数理解析研究所講究録
第177巻 1973年 112-124

C^*-代数の multiplier と derivation について

山形大 理　富山 淳

§1　Multiplier について.

von Neumann 代数の時と違つて、C^*-代数は単位元をもたない時が普通である。このことから与えられた C^*-代数 A を含む単位元をもつ C^*-代数 B を、どのようにとれば議論が自然に行なえるかということが問題になる。例えば $A = C_0(X)$ (X は locally compact space, C_0 はその上の ∞ で 0 になる連続関数。以下この記号を使う。又有界連続関数環の時は C^b とかく) の時は B としては、A に単位元を添加した環よりは $C^b(X)$ をとる方が自然な時が多いであろう。これを非可換に進めて考えられたのが C^*-代数の multiplier である。ここでは multiplier 及びそれと derivation との関係について最近の C. Akemann − G. Elliott − G.K. Pedersen 及び筆者による研究の一部を紹介する。前者については詳細は、C. Akemann, G.K. Pedersen, 富山; Multipliers of C^*-algebras (コペン

ハーゲン大よりの preprint）, 後手は前記4名による preprint が近日中に出る筈である。

C^*-代数 A の second dual を A'' とかく。A の multiplier を

$$M(A) = \{x \in A'',\ xa,\ ax \in A \ \text{for any}\ a \in A\}$$

と定義する。$M(A)$ は~~定~~定義より A'' の C^*-部分代数であり, A を ideal として含み単位元をもつ。これは通常の写像の組による定義と一致するが更に次のことが検証出来る。

Proposition 1. π を A の non-degenerate な faithful 表現とすると, π は $M(A)$ より $\overline{\pi(A)}$ 内での idealizer への同型対応に一意に拡大出来る。

即ち $M(A)$ の定義としては, A'' と限らずどこの弱閉包の中で idealizer をとっても本質的に変りはない。$M(A)$ の大きさについては次の結果が成立つ。

定理 2. 次のどの條件からも, A は dual ring になる。

(i) $M(A) = A''$

(ii) A が separable で $M(A)$ が von Neumann 代数。

一般には $M(A)$ が von Neumann 代数になる例は沢山ある。次に A に対する $M(A)$ の大きさとしては, 一般には $M(A)/A$ が 1 次元になる場合もあるが（[5] 参照）,

定理 3. A が separable で単位元をもたないならば C^*-

代数 $M(A)/A$ は separable な空間上へは表現出来ない。

$M(A)$ の strict topology とは普通、semi-norm

$$\|x\|_a = \|xa\| + \|ax\| \quad a \in A$$

で生成された位相を言い、このとき $M(A)_\beta$ とかく。A が単位元をもつとき、これは norm 位相と一致する。又 $M(C(H)) = B(H)$ ($C(H)$ はヒルベルト空間 H での compact 作用素の代数、$B(H)$ は有界線型作用素全体のつくる代数) であるが $B(H)_\beta$ は strong *-位相による $B(H)$ のことである。X を locally compact とし、C^*-代数 $A(t)$ をつけた fibred space $\{X, A(t)\}$ を考える。

$\mathfrak{F}$ をその上での cross-section の集りとし、更に次の條件をみたすものとする。

(i) 各点でとの作用で $\mathfrak{F}$ は *-代数をなす。

(ii) $\mathfrak{F}(t) = \{a(t) \mid a \in \mathfrak{F}\}$ は各点 t において、$A(t)$ で dense,

(iii) 各 $a \in \mathfrak{F}$ について関数 $t \longrightarrow \|a(t)\|$ は $C_0(X)$ に入る。

今 cross-section x が t_0 で連続であるということを、

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, U(t_0),\ a \in \mathfrak{F}\ ;\ \|x(t) - a(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \in U,$

と定義すると、$\{X, A(t), \mathfrak{F}\}$ による ∞ で 0 になる連続な cross section 全体 $C_0(X, A(t), \mathfrak{F})$ は C^*-代数をなす。次に有界な cross section x が strictly continuous ということを、

$\forall \varepsilon > 0,\ a \in \mathfrak{F} \quad \exists\, U(t_0),\ b \in \mathfrak{F}\ ;$

$$\|(x(t)-b(t))a(t)\|+\|a(t)(x(t)-b(t))\|<\varepsilon \quad \forall t\in U(t_0)$$

と定義する。但し fibre としては $M(A(t))_\beta$ をとる。X 上で連続なもの全体を $C^b(X, M(A(t))_\beta, \mathfrak{F})$ とおくと、この集合も $M(A)$ も共に fibred space $\{X, A(t)''\}$ 上の有界な cross-section の集りと考えることが出来るから、両者の包含関係も考えられるわけであるが結果は

定理 4. $C^b(X, M(A(t))_\beta, \mathfrak{F}) = M(C_0(X, A(t), \mathfrak{F}))$.

従ってその系として、ねじれがぜんぜんない場合には

系 1. $M(C_0(X, A)) = C^b(X, M(A)_\beta)$.

例えば $M(C_0(X, C(H))) = C^b(X, B(H)_{s^*})$ である。

系 2. A が n-homogeneous C^*-代数の時、$M(A)$ は A の structure bundle ([4]参照) の有界連続な cross section の全体である。

一般に各 fibre が単位元をもっても、strict continuity は通常の連続性と一致せず一致するのは cross section $t \to 1_t$ ($A(t)$ の単位元) が連続になるような時である。

その他 multiplier の lifting の問題、テンソル積の multiplier など論じうるべき問題は沢山あるがここでは略すことにする。

§2. Derivation との関係.

C^*-代数 A の derivation δ は常に A の弱位相による閉包を拡大出来るからその一つとして A'' を拡大出来る。そして von Neumann 代数での derivation は inner になるから、ある $h_\delta \in A''$ が存在して

$$\delta(a) = h_\delta a - a h_\delta \qquad a \in A$$

となる。この時は単に $\delta(a) \in A$ が保証されるのみだが、h_δ が A の multiplier の時は、$h_\delta a$, $a h_\delta$ が共に A に属しているわけである。そこで次の様な疑問を考えてみる。

Q.1. A の derivation がすべて multiplier で与えられるようなときはいつか？

Q.2. 1つの derivation が multiplier で与えられるのはどんな時か？

Q.3. A, δ が与えられたとき、A の non-zero ideal I が存在して $\delta|I$ が multiplier で与えられるように出来ないか？

Q.3. が要求としては一番ささやかなものであるが一般には状況はもっとひどく次のようになっている。即ち

"A を UHF-代数としたとき、$C([0,1], A)$ の中にはどのような non-zero ideal に制限してもそこで multiplier では与えられない derivation δ_0 が存在する。" δ_0 のつくり方は少し厄

例であるが要するに[0,1]の~~[illegible]~~任意の開集合の上でh_{δ_0}をどんな調整しても連続にならないようなδ_0を探してくるのである。h_δの性質がある意味でよければ前論文のようなことは起らない。

その目安として簡単な計算より次のことがわかる。

Proposition 5. (i) h_δ^2 が又Aの derivation を与えれば、h_δは$\delta(A)$より生成されたAの ideal の multiplier である。

(ii) $\forall a \in A$, $h_\delta a$ が又Aの derivation をひき起せば、h_δはAの commutator ideal の multiplier である。

単位元をもつ単純なC^*-代数の derivation がすべて inner であることを証明した境氏は更に[4]において単位元をもたない場合をとり扱い、Aに対して次のようなC^*-代数$D(A)$ (derived algebra) の存在を証明した。

(i) $D(A)$はAを ideal として含む primitive C^*-代数

(ii) Aの derivation はすべて$D(A)$の元によりあたえられる。

(iii) $D(A)$は上2条件をみたす単位元をもつC^*-代数として一意にきまる。

しかし$M(A)$の定義とその性質 (idealizer) を考えれば上の$D(A)$が実は$M(A)$にほかならないことは容易にわかるであろう。

一般に$M(A)$はAが primitive な時は primitive なC^*-代数になる。以上から単純C^*-代数に関する境氏の derivation の

結果は次のようにまとめて言うことが出来る。

"単純C^*-代数はQ1の1つの答である。"

もともとproperなC^*-代数というのは単位元をもたないのが普通とも言えるであろうから以上から考えてもC^*-代数のderivationではinnerとouterという取り扱い方は発想としては強すぎるように感じられる。最近のElliott [1]の議論を見ていても、そこでouterとして出てきたderivationは殆んどmultiplierで与えられるものばかり(従って本質的にはouterではないとも言えるもの)である。

さてQ3について前にあげた例はNGCR-代数における現象であった。ではI型のC^*-代数についてはどうであろうか？

次の結果はこの部分についてはQ3が肯定的であること、及びQ1の解答を大体与えている。

定理 6. Aを連続なtraceをもつC^*-代数，$\hat{A}$をそのdualとする。もし$\hat{A}$がparacompactならばAのderivationはすべてmultiplierで与えられる。

証明. AはCCR代数であるから，$\hat{A}$はAのprimitive idealの空間と同一視できる。$t \in \hat{A}$について$A(t) = A/t$とおく。仮定から$\hat{A}$のlocally finiteなopen covering $\{G_\gamma\}$と，Aの元の集合$\{a_\gamma\}$が存在して$a_\gamma(t)$は$t \in G_\gamma$のとき$A(t)$のminimal projectionであるように出来る。$\delta(t)$をderivation

δ から $A(t)$ 上にひきおこされた derivation とする。各 $A(t)$ の性質から cross section $x_\gamma(t)$ を $M(A(t))$ の値をとり

$$\delta(a)(t) = \delta(t)(a(t)) = x_\gamma(t)a(t) - a(t)x_\gamma(t) \qquad a \in A$$

で且つ $\|x_\gamma(t)\| \leq \|\delta\|$ ととれる。又更に $t \in G_\gamma$ について $a_\gamma(t)x_\gamma(t)a_\gamma(t) = 0$ となるようにとっておく。$\{f_\gamma\}$ を $\{G_\gamma\}$ に対する 1 の分解とする。今 $t_0 \in G_\gamma \cap G_\beta$ とすると glim [ ] より $\exists U(t_0),\ v \in A$;

$$v^*(t)v(t) = a_\gamma(t), \quad v(t)v^*(t) = a_\beta(t) \qquad \forall t \in U(t_0).$$

従って

$$\begin{aligned} x_\gamma(t)a_\beta(t) &= \delta(v)(t)v^*(t) + v(t)x_\gamma(t)v^*(t) \\ &= \delta(v)(t)v^*(t) \end{aligned}$$

となって cross-section $t \longrightarrow x_\gamma(t)a_\beta(t)$ は t_0 で連続になる。$y_\gamma = f_\gamma x_\gamma$, $b_\beta = f_\beta \cdot a_\beta \in A$ とおけば以上から

$$t \longrightarrow y_\gamma(t)\, b_\beta(t) \in A(t)$$

は ∞ で 0 になる連続な cross section となる。但し連続性をきめる族は A の元による cross section の全体を用いる。 $x = \sum_\gamma y_\beta$ とおけば x は $\{\hat{A}, M(A(t))\}$ での有界な cross-section で且つ δ をひきおこす。更に

$$I = \{a \in A\ ;\ xa \in A\}$$

とおけば I は閉イデアルで $b_\gamma\ (\forall \gamma)$ を含むことから A のどの primitive ideal にも含まれない。即ち $I = A$. Q.E.D.

Q.2. については次のことが証明出来る。

定理 7. δ を A の derivation. 今 $t\in\hat{A}\longrightarrow\|\delta(t)\|$ が連続ならば δ は multiplier で与えられる。

A が単純環の時は $\|\delta(t)\|=\|\delta\|$ で定数であるから、すべての derivation が上の仮定をみたしていることになる。このように上の結果は $\hat{A}$ が Hausdorff であるかないかを問題にしていない。証明は少し長いので概略をのべる。先ず

補題 7.1. $\mathfrak{M}$: von Neumann 代数, δ derivation.
今 x が δ を与え且つ任意の $\mathfrak{M}$ の central projection e について
$$\|xe\|=\frac{1}{2}\|\delta|\mathfrak{M}e\|$$
とすると $x\in\mathfrak{M}$ となる。

上の様な性質をもつ元が(δ が self-adjoint でなくとも)$\mathfrak{M}$ の中にとれる(一意) ことは最近 Halpern [2] によって証明されたが上のことはそのようなものは $\mathfrak{M}$ の外にはない、ということである。証明は[ ]による $\mathfrak{M}$ の中の元を x_0 とし $x=x_0+x_1$ $(x_1\in\mathfrak{M}')$ とかいて $x_1=0$ を示す。今 $x_1\neq0$ とすると
$$\exists\ \text{projection}\ f\in\mathfrak{M}'\ ;\quad fx_1^*x_1f\geqq\beta f\quad \beta>0$$
ととれ, vector を $\xi=f\xi$ とすると
$$\|x\xi\|^2=\|x_0\xi\|^2+2\mathrm{Re}(x_0\xi,x_1\xi)+\|x_1\xi\|^2$$
$$\geqq\|x_0\xi\|^2+2\mathrm{Re}(x_0\xi,x_1\xi)+\beta$$

となるから、$x_2 = f_2 x_1 f_2$ を partial isometry で近似することにより $\mathfrak{M}'$ の projection $g \leq f$ をとって

$$\exists\, \xi = g\xi \,;\ \|x\xi\|^2 > \|x_0 g\|^2$$

と出来るようになるわけである。g の central cover を e とすれば矛盾が出る。$x_2 = 0$ の時はより単純に e を f の central cover にとればよい。

補題 7.2. $A \subset B$, ρ を $\rho(A)$ が non-degenerate になるような B の表現とするとき $\rho(A)$ の弱閉包 $\overline{\rho(A)}$ が常に $\overline{\rho(B)}$ の ideal になっているならば A 自身が B の ideal である。

定理の証明の鍵になるのは次のことである。先ず atomic な表現を考えることにより A を $\hat{A}$ 上の有界な cross section のつくる代数と考える。fibre は既約表現 $t \in \hat{A}$ による H_t 上の C^*-代数 $A(t)$ — A の像 — である。$\{\hat{A}, B(H_t)\}$ での有界な cross section の代数 $\mathfrak{M}$ は von Neumann 代数であるから、$M(A)$ も $\mathfrak{M}$ の中で考えて差支えない。各 t について $x(t) \in B(H_t)$ を、$\delta(t)$ をひきおこし且つ

$$\|x(t)\| = \frac{1}{2}\|\delta(t)\|$$

となるようにとる。x は cross section として $\mathfrak{M}$ の元と考えられ A で δ をひきおこす。そこで今 B を A と x と $M(A)$ の

center から生成された C^*-代数とすると、ρ を B の表現で $\rho(A)$ が non-degenerate なものとすれば常に

$$\|\rho(x)\| = \frac{1}{2}\|\rho\circ\delta\|$$

が成立つ。 - - - - - - - - - - - - - - - - - - (*)

上のことが成立すれば、補題 7.1 より $\rho(x) \in \widetilde{\rho(A)}$ となり、結局 補題 7.2 より A が B の ideal となって、上の x が A の multiplier になることがわかる。ここで (*) を示すのに仮定の使い方であるが、$\varepsilon > 0$ について

$$f(t) = \min\left\{1, \frac{\varepsilon + \|\rho\circ\delta\|}{\|\delta(t)\|}\right\} \qquad t \in \hat{A}$$

とおく。(但し $\|\delta(t)\| = 0$ の時は第二項が ∞ 従って $f(t) = 1$ と考える)。$f(t)$ は $\hat{A}$ 上の連続関数であるから、Dauns - Hofmann の定理によって $M(A)$ の center の元と考えられる。そしてつくり方から $\rho(x) = \rho(fx)$ となることがわかり更に $t \in \hat{A}$ について

$$\|f\cdot x(t)\| = |f(t)|\,\|x(t)\| = \frac{1}{2}|f(t)|\,\|\delta(t)\|$$
$$\leq \frac{1}{2}(\|\rho\circ\delta\| + \varepsilon)$$

より $\varepsilon \to 0$ として $\|\rho(x)\| \leq \frac{1}{2}\|\rho\circ\delta\|$。よって $\|\rho(x)\| = \frac{1}{2}\|\rho\circ\delta\|$.

文献

1. G. A. Elliott; Some C^*-algebras with outer derivations, preprint.
2. H. Halpern; The norm of an inner derivation of an AW^*-algebra, preprint.
3. R. Kadison, E. C. Lance, J. R. Ringrose, Derivations and automorphisms of operator algebras II, J. Functional Analysis 1, 204-221 (1967)
4. S. Sakai; Derivations of simple C^*-algebras. II., Bull. Soc. Math. France 99, 259-263 (1971).
5. S. Sakai; Derivations of simple C^*-algebras III, to appear in Tôhoku Math. J.
6. G. K. Pedersen, Applications of weak $*$-semi-continuity in C^*-algebra theory, Duke Math. J. 39, 431-450 (1972).
7. J. G. Stampfli; The norm of a derivation, Pacific J. Math., ~~34~~ 33, 737-747 (1970)
8. J. Tomiyama; Topological representation of C^*-algebras, Tôhoku Math. J., 14, 187-204 (1962)
9. J. Tomiyama & M. Takesaki; Applications of fibre bundles to the certain class of C^*-alg-

ebras, Tôhoku Math. J. 13, 498-523 (1961).