数理解析研究所講究録
第177巻 1973年 125-129



# On some properties of Toeplitz operators

東北大 教養　吉野 崇

$L^p$, $p=2,\infty$ を、複素平面上の単位円周上の Lebesgue 可測函数の class とし、$H^p$ を、その部分空間で負の Fourier 係数が 0 であるような函数の全体とする。$L^\infty$ の函数 $\phi$ が inner とは、$\phi$ は $H^\infty$ の函数で $|\phi|=1$ a.e. なる時である。$\phi \in L^\infty$ に対して、$L_\phi$ は、$L_\phi f = \phi \cdot f$, $\forall f \in L^2$ で定義される $L^2$ 上の Laurent operator を、$T_\phi$ は、$P$ を $L^2$ から $H^2$ への orthogonal projection とするとき、$T_\phi = PL_\phi P$ で定義される $H^2$ 上の Toeplitz operator を表わすものとする。$T_\phi$ が analytic とは、$\phi \in H^\infty$ の場合である。

我々は、$L_\phi$ の不変部分空間及び $T_\phi$ の spectrum の性質を調べ、A. Brown ＆ R. G. Douglas, A. Brown ＆ P. R. Halmos, R. Goor, P. Hartman ＆ A. Wintner 等によって既に知られている結果が、系として整理されることを示す。

$T_\phi$ の性質を調べる上で、次の結果に負う所が多い。

定理 1 (A. Beurling [1]) $T_z$ の $\{0\}$ 以外の不変部分空間 $\mathfrak{M}$ は、

$\mathfrak{M} = T_q H^2$, $q$ は inner なる型で表わされる。

補助定理 1（A. Brown & P. R. Halmos [3]） $H^2$ 上の任意の有界線型作用素 A が、an analytic Toeplitz operator なるための必要十分条件は、A が $T_z$ と可換なることである。

補助定理 2　$T_z$ の不変部分空間は、凡て、hyper-invariant、即ち、$T_z$ と可換な凡ての有界線型作用素の不変部分空間である。

補助定理 2 により次の結果を得る。

定理 2　$T_\phi$ が non-analytic ならば、$H^2$ を含むような $L_\phi$ の不変部分空間は、$L^2$ それ自身しかない。

従って、

系 1（A. Brown & P. R. Halmos [3]）　$\phi \in L^\infty$ が non-constant ならば、$H^2$ を含む $L_\phi$ の reducing subspace は、$L^2$ それ自身しかない。

特に、$T_\phi$ が analytic ならば、$L_\phi$ は $T_\phi$ の normal extension だから、

系 2　$\phi \in H^\infty$ が non-constant ならば、$L_\phi$ は $T_\phi$ の minimal normal extension である。

又、$(I-P)L_\phi^*(I-P)$ を $L^2 \ominus H^2$ 上の Toeplitz operator とみなしてよいことに注意すれば、定理 2 によって

系 3　$T_\phi$ が non-analytic ならば、$H^2$ に含まれる $L_\phi$ の不変部分空間は、$\{0\}$ だけである。

系3の応用として次を得る。

<u>定理3</u>　$\|T_\phi\| \leqq 1$ なる $T_\phi$ に対して、$\{f \in H^2 : \|T_\phi^n f\| = \|f\|,\ n=0,1,2,\cdots\}$ $\neq \{0\}$ ならば、$\phi$ は inner である。

<u>系4　(R. Goor [4])</u>　$\phi \in L^\infty$ が non-constant で $\|T_\phi\| \leqq 1$ ならば、$T_\phi$ は completely non-unitary，即ち，unitary part を含まない。

<u>系5　(A. Brown & P. R. Halmos [3])</u>　$T_\phi$ が unitary ならば、$\phi$ は、絶対値1の constant である。

系4と系5とから、我々は、次の問題に到達する。

<u>問題</u>　凡ての non-normal Toeplitz operator は、completely non-normal か？　即ち，normal part を含まないか？

この問題の partial answer として次を得る。

<u>系6</u>　$\phi \in H^\infty$ が non-constant ならば、$T_\phi$ は completely non-normal である。

<u>系7</u>　$T_\phi$ が norm-achieved (i.e., $\exists f \in H^2,\ f \neq 0$ ; $\|T_\phi f\| = \|T_\phi\| \|f\|$) で、hyponormal (i.e., $T_\phi^* T_\phi \geqq T_\phi T_\phi^*$) ならば、$\phi$ は inner function の scalar 倍である。

系7の特別な場合として、

<u>系8　(A. Brown & P. R. Halmos [3])</u>　$T_\phi$ が isometric になるための必要十分条件は、$\phi$ が inner になることである。

次に、定理1によって、次の結果が得られる。

<u>定理4</u>　$\phi \in L^\infty$ が non-constant ならば、$\sigma_p(T_\phi) \cap \overline{\sigma_p(T_\phi^*)} = \emptyset$，ここ

で、$\sigma_p(T_\phi)$ は、$T_\phi$ の point spectrum を、$\overline{\sigma(T_\phi^*)}$ は、$\sigma(T_\phi^*)$ の complex conjugate を表わすものとする。

従って、

<u>系 9 (A. Brown & P. R. Halmos [3])</u> 0 と I 以外の idempotent Toeplitz operator はない。

<u>系 10 (A. Brown & R. G. Douglas [2])</u> $T_\phi$ が、non-zero で、partial isometric ならば、$\phi$ か又は $\bar{\phi}$ が inner である。

<u>系 11</u> $\phi \in L^\infty$ が non-constant で、$T_\phi$ が hyponormal ならば、$\sigma_p(T_\phi) = \emptyset$ である。

系 11 の特別な場合として、

<u>系 12 (P. Hartman & A. Wintner [5])</u> $\phi \in L^\infty$ が non-constant で $T_\phi$ が、self-adjoint ならば、$\sigma_p(T_\phi) = \emptyset$ である。

$H^2$ 上の an isometry $W$ が、$H^2$ 上の nearly normal operator $A$ (i.e., $A$ は $A^*A$ と可換) と可換ならば、$A = V|A|$ を $A$ の polar 分解とするとき、$W$ は、$V$ 及び $|A|$ と可換だから (see [7])、補助定理 1 と系 10 とから、次を得る。

<u>系 13 (T. Itô & T. K. Wong [6])</u> $T_\phi$ が、nearly normal で、analytic ならば、$\phi$ は、inner function の scalar 倍である。

# 文 献

[1] A. Beurling, On two problems concerning linear transformations in Hilbert space, Acta Math. 81 (1949), 239 - 255.

[2] A. Brown & R. G. Douglas, Partially isometric Toeplitz operators, Proc. A. M. S. 16 - 4 (1965), 681 - 682.

[3] A. Brown & P. R. Halmos, Algebraic properties of Toeplitz operators, J. Reine Angew. Math. 213 (1963), 89 - 102.

[4] R. Goor, On Toeplitz operators which are contractions, Proc. A. M. S. 34 - 1 (1972), 191 - 192.

[5] P. Hartman & A. Wintner, The spectra of Toeplitz's matrices, Amer. J. Math. 76 (1954), 867 - 882.

[6] T. Itô & T. K. Wong, *Subnormality and quasinormality of Toeplitz operators*, *Proc. A. M. S. 34 - 1 (1972), 157 - 164.*

[7] T. Yoshino, *On the commuting extensions of nearly normal operators*, *Tôhoku Math. J. (to appear).*