特に $\tilde{M}(=\pi(M))$ の中にあるものをもとにして，$(M \times G)^+$ 上に trace をつくりそれを M に制限することを考えればよい。これは演習問題である。　以上。

Theorem 3 の証明の 1), 2) case の"→"の部分に関しては，G-finite ならば，それぞれの場合に G-invariant faithful normal semi-finite trace が M^+ 上に存在することがわかっている（[11], [12]）し，M^G に M の finite projections が充分沢山あることもわかっている。次に case 1 の逆を証明しよう。i.e. M が G~semi-finite 且つ $\{e_\alpha\}$ なる M^G の中の M で finite な projections の orthogonal family で $\sum_\alpha e_\alpha = 1$ となるものがあるとする。$e_\alpha M e_\alpha$ は finite algebra で G が $e_\alpha M e_\alpha$ の automorphism group に reduce できることに注意する。$e_\alpha M e_\alpha$ には $Z e_\alpha$-valued trace Φ で $\Phi(x^g) = \Phi(x)^g$ $\forall x \in e_\alpha M e_\alpha$ $\forall g \in G$ を満すものが存在する。ところが $Z e_\alpha$ の元を G は elementwise に fix するから $\Phi_\alpha(x^g) = \Phi_\alpha(x)$ $\forall x \in e_\alpha M e_\alpha$

となる。今 Ze_α 上の normal states 全体を $\mathfrak{S}_\alpha$ とすると，
$\bigcup_\alpha \{ \phi \circ \Phi_\alpha \circ \Phi_\alpha,\ \phi \in \mathfrak{S}_\alpha \}$ は M 上の G-invariant normal states
の a separating family を与える。但し Φ_α は $M \to e_\alpha M e_\alpha$
の $\Phi_\alpha(x) = e_\alpha x e_\alpha$ なる mapping とする。従って M は G-finite
となる。

case 2. の逆が成立しないことは次の簡単な例により明らかである。$\mathbb{Z}$ を integers の the set とし $l^\infty(\mathbb{Z})$ を $\mathbb{Z}$ 上の bounded complex-valued functions 全体のつくる von Neumann algebra (acting on $l^2(\mathbb{Z})$) とする。$f \in l^\infty(\mathbb{Z})$ に対して

$$(\sigma f)_i = f_{i+1} \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

によって $l^\infty(\mathbb{Z})$ の $*$-automorphism σ を定義し，$G = \{\sigma^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$
とすると，G は $l^\infty(\mathbb{Z})$ の ergodic automorphism group である。
$l^\infty(\mathbb{Z})$ は G-semi-finite であり $l^\infty(\mathbb{Z})$ が finite より $1\ (\in l^\infty(\mathbb{Z})^G)$
が finite projection となる。従って $(l^\infty(\mathbb{Z}), G)$ は，case 2
の逆の条件を満す。しかし $l^\infty(\mathbb{Z})$ は G-finite ではない。実際
$\varphi \in l^\infty(\mathbb{Z})_*\ (= l^1(\mathbb{Z}))$ が G-invariant ならば，$\varphi = \{\eta_i\}$
$\in l^1(\mathbb{Z})\ (\sum_{i \in \mathbb{Z}} |\eta_i| < \infty)$ で，

$$\langle \sigma^m f, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle \quad \forall m,\ \forall f \in l^\infty(\mathbb{Z})$$

から $\sum_{i \in \mathbb{Z}} f_{i+m} \eta_i = \sum_{i \in \mathbb{Z}} f_i \eta_i \quad \forall f \in l^\infty(\mathbb{Z})$ となり，$\eta_m = \eta_0$
$\forall m \in \mathbb{Z}$ で $\{\eta_i\} \in l^1(\mathbb{Z})$ から $\eta_m = 0\ \forall m$ i.e. $\varphi = 0$ が
成立する。　　　　　以上。

Remark 5. Theorem 2 の証明の本質的な部分は [7] によった。それでは, M^+ の中に新しい "$\overset{G}{\precsim}$" equivalence なる概念を導入し $\overset{G}{\precsim}$ に関する comparability theorem を証明し，それを使って Theorem 2 の証明をしている。Theorem 2 の証明に関する限りは Proposition 2 があるので $\overset{G}{\precsim}$ なる概念を使用しなくてよい。

しかし原論文 [7] にはその他に σ-finite G~finite projection の characterization や, abelian case で，確率論に於ける Markoff の Theorem との関連が議論されておりそれには $\overset{G}{\precsim}$ なる概念が有効である。ここでは割愛させていたゞいた。

参考のために "$\overset{G}{\precsim}$" の definition をここで述べて置く。

Definition 4 ([7]). M^+ の元 a, b が $a \overset{G}{\precsim} b$ であるというのは, $\{r_{ig}\ i \in I\ g \in G\} \subset M$ があって, $a = \sum_{ig} r_{ig}{}^* r_{ig}$, $b = \sum_{ig} u_g (r_{ig} r_{ig}{}^*) u_g{}^*$ を満すことである。

§4 appendix. Fundamental equivalence theorem の証明。

(a) の証明で "$\leftarrow$" は明らかであるから "$\rightarrow$" を示そう。$e, f \in N$ projection が $e \approx f$ とすると, $\exists \{a_i\} \subset N$: $e = \sum a_i{}^* a_i$, $f = \sum a_i a_i{}^*$ である。

(*) N の center の projection p に対して, Np 上で上の状況は不変だから各 direct summand で主張を検討すればよい。

1° N の center は σ-finite としてよい。

2° $e \approx f$ から $z(e)=z(f)$ となるから $z(e)=z(f)=1$ としてよい。

3° e が finite の場合と properly infinite の場合に分けてよい。

α) e が finite の場合. $z(e)=z(f)=1$ から φ を N^+ 上の faithful normal semi-finite trace とし, $\mathfrak{M}_\varphi$ をその definition ideal とする。もし $z \in N^\natural{}_p$ ($N^\natural$ は N の center) に対して, $ze \in \mathfrak{M}_\varphi$ ならば, $(za_i)^*(za_i) \leq ze$ に注意して $(za_i)^*(za_i) \in \mathfrak{M}_\varphi$ for each i である。φ の normality 及び $\varphi((za_i)^*(za_i)) = \varphi((za_i)(za_i)^*)$ に注意して $\varphi(ze) = \varphi(zf)$ が成立する。今 $\forall p_0 \in N^\natural{}_p$ ($p_0 \leq z$) に対して p_0e, p_0f は同じ条件を満すから $\varphi(p_0e) = \varphi(p_0f)$ となる。Comparability theorem により $p_0ze \precsim p_0zf$, $(1-p_0)ze \succsim (1-p_0)zf$ for some $p_0 \in N^\natural{}_p$ であるから φ が faithful trace ということにより $p_0ze \sim p_0zf$ 及び $(1-p_0)ze \sim (1-p_0)zf$ i.e. $ze \sim zf$ である。従って $z \in N^\natural{}_p$ が $ze \in \mathfrak{M}_\varphi$ ならば, $ze \sim zf$ である。e が finite だから $\exists \{p_j\} \subset N^\natural{}_p$: orthogonal : $p_je \in \mathfrak{M}_\varphi$ $\forall j$ 且つ $\sum p_j = 1$ なる。各 j に対して上の議論から $p_je \sim p_jf$ 従って $e \sim f$ が成立する。

β) e が properly infinite の場合. α) と同様の議論から f も又 properly infinite になる。

β₁) もし e, f ともに σ-finite ならば $e \sim f$ が成立することは $z(e)=z(f)=1$ からわかる。例えば [1] を参照されたい。

β₂) 一般の場合。もし $e \sim f$ が成立しないとしよう。

comparability theorem 及び最初に述べた注意 (*) から我々は $eg \not\prec fg$ $\forall g \in N^{\flat}{}_p$ $g \neq 0$ と仮定して矛盾を導けばよい。さらに注意 (*) から multiplicity theorem (例えば [2] [3]) によって e, f はそれぞれ次の case に帰着できる。ある infinite cardinal numbers α, β があって

a) eNe が purely infinite 且つ, $e = \sum_{j\in J} e_j$ $\{e_j\}_{j\in J}$ equivalent orthogonal cyclic projections with $\bar{\bar{J}} = \alpha$,

又は

b) eNe が semi-finite 且つ $e = \sum_{j\in J} e_j$ $\{e_j\}_{j\in J}$ equivalent orthogonal finite (1° により σ-finite) projections with $\bar{\bar{J}} = \alpha$

とでき f についても

a') fNf が purely infinite 且つ $f = \sum_{i\in I} f_i$ $\{f_i\}_{i\in I}$: equivalent orthogonal cyclic projections with $\bar{\bar{I}} = \beta$,

又は

b') fNf が semi-finite 且つ $f = \sum_{i\in I} f_i$ $\{f_i\}_{i\in I}$: equivalent orthogonal finite (1° により σ-finite) projections with $\bar{\bar{I}} = \beta$

とできる。仮定から $e \prec f$ であったから a) b') b) a') が同時に起ることはあり得ない。よって a) a') 又は b) b') である。いずれの場合も $\alpha < \beta$ が成立する。 実際

a) a') の場合。 $e = \sum_{j\in J} e_j$, $e_j \sim e_i$ から $z(e) = z(e_j)$ であり同様に $z(f) = z(f_i)$ となり $z(e_j) = z(e) = z(f) = z(f_i)$ から β_1) から

$e_j \sim f_i$ となり $e \prec f$ から $\alpha < \beta$ である。

b) b′) の場合。$\alpha \geqq \beta$ として矛盾を出し $\alpha < \beta$ をいおう。Comparability Theorem によれば、$\exists g \in N^\natural{}_p$: $e_{j_0}g \precsim f_{i_0}g$, $e_{j_0}(1-g) \succsim f_{i_0}(1-g)$ である。$(1-g)e_j \succsim (1-g)f_i$ $\forall i, j$ と $\alpha \geqq \beta$ とから $(1-g)e \succsim f(1-g)$ となり β_2) の仮定に矛盾する。i.e. $e_{j_0} \precsim f_{i_0}$ である。$e \prec f$ から e_{j_0} と equivalent な f の subprojections の maximal orthogonal family を $\{e_\kappa\}_{\kappa \in K}$ とすると $\bar{\bar{K}} \geqq \bar{\bar{J}}$ ($\bar{\bar{S}}$ は set S の power) である。$f - \sum_{\kappa \in K} e_\kappa = e_0$ とし e_0 と e_κ に対して comparability theorem から $e_0 h \precsim e_\kappa h$ $e_0(1-h) \succsim e_\kappa(1-h)$ $(h \in N^\natural{}_p)$ とすることができる。$e_\kappa h = 0$ とすると maximality に矛盾する。よって

$$0 \neq hf = e_0 h + \sum_{\kappa \in K} h e_\kappa \precsim \sum_{\kappa \in K} h e_\kappa \leqq hf$$

から $hf \sim \sum_\kappa h e_\kappa$ となり従って multiplicity の一意性により $\bar{\bar{K}} = \bar{\bar{I}}$ が成立する。従って $\alpha \geqq \beta$ ならば $\bar{\bar{K}} = \bar{\bar{I}} \geqq \bar{\bar{J}}$ から $\alpha = \beta$ で、$he = \sum_{j \in J} e_j h \sim \sum_{\kappa \in K} h e_\kappa \sim hf$ となり $he \not\precsim hf$ という β_2) の仮定に矛盾する。従っていずれの場合も $\alpha < \beta$ である。

$e = \bigvee_\delta e_\delta$ として e_δ を σ-finite と仮定する。$e_\delta N e_\delta$ 上には faithful normal state ω_δ が存在する。今 $e = \sum_{i \in \mathfrak{I}} a_i^* a_i$ とすると $a_i e_\delta = 0$ $\forall \delta$ なら $a_i e = 0$ であり $a_i^* a_i \leqq e$ から $a_i = 0$ となることに注意して $\mathfrak{I}_\delta \overset{\text{def}}{=} \{i \,;\, a_i e_\delta \neq 0\}$ とすると $\mathfrak{I} = \bigcup_\delta \mathfrak{I}_\delta$ である。$\omega_\delta(e_\delta) = \sum_i \omega_\delta(e_\delta a_i^* a_i e_\delta) < \infty$ から $a_i e_\delta \neq 0$ なる i は at most countable だから $\bar{\bar{\mathfrak{I}_\delta}} \leqq \aleph_0$。よって $\bar{\bar{\mathfrak{I}}} \leqq \overline{\overline{\{\delta\}}}\,\aleph_0$ である。

$e = \sum_{j \in I} e_j$ と書け e_j は σ-finite であった。$e = \sum_{i \in \mathfrak{K}} a_i^* a_i$ $f = \sum_{i \in \mathfrak{K}} a_i a_i^*$ として上の論法を使用すると $\bar{\bar{\mathfrak{K}}} \leqq \alpha \aleph_0 = \alpha$ となる。

又 e_i を a_i の right projection f_i を a_i の left projection とすると

$e = \bigvee_{i \in \mathfrak{K}} e_i$ $f = \bigvee_{i \in \mathfrak{K}} f_i$ 且つ $e_i \sim f_i$ ($\forall i \in \mathfrak{K}$) が成立する。

次に各 e_i は高々 $\bar{\bar{J}}$ 個の σ-finite projections の union となる。

実際

1° cyclic case. ($e_j = e^{N'}_{\xi_j}$ for some vector ξ_j) とするならば、

$$e_i = \bigvee_{j \in J} e^{N'}_{e_i \xi_j} 。$$

2° finite case. $e_i = \bigvee_{j \in J} (e_i - e_i \wedge (1 - e_j))$。

$e_i \sim f_i$ から $f = \bigvee_{i \in \mathfrak{K}} f_i$ 且つ $f_i = \bigvee_{j \in J} f_{ij}$ f_{ij} は σ-finite と書ける。

従って $f = \sum_{\gamma \in I} g_\gamma$ g_γ は σ-finite with $\bar{\bar{I}} = \beta$ から上の論法によると、$\beta \leqq \bar{\bar{\mathfrak{K}}}\bar{\bar{J}} \leqq \alpha^2 = \alpha$ (α は infinite cardinal) となりこれは矛盾である。よって $e \sim f$ が成立する。(b) は trace を用いて容易に証明できる。 以上。

文献

[1] J. Dixmier, Algèbres de von Neumann, Gauthier Villars, Paris 1957.

[2] E. L. Griffin, Some contributions to the theory of Rings of operators, Trans. Amer. Math. Soc., 75 (1953), 471-504.

[3] ______, ______ II, Trans. Amer. Math. Soc., 79 (1955), 389-400.

[4]. R.V. Kadison and G.K. Pedersen, Equivalence in operator algebras, Math. Scand., 27 (1970), 205-222.

[5]. I. Kovacs and J. Szücs, Ergodic type theorems in von Neumann algebras, Acta Sci. Math., 27 (1966), 233-246.

[6] F. J. Murray and J. von Neumann, On rings of operators, Ann. of Math., 37 (1937) 116-229.

[7] G.K. Pedersen and E. Størmer, Automorphisms and equivalence in von Neumann algebras II, Preprint.

[8] E. Størmer, Automorphisms and equivalence in von Neumann algebras, To appear in Pacific J. Math.

[9] K. Saitô, Automorphism groups of von Neumann algebras and ergodic type theorems, Preprint.

[10] M. Takesaki, Covariant representations of C*-algebras and their locally compact automorphism groups, Acta Math., 119 (1969), 273-303.

[11] E. Størmer, States and Invariant maps of operator algebras, J. Functional Analysis, 5 (1970), 44-65.

[12] __________, Automorphisms and Invariant states of operator algebras, Acta Math., 127 (1971), 1-9.