数理解析研究所講究録
第177巻 1973年 134-149

Hilbert space の unbounded vector について

九大 理　冨田 稔

§1. 超関数論と作用素環

数学では超関数をHilbert space上のgeneralized vectorとして取扱っているが，それにも拘らずHilbert空間のunbounded vectorの一般論を構成しようとする試みは余り見られないようである。しかしこの分野は将来の解析学の発展に重要な役割を果すと思われるいろいろな問題を含んでいる。そのいくつかを下に述べよう。

(a). 超関数論で良く知られている基本的な問題の一つとして，二つの超関数の間にgeneralized innerproductを定義する問題がある。また，このようなgeneralized innerproductが二種類以上導入されたとき，その間のcompatibilityが問題になる。一般に超関数はあるHilbert空間のsemiclosed vectorにまで拡張されるのでHilbert空間の問題としては如何にしてsemiclosed vectorの間にgeneralized innerproduct を導入するかという問題を研究しなければならない。

(b). (a)の問題と密接に関係しているがより困難な問題の一つとして二つの超関数の積を定義する問題，あるいは例えば $R^n \times R^n$ の超関数A，Bを generalized integral operator であると考えて積ABを定義する問題がある。 これはHilbert空間で sequilinear form を generalized operator であると考えてその間に積を定義する問題であると考えることが出来よう。

(c). 超関数を generalized vector として取扱うにはHilbert空間の作用素に対して位相的にどのような行動をとるかを調べねばならない。 その一つとして次の問題を考える。 いま $L^2(R^n)$ の上の連続作用素Aで，Aおよび A^* がともに $L^2(R^n)$ を Schwartz space $\mathcal{S}(R^n)$ の中にうつしているものとする。 このときには A，A^* はともに超関数の空間 $\mathcal{S}'(R^n)$ を $L^2(R^n)$ の中にうつしている。 このような作用素A全体は nuclear $*$-algebra $\mathfrak{A}$ を作る。 fをある超関数とし，$\mathfrak{B}$ を $\mathfrak{A}$ の $*$-subalgebra とする。 このとき $\mathfrak{B}$ から $L^2(R^n)$ への写像 $A \longrightarrow Af$ が定義されるがこの写像が $\mathfrak{B}$ の operator norm に関して closable であるとき f は $\mathfrak{B}$ 上で closable であるという。 もし $\mathfrak{B}$ が可換ならば f は

$\mathfrak{A}_0$上でclosableであるが $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}$ であればfはclosableでない。 $\mathfrak{A}_0$を含む最小のvon Neumann algebraを$M(\mathfrak{A}_0)$とする。 fがclosableになる為の必要十分条件は

$$\rho(A^*A) = (Af \mid Af)$$

をみたす$M(\mathfrak{A}_0)$のweight ρが存在することである。 この理由によってunbounded vectorのgeneralized innerproductを研究するのにweightの研究が役に立つ。

(d). Hilbert空間上のclosed operatorの積和として出来るoperatorはsemiclosed operatorになる。Semiclosed operatorに対してそのclosability，可換性，その他を研究することによってV. Neumann以来殆んど行われていないclosed operatorの基本的な性質の研究を精密化出来る可能性もある。

その他，Hilbert空間のunbounded vectorについては基本的なものがいろいろあると思われるが，それは今後の研究の中から取上げられるだろう。 このnoteでは特に(a)の問題を中心として取上げたい。

§2. Hilbert spaceのunbounded vector.

Hilbert spaceの入門書ではその初めの段階で必らず有

界でない linear operator の定義や性質を述べている。その考え方の延長として Hilbert space $\mathfrak{H}$ の上の必ずしも有界でない vector f を次のように定義するのは自然であろう。$\mathfrak{H}$ の linear subspace を domain とする conjugate linear functional f を $\mathfrak{H}$ の vector という。f の domain を $\mathfrak{D}(f)$ であらわす. $x \in \mathfrak{D}(f)$ に対して $(f|x)$ は f が x でとる値を，また $(x|f)$ は $(f|x)$ の complex conjugate をあらわす。α を scalar，A を $\mathfrak{H}$ の linear operator，f，g を $\mathfrak{H}$ の vector とする。αf，$f+g$ は通常の関数の scalar 積，和として定義され，$\mathfrak{H}$ の vector をあらわす。
また $\mathfrak{H}$ の vector $A^{\#}f$ を次式で定義する。

$$(A^{\#}f \mid x) = (f \mid Ax)$$

但し，$\mathfrak{D}(A^{\#}f) = A^{-1}\mathfrak{D}(f)$ である.

$\mathfrak{H}$ の linear subspace $\mathfrak{M}$ に $\mathfrak{H}$ の位相より強い locally convex topology が導入されているとき，$\mathfrak{M}$ を $\mathfrak{H}$ の topological linear subspace という。そのうちで特に良く扱われているのは Frechet subspace と LF subspace である。但し，LF space の定義としては弱い意味のものを採用することにする。

Lemma 2.1. Hilbert space $\mathfrak{H}$ の LF subspace に対して，その subspace を LF subspace にするような位

相は唯一通りしかない。もし $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ が $\mathfrak{H}$ の $\mathcal{LF}$ subspace で $\mathfrak{M} \supseteq \mathfrak{N}$ ならば $\mathfrak{N}$ の位相は $\mathfrak{M}$ から induce される位相より強い。

Lemma 2.2. $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \cdots\cdots$ を $\mathfrak{H}$ の subspace とする。もしこれらが $\mathfrak{H}$ の Frechet subspace ならば $\mathfrak{M}+\mathfrak{N}$, $\wedge_n \mathfrak{M}$ は Frechet subspace である。もしこれらが $\mathfrak{H}$ の $\mathcal{LF}$-subspace ならば $\mathfrak{M}\wedge\mathfrak{N}$, $\Sigma_n \mathfrak{M}_n$ は $\mathcal{LF}$-subspace である,

以上の Lemma の証明は非常に良く知られている. $\mathfrak{H}$ の linear operator A に対して, もし $\mathcal{D}(A)$ が $\mathfrak{H}$ の topological linear subspace で, A が $\mathcal{D}(A)$ 上で連続であれば $\mathcal{D}(A)$ を A の topological domain という。同様に $\mathfrak{H}$ の vector f に対して, もし $\mathcal{D}(f)$ が $\mathfrak{H}$ の topological linear subspace で f が $\mathcal{D}(f)$ 上で連続であれば $\mathcal{D}(f)$ を f の topological domain という. Frechet domain をもつ vector を Frechet vector, $\mathcal{LF}$ domain をもつ vector を $\mathcal{LF}$-vector という。$\mathfrak{H}$ の topological linear subspace $\mathfrak{M}$ に対して, $\mathfrak{M}$ を topological domain とする $\mathfrak{H}$ の vector 全体を $\mathfrak{M}^*$ であらわす。

Euclidean space R^n では R^n 上の超関数は nuclear $\mathcal{LF}$ domain $\mathcal{D}(R^n)$ をもつ $L^2(R^n)$ の vector である.

slowly increasing な超関数は nuclear Frechet domain $\mathcal{E}(R^n)$ をもつ $L^2(R^n)$ の vector である。 f が $\mathfrak{H}$ を Topological domain としてもつ vector ならば f は $\mathfrak{H}$ の要素であると考える。 従って $\mathfrak{H}^* = \mathfrak{H}$ である。

A を Hilbert space $\mathfrak{H}$ 上の bounded linear operator とし，A の range の閉包 $[R(A)]$ への $\mathfrak{H}$ の射影を E_A であらわす。 A^* を $[R(A)]$ 上に制限したものは injective であるからその inverse を A^0 であらわし A の Polar operator という。 A，B を $\mathfrak{H}$ の Hermitean operator $\geqq 0$ として新しい operator $A \vee B$，$A \wedge B$ を次のように導入する。

$$A \cup B = (A^2 + B^2)^{\frac{1}{2}} .$$

$A \wedge B$ を定義するには次の条件で定まる。

Hermtean operator $K, L \geqq 0$ を考える。

$$A^2 = (A \vee B) K^2 (A \vee B).$$

$$B^2 = (A \vee B) L^2 (A \vee B).$$

$$K^2 + L^2 = E_{A \vee B} .$$

このとき，$A \vee B$ は次のような operator $\geqq 0$ である。

$$A \wedge B = ((A \vee B) K^2 L^2 (A \vee B))^{\frac{1}{2}} .$$

定理 2.1. A を Hilbert space $\mathfrak{H}$ の bounded linear operator とすれば $R(A)$ は $\mathfrak{H}$ の Hilbert subspace で次の条件をみたす norm $\|x\|_A$ をもつ.

$$\|Ax\|_A = \|E_{A^*}x\|.$$

逆に $\mathfrak{M}$ が $\mathfrak{H}$ の Hilbert subspace で $\| \ \|_1$ が $\mathfrak{M}$ の Hilbert norm であれば $\|x\|_1 = \|x\|_A$ をみたす Positive Hermitean operator A が唯一に定まる。

定理 2.2. $\mathfrak{H}$ の Hilbert subspace を $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, それらの Hilbert norm を定める Positive Hermitean operator を A, B とする。 $\mathfrak{M}+\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}\wedge\mathfrak{N}$ は Hilbert subspace である。 $A\vee B$ は $\mathfrak{M}+\mathfrak{N}$ の Hilbert norm を $A\wedge B$ は $\mathfrak{M}\wedge\mathfrak{N}$ の Hilbert norm を定め，更に次の式をみたす。

$$\|x\|_{A\vee B} = \inf_{x=y+z} (\|y\|_A^2 + \|z\|_B^2)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\|x\|_{A\wedge B} = (\|x\|_A^2 + \|x\|_B^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Hilbert domain をもつ $\mathfrak{H}$ の linear operator を semiclosed operator，また Hilbert domain をもつ $\mathfrak{H}$ の vector を semiclosed vector という。

定理 2.3. Hilbert space $\mathfrak{H}$ の linear operator A に対して次の4条件は同等である。

(a). A は Hilbert domain をもつ。

(b). A は $\mathfrak{H}$ のある Hilbert subspace $\mathfrak{D}(A)$ から他の Hilbert subspace R(A) への homomorphism である。

(c). A の graph G(A) は $\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}$ の Hilbert subspace である。

(d). Aはいくつかの closed operatorの積である。

定理 2.4. Hilbert 空間$\mathfrak{H}$の semiclosed operatorをA, Bとすれば A+B, AB は semiclosedである。さらにAが injective ならば A^{-1} も semiclosed である。

定理 2.5. $\mathfrak{H}$の semiclosed operator A の domain が$\mathfrak{H}$であればAは$\mathfrak{H}$の bounded linear operator である。

定理 2.6. Hilbert space $\mathfrak{H}$ の semiclosed operator をA, その domain の一つの norm を定義する positive Hermitean operator をBとすればAは次のようにあらわすことができる。

$$A = CB^{\circ} .$$

Cは $C = CE_A$ をみたす bounded linear operator として唯一通りに定まる。

定理 2.7. f, g を semiclosed vector, α を scalar, Aを semiclosed operator とすれば αf, f+g, $A^{\#}f$ は semiclosed vector である。

定理 2.8. $\mathfrak{H}$の semiclosed vector f の domainが$\mathfrak{H}$であれば, fは$\mathfrak{H}$に属する。

定理 2.9. fを$\mathfrak{H}$の semiclosed vector, Bをfの domain のある Hilbert norm を定義する positive Hermitean operator とすれば, fは次のようにあらわさ

れる。

$$f = B^{\#}x .$$

x は $x = E_A x$ をみたす $\mathfrak{H}$ の要素として唯一通りに定まる。

§3. Hilbert subspace の同値関係。

$\mathfrak{H}$ の Hilbert subspace 全体を $H(\mathfrak{H})$ とすれば $H(\mathfrak{H})$ は modular lattice である。$H(\mathfrak{H})$ の要素 $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ に対して，もし，$\mathfrak{M} \wedge \mathfrak{N}$ が $\mathfrak{M}$ で稠密であれば $\mathfrak{M} \precsim \mathfrak{N}$，あるいは $\mathfrak{N} \succsim \mathfrak{M}$ であるという。$\mathfrak{M} \precsim \mathfrak{N}$ かつ $\mathfrak{N} \precsim \mathfrak{M}$ であるとき $\mathfrak{M}$ と $\mathfrak{N}$ は同値であるといい $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$ であらわす。残念ながら上の定義による同値は $H(\mathfrak{H})$ の中では通常の意味の同値関係とはならないので $H(\mathfrak{H})$ の適当な sublattice をとってその中での同値関係を議論することが必要となって来る。

Lemma 3.1. $\mathfrak{H}$ の Hilbert subspace を $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}_i$, $\mathfrak{N}_i$ $(i = 1, 2)$ などとする。

(a). $\mathfrak{M} \succsim \mathfrak{N}$ である為の必要十分条件は $\mathfrak{M}$ が $\mathfrak{M} + \mathfrak{N}$ で稠密になることである。

(b). $\mathfrak{M} \supseteq \mathfrak{N} \supseteq \mathfrak{L}$ で $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{L}$ ならば $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$。しかし，$\mathfrak{N} \sim \mathfrak{L}$ は一般には成立しない。

(c). $\mathfrak{M} \supseteq \mathfrak{N} \supseteq \mathfrak{L}$ で $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$ かつ $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{L}$ ならば $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{L}$.

(d). $\mathfrak{M}_1 \succsim \mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{N}_1 \succsim \mathfrak{N}_2$ ならば

$$\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{N}_1 \succsim \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{N}_2 .$$

しかし $\mathfrak{M}_1 \wedge \mathfrak{N}_1 \succsim \mathfrak{M}_2 \wedge \mathfrak{N}_2$ は必ずしも成立しない。

$\mathfrak{A}$を Hilbert space $\mathfrak{H}$ の von Neumann algebra とする。

$H(\mathfrak{A})$で$\mathfrak{A}$の要素の値域全体の system をあらわすことにする。

定理 3.1. Hilbert 空間の von Neumann algebra $\mathfrak{A}$ に対して, $H(\mathfrak{A})$ は $H(\mathfrak{H})$ の sublattice である。実際，いま，A を$\mathfrak{A}$の要素とすれば

$$R(A) = R((AA^*)^{\frac{1}{2}}).$$

従って，$H(\mathfrak{A})$ は$\mathfrak{A}$に属する positive Hermitean operator の値域全体の集合となり，定理 2.2 から直ちに定理 4.1 が出る。

定理 3.2. $\mathfrak{A}$が$\mathfrak{H}$上の finite type von Neumann algebra であれば $H(\mathfrak{A})$ の中で次の implication が成立する.

$$\mathfrak{M} \succsim \mathfrak{N},\ \mathfrak{N} \succsim \mathfrak{L} \Rightarrow \mathfrak{M} \succsim \mathfrak{N}.$$

$$\mathfrak{M}_1 \succsim \mathfrak{N}_1,\ \mathfrak{M}_2 \succsim \mathfrak{N}_2 \Rightarrow \mathfrak{M}_1 \wedge \mathfrak{M}_2 \succsim \mathfrak{N}_1 \wedge \mathfrak{N}_2 .$$

$$\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N},\ \mathfrak{N} \sim \mathfrak{L} \Rightarrow \mathfrak{M} \sim \mathfrak{L} .$$

定理 3.2 によって $\sim$ は $H(\mathfrak{A})$ の同値関係になっている。

次に$\mathfrak{H}$の semiclosed operator の間の equivalence 及び

$\mathfrak{H}$ の semiclosed vector の間の equivalence を次のように定義する.

$\mathfrak{H}$ の semiclosed operator A, B は $\mathcal{D}(A)\geq\mathcal{D}(B)$ で A と B が $\mathcal{D}(A)\cap\mathcal{D}(B)$ 上で一致するときに $A\geq B$ であるという。 また $A\geq B$ かつ $A\leq B$ であるとき $A\sim B$ であらわし，A と B は同値であるという。 同様にして，semiclosed vector f, g は $\mathcal{D}(f)\geq\mathcal{D}(g)$ で $\mathcal{D}(f)\cap\mathcal{D}(g)$ 上で f と g が一致するときに $f\geq g$ であるという。 また $f\geq g$ かつ $g\geq f$ であるとき $f\sim g$ であらわし，f と g は同値であるという。 f が g の拡張であれば $f\geq g$ であらわす。

$\mathfrak{A}$ を Hilbert space $\mathfrak{H}$ 上の von Neumann algebra とする。 semiclosed vector f はその domain が $H(\mathfrak{A})$ に属するとき $\mathfrak{A}$ を base とするという。 $\mathfrak{A}$ を base とする semiclosed vector 全体を $V(\mathfrak{A})$ であらわす。

定理 3.3. $\mathfrak{A}$ を finite type の von Neumann algebra とする。 f を densely defined な $V(\mathfrak{A})$ の要素とすれば，f に対して次の条件をみたす $\mathfrak{H}$ の vector $f_{\mathfrak{A}}$ が唯一つ定まる。

(a). $\mathcal{D}(f_{\mathfrak{A}})$ は $H(\mathfrak{A})$ の要素の union である。

(b). $f\geq g\in V(\mathfrak{A})$ ならば $f_{\mathfrak{A}}\geq g$.

(c). $\mathcal{D}(f_{\mathfrak{A}})\geq\mathfrak{M}\in H(\mathfrak{A})$ ならば f の $\mathfrak{M}$ への restriction

gはV$\mathfrak{A}$に属し$f \geq g$である。

定理3.3により，fとgがdensely definedなV($\mathfrak{A}$)の要素であれば$f \sim g$は$f_{\mathfrak{A}} = g_{\mathfrak{A}}$に同等であることがわかる。

$\mathfrak{A}$をfinite type von Neumann algebraとするとき，$\mathfrak{A}$を用いてdensely definedなV($\mathfrak{A}$)の要素の間のgeneralized innerproductを次のように定義することが出来る。f，gをdensely definedなV($\mathfrak{A}$)の要素とし，$\mathscr{D}(f) = R(A)$となるあるHermitean operator $A \geq 0$をとる。このとき，

$$(f|g)_{\mathfrak{A}} = (A^{\#}f\,|\,(A^{-1\#}g)_{\mathfrak{A}})。$$

$(f|g)_{\mathfrak{A}}$は$A^{\#}f$が$(A^{-1\#}g)_{\mathfrak{A}}$のdomainに含まれるとき，そのときに限って定義される。

定理 3.4。$\mathfrak{A}$を多のfinite type von Neumann algebraとすればgeneralized innerproduct $(f|g)_{\mathfrak{A}}$は次の性質をもつ．

(a). $(f|g)_{\mathfrak{A}} = \overline{(g|f)_{\mathfrak{A}}}$

(b). $(\alpha f|g)_{\mathfrak{A}} = \alpha(f|g)_{\mathfrak{A}}$,

(c). $(f+g|h)_{\mathfrak{A}} = (f|h)_{\mathfrak{A}} + (g|h)_{\mathfrak{A}}$.

d. $f_1 \sim f_2$，$g_1 \sim g_2$ならば

$$(f_1|g_1)_{\mathfrak{A}} = (f_2|g_2)_{\mathfrak{A}}.$$

e. 任意の$\mathfrak{A}$に属する($\mathfrak{A}'$と可換なdensely defined closed operator Xに対して，

$$(f\,|\,g)_{\mathfrak{A}} = (X^{*\#}f\,|\,X^{-1\#}g)_{\mathfrak{A}}.$$

定理3.3を可分なHilbert space $\mathfrak{H}$上の可換なvon Neumann algebra $\mathfrak{A}$の場合に適用するために，直線R上のある有限測度μを用いて$\mathfrak{A}$に対する$\mathfrak{H}$の直積分表現 $\mathfrak{H} = \int_{\oplus} \mathfrak{H}(\lambda)$を考える。 $\mathfrak{A}$はR上の有界μ-可測関数全体のalgebraに表現される。

定理 3.4. $\nabla(\mathfrak{A})$の要素fは$f(\lambda) \in \mathfrak{H}(\lambda)$となるR上の可測関数全体に一致する。 $\nabla(\mathfrak{A})$の要素f，gに対して$(f\,|\,g)_{\mathfrak{A}}$が定義されるのは$(f(\lambda)\,|\,g(\lambda))$がR上で積分可能な時に限る。 このとき，

$$(f\,|\,g)_{\mathfrak{A}} = \int (f(\lambda)\,|\,g(\lambda))\,d\mu(\lambda) .$$

定理3.4によって定理3.3で導入した$\mathfrak{H}$のgeneralized innerproduct $(f\,|\,g)_{\mathfrak{A}}$は極めて自然なinnerproductの概念の拡張であることが分る。 しかし，このinnerproductがfinite von Neumann algebraにだけしか適用されないことに問題がある。 この議論をより一般なvon Neumann algebraの場合に拡張するには，Section 1の(c)において提起した問題を取扱う必要がある。 しかし，この方向から問題を取扱うにはvon Neumann algebraのweightに対するRadon Nikodym theoremを議論しなければならず，かなりの準備を必要とするので省略すること

にする。

§4. 超関数の間の generalized innerproduct.

$\mathcal{D}(R^n)$ 及び $\mathcal{E}(R^n)$ は Hilbert space $L^2(R^n)$ の Topological linear subspace であり，良く知られているように $\mathcal{E}(R^n)$ はある可算個の $L^2(R^n)$ の Hilbert subspace の system Λ の intersection としてあらわされる。 同様に $\mathcal{D}(R^n)$ も非可算個の Hilbert space の system Λ_0 の intersection としてあらわされる。 これ等の空間の位相は Λ 及び Λ_0 によって定まる Hilbert norm の system によって導入される局所凸位相に一致している。 従って，$L^2(R^n)$ の超関数は常に適当な semiclosed vector に拡張される。 $\mathcal{E}(R^n)$ の位相を定める Λ に属する Hilbert subspace としては有限階の閉微分作用素の値域になっているもの，また，$\mathcal{D}(R^n)$ に対する Λ_0 に属する Hilbert subspace としては局所的に有限階であるような閉微分作用素をとることが出来る。 そこでいま，Λ を $L^2(R^n)$ の稠密な定義域をもつ閉作用素の system とし，Λ から generate される von Neumann algebra を $\mathfrak{A}$ とする。 $H(\mathfrak{A})$ 元にまで拡張出来るような超関数全体を $\mathcal{D}'(R^n, \Lambda)$ とすれば，もし $\mathfrak{A}$ が有限な von Neumann algebra であれば $\mathcal{D}'(R^n, \Lambda)$ の間に対しては矛盾のない generalized innerproduct を導入することが出来る。

例えば，$L^2(R^n)$においてR^nの運動，(平行移動と回転の組合せ)によって定義される unitary operator の群をGとすればGから生成される von Neumann algebra は有限型であり，従って$\mathcal{D}'(R^n, G)$にはGによって不変な generalized innerproduct が導入されることになる。 他方，$L^2(R^n)$上の unitary group G_1として$f(x) \longrightarrow f(x+a)$，及び$f(x) \longrightarrow e^{iax} f(x)$の両者から generate するものをとれば$G_1$から generate される von Neumann algebra $\mathfrak{A}$は$L^2(R^n)$上の total operator algebra と一致し，$\mathcal{D}(R^n) = \mathcal{D}(R^n, G_1)$である。 この場合は$H(\mathfrak{A}) = H(\mathfrak{F})$，$V(\mathfrak{A}) = V(\mathfrak{F})$となる。 しかし，$V(\mathfrak{F})$では equivalence $\sim$ を用いる semiclosed vector の拡張は一意にならないので$\mathcal{D}(R^n)$に対してG_1により不変な generalized innerproduct を入れるのは無理であると考えられる。 但し，前節で考えた generalized innerproduct は equivalence だけを用いて定義したものであるから，その位相的な意味づけには別の研究が必要であろう。 最後に，$\mathcal{E}(R^n)$に対して次の定理を述べておこう。

定理 4.1. $\mathcal{E}(R^n)$に対しては適当な可換な$L^2(R^n)$上

の von Neumann algebra $\mathfrak{A}$ があって，任意の $\mathcal{E}(R^n)'$ の要素 f は $\nabla(\mathfrak{A})$ の要素に拡大される． 従って定理 3.4 の適用によって $\mathfrak{A}$ を base とする generalized innerproduct を $\mathcal{E}(R^n)$ の中に導入することが出来る．

定理 4.1 の証明は Δ を R^n の Laplacian，$\|x\|$ で R^n の norm をあらわすものとし，微分作用素

$$K = (\|x\|^2 + 1)(\Delta + 1)(\|x\|^2 + 1)$$

を考える。 $\{K^{-n}\}$ は $\mathcal{E}(R^n)$ の topology を定義する $L^2(R^n)$ の Positive Hermitean operator の列である。 K によって generate される $L^2(R^n)$ の von Neumann algebra $\mathfrak{A}$ は可換であり，任意の $\mathcal{E}(R^n)'$ の要素は $\nabla(\mathfrak{A})$ の要素にまで拡大される。