数理解析研究所講究録
第177巻 1973年 163-172

On the topological reduction of von Neumann algebras

東北大 教養　武元英夫

§1. 序

本講演では講演者の結果[8]を主とし, continuous reduction theory の見地から可換な C^*-algebra の Gelfand 表現を von Neumann algebra へ拡張する事の今までの主な結果をまとめて話す.

von Neumann algebra $\mathfrak{A}$, その center を $\mathfrak{Z}$ とした時, reduction theory における direct integral, algebraic reduction においても見られる様に $\mathfrak{Z}$ の spectrum space Ω の各点に対応する fibre について考えられてきた。特に、$\mathfrak{A}$ を finite とした時 $\mathfrak{A}$ から $\mathfrak{Z}$ への center valued trace $\natural$ に対応して maximal ideal $\mathfrak{m}_\omega = \{a \in \mathfrak{A} ; (a^*a)^\natural(\omega) = 0\}$ が考えられ quotient algebra $\mathfrak{A}(\omega) = \mathfrak{A}/\mathfrak{m}_\omega$ が finite factor になることは境[5]によって示されている。境の証明で次の様な後で多いに使われる議論が展開されている。即ち、$\Phi_a(x) = (ax)^\natural$ とし、$V_{\mathfrak{A}}$ = norm closure of $\{\Phi_a : a \in \mathfrak{A}\}$ in $\mathcal{L}(\mathfrak{A}, \mathfrak{Z})$ とした時、$V_{\mathfrak{A}}$ の元は $\mathfrak{m}_\omega$ を保存し、$\Phi(\omega)(x(\omega)) = \Phi(x)(\omega)$ for $^\forall x \in \mathfrak{A}$, $\omega \in \Omega$ とした時 $\Phi(\omega) \in \mathfrak{A}(\omega)^*$ となる。更に、各 $\Phi \in V_{\mathfrak{A}}$ に対して、$\mathfrak{A}$ の unitary element u が存在して $\|\Phi(\omega)\| =$

$\Phi(u)(\omega)$ for $^\forall \omega \in \Omega$ となっている。これから函数 $\omega \to \|\Phi(\omega)\|$ は Ω 上の連続函数である。

講演者と富山氏[10]が境氏の結果を調べることによって continuous field の概念の下で finite von Neumann algebra の reduction theory を与えている。これと並んで、最近 S. Stratila と L. Zsido [6] の結果を見ることが出来た。これは我々の結果と一部は一致しているもので、semi-finite von Neumann algebra に対して議論を展開している。これらの結果は von Neumann algebra の predual space field を考えたものである。

[7]では AW^*-module を characterize することによって von Neumann algebra の reduction theory を $\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{A}'$ の関係を保ちながら展開している。そこで、講演は S. Stratila and L. Zsido の結果と講演者の結果を中心にして話を進めていくが前にも話をした部分があるので出来るだけ簡単に進めていく積りである。

§ 2. module predual space.

ここでは module predual の考えを基にして展開された von Neumann algebra の continuous reduction theory について話す。

von Neumann algebra $\mathfrak{A}$ の center $\mathfrak{Z}$ の von Neumann subalgebra $\mathcal{A}$ をもってきておく。Ω を $\mathcal{A}$ の spectrum space とする。その時、$\mathfrak{A}$ の様な polar decomposition, Jordan decomposition の話がある。

補題1. Φ を $\mathfrak{A}$ から $\mathcal{A}$ への σ-weakly continuous $\mathcal{A}$-moduled map. とする。その時、次の事が云える

$\exists |\Phi|$; positive σ-weakly continuous $\mathcal{A}$-module mapping

$\exists v \in \mathfrak{A}$; partial isometry

$\ni$

(1) $\Phi = R_v |\Phi|$, i.e. $\Phi(x) = |\Phi|(xv)$, $x \in \mathfrak{A}$; (2) $v^* v = \mathrm{supp}|\Phi|$

補題2. Φ を self-adjoint $\mathcal{A}$-module mapping で σ-weakly cont. とすると、$\exists e \in \mathfrak{A}$; projection such that $R_e \Phi \geqq 0$, $R_{(1-e)} \Phi \leqq 0$.

この節の残りでは $\mathfrak{A}$ を semi-finite とし $\mathcal{A} = \mathfrak{Z}$ として話を進める。すると $\mathfrak{A}$ で central support が 1 になる finite projection e が存在する。その e に対して次の notation を考える。

π ; $*$-isomorphism of $\mathfrak{Z}$ onto the center of $e\mathfrak{A}e$

$\natural$; $e\mathfrak{A}e$ 上の center valued trace.

Φ_0 ; $\Phi_0(x) = \pi^{-1}((exe)^\natural)$, $x \in \mathfrak{A}$.

$V_{\mathfrak{A}} \equiv$ closure of $\{ L_a R_b \Phi_0 \ ; \ a, b \in \mathfrak{A} \}$ in $\mathcal{L}(\mathfrak{A}, \mathfrak{Z})$

すると $V_{\mathfrak{A}}$ は $\mathcal{L}(\mathfrak{A}, \mathfrak{Z})$ における closed invariant subspace であることは定義から明らかである。各 $\omega \in \Omega$ に対して

$$\mathfrak{m}_\omega = \{ x \in \mathfrak{A} \ ; \ \Phi(x)(\omega) = 0, \text{ for every } \Phi \in V_{\mathfrak{A}} \}$$

すると $V_{\mathfrak{A}}$ が invariant subspace より $\mathfrak{m}_\omega$ が closed two-sided ideal となっている。$\mathfrak{A}(\omega) = \mathfrak{A}/\mathfrak{m}_\omega$, $\mathfrak{A} \ni x \to x(\omega) \in \mathfrak{A}(\omega)$;

canonical map. とする。$\mathfrak{m}_\omega$ の def. より $\Phi(\mathfrak{m}_\omega) = 0$ となる。そこで $\Phi(\omega)(x(\omega)) \equiv \Phi(x)(\omega)$ によって def. される $\Phi(\omega)$ は well-defined で $\mathfrak{A}(\omega)^*$ の元となる。今 $\lambda : V_{\mathfrak{A}} \ni \Phi \to \Phi(\omega) \in \mathfrak{A}(\omega)^*$, $\tilde{\lambda} : V_{\mathfrak{A}}/\ker\lambda \to \mathfrak{A}(\omega)^*$ とした時、前の研究会でも話をした様に、境氏と同じ方法で次の事が分る。

<u>補題3.</u> $\tilde{\lambda}$ は isometry である。即ち、$\lambda(V_{\mathfrak{A}})$ は closed となる。

上の事から $V_{\mathfrak{A}}(\omega) = \{\lambda(\Phi) ; \Phi \in V_{\mathfrak{A}}\}$ は $\mathfrak{A}(\omega)^*$ において closed invariant subspace となる。従って、$\widetilde{\mathfrak{A}(\omega)} = \mathfrak{A}(\omega)^{**}/V_{\mathfrak{A}}(\omega)^\circ$ は predual $V_{\mathfrak{A}}(\omega)$ をもつ von Neumann algebra になる。又 $\mathfrak{A}(\omega)$ が $\widetilde{\mathfrak{A}(\omega)}$ に canonical に embed されることは明らかである。しかし、一般に $\mathfrak{A}(\omega)$ は von Neumann algebra にならない [8], [9]。次の形の separation lemma を得る。

<u>補題4.</u> p, q : $\widetilde{\mathfrak{A}(\omega)}$ での σ-finite, orthogonal projections

$g \in \mathfrak{A}$: projection ∋ $p \le g(\omega)$, $q \le g(\omega)$

⇒ $\exists\, e, f \in \mathfrak{A}$; orthogonal proj. $e \le g$, $f \le g$ and $p \le e(\omega)$, $q \le f(\omega)$.

<u>補題5.</u> $p \in \widetilde{\mathfrak{A}(\omega)}$; σ-finite projection

⇒ $p\,\widetilde{\mathfrak{A}(\omega)}\,p = p\,\mathfrak{A}(\omega)\,p$

上の二つの補題を考えると次の事が分る。

補題 6. $\Phi(\omega)$ の $\widetilde{\mathfrak{A}(\omega)}$ における support は $e(\omega)$ で、$e(\omega)\mathfrak{A}(\omega)e(\omega)$ は finite factor となる。更に、$e(\omega)$ の $\widetilde{\mathfrak{A}(\omega)}$ における central support は 1 である。

以上より次の定理を得る。

定理。 $\mathfrak{A}$; semi-finite von Neumann algebra, $\mathfrak{Z}$; center of $\mathfrak{A}$.

Ω; spectrum space of $\mathfrak{Z}$.

$\Rightarrow$ $\forall \omega \in \Omega$ に対して、$\exists \widetilde{\mathfrak{A}(\omega)}$; semi-finite factor.

且 $\exists \pi_\omega : \mathfrak{A} \longmapsto \widetilde{\mathfrak{A}(\omega)}$ $*$-rep. $\ni$ $\pi_\omega(\mathfrak{A})$ は $\widetilde{\mathfrak{A}(\omega)}$ で σ-dense である。

§ 3. AW^*-module の characterization にともなう von Neumann algebra の continuous field.

AW^*-module が vector valued の continuous functions の集合であることと、AW^*-module 自身、Hilbert space の性質に似たものを多く持っている。更に、type I AW^*-algebra が faithful AW^*-module 上の bounded operators 全体の集合として表現される[4]ということから、我々は Hilbert spaces の continuous field を用いることによって AW^*-module を characterize し、von Neumann algebra の continuous reduction の話を進める。

<u>定義1.</u> Ω ; Stonean space, $\{H(\omega) ; \omega \in \Omega\}$; Hilbert spaces の field

$H \subset \prod H(\omega)$; subspace とする。ξ の時.

H が Hilbert spaces の continuous field であるとは, $\prod H(\omega)$ の subspace H_0 が次の性質を満す様に存在することである。

(1) $\xi \in H_0$ に対して, $\omega \to \|\xi(\omega)\|$ は連続である.

(2) $\{\xi(\omega) ; \xi \in H_0\}$ は $H(\omega)$ で dense である.

(3) $H = \{\xi \in \prod H(\omega) ; \forall \varepsilon > 0, \forall \omega_0 \in \Omega, \exists \xi_0 \in H_0, \exists U(\omega_0) ; \text{neighb.} \ \|\xi(\omega) - \xi_0(\omega)\| < \varepsilon, \ \forall \omega \in U(\omega_0)\}$

(4) $\xi \in \prod H(\omega) \ni \omega \to \|\xi(\omega)\|$ は bounded で, 各 $\eta \in H_0$ に対して $\omega \to (\xi(\omega) | \eta(\omega))$ は連続

⇒) $\xi \in H$ である。 ここで $H = \bigoplus_{\Omega} H(\omega)$ で記す.

上の定義は Stonean space 上でやっているが実は Compact Hausdorff space で定義される。しかし, ここでは Stonean space 上にだけ限定して話を進めるので上の形にした。上の定義の下で, $\forall \xi \in H$ に対して, $\omega \to \|\xi(\omega)\|$ は連続になり, $\|\xi\| = \sup\{\|\xi(\omega)\| ; \omega \in \Omega\}$ による norm $\|\cdot\|$ で H は Banach space となる。更に, H は $C(\Omega)$ 上の C^*-module になることも明らかである。

この Continuous field of Hilbert spaces, AW^*-module 上の bounded operator といったら, bounded linear operator ばかりでなく $C(\Omega)$-module であるものとしていく。

定義2。 $\mathbb{H} = C^{\oplus}_{\Omega} H(\omega)$; Continuous field of Hilbert spaces

$B(\mathbb{H})$; $\mathbb{H}$ 上の bounded operator 全体の algebra.

$A \in B(\mathbb{H})$ が decomposable であるとは $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $^\forall\omega \in \Omega$, $^\exists A(\omega) \in B(H(\omega))$;

$^\forall\xi, \eta \in H$, $^\forall\omega \in \Omega$ に対して. $((A\xi)(\omega) \mid \eta(\omega)) = (A(\omega)\xi(\omega) \mid \eta(\omega))$,

そこで、 $A = C^{\oplus}_{\Omega} A(\omega)$ とかく。

$A \in B(\mathbb{H})$ に対して $\|A(\omega)\| \leq \|A\|$ より $\{\|A(\omega)\|\}$ が bounded であって $\xi \in H$ に対して $A\xi \in \mathbb{H}$ である。逆に. $A = \prod A(\omega)$ で $\{\|A(\omega)\|\}$ が bounded 且各 $\xi \in H$ に対して $A\xi \in H$ ならば $A \in B(H)$ となる。以上より次の事が示される。

定理。 $\mathbb{H} = C^{\oplus}_{\Omega} H(\omega)$ を continuous field of Hilbert spaces over Ω とすると $C(\Omega)$ 上の AW^*-module M と $H \to M$ への onto map Π で次の性質を満すものが存在する。

(1) $\Pi(f\xi + g\eta) = f\,\Pi\xi + g\,\Pi\eta$, $\quad \xi, \eta \in H$, $f, g \in C(\Omega)$,

(2) $(\Pi\xi, \Pi\eta)(\omega) = (\xi(\omega) \mid \eta(\omega))$, $\quad \xi, \eta \in H$.

(3) $(\Pi\{A(\omega)\}\Pi^{-1}\xi, \eta)(\omega) = (A(\omega)(\Pi^{-1}\xi)(\omega) \mid (\Pi^{-1}\eta)(\omega))$, $\xi, \eta \in M$ 且 $A = C^{\oplus}_{\Omega} A(\omega) \in B(H)$.

逆に. M を $C(\Omega)$ 上の AW^*- module とし. $I_\omega = \{\xi \in M ; (\xi, \xi)(\omega) = 0\}$ に対して $H(\omega) = M - I_\omega$ とおくと. M によって導かれる inner product で $\mathbb{H}(\omega)$ は Hilbert space となり. $C^{\oplus}_{\Omega} H(\omega)$ と M は上の (1), (2), (3)

満す様な ☐ でもって isometric isomorphic となる。

bounded operator の分解を前に述べたが、次に von Neumann algebra の分解に話を進める。

<u>定義 3.</u> Ω : Stonean space, $\mathcal{H} = C_{\Omega}^{\oplus} \mathcal{H}(\omega)$; continuous field of Hilbert sp.
$\mathfrak{A}(\omega)$; C^*-subalgebra of $B(\mathcal{H}(\omega))$ for $^\forall \omega \in \Omega$
その時、$\mathfrak{A} \overset{\text{def}}{=} \{ A \in B(H) ;\ A(\omega) \in \mathfrak{A}(\omega) \text{ for } {}^\forall \omega,\ A = C_{\Omega}^{\oplus} A(\omega) \}$ とおき、
$\mathfrak{A} = C_{\Omega}^{\oplus} \mathfrak{A}(\omega)$ とかく。

その時、$\mathfrak{A} = C_{\Omega}^{\oplus} \mathfrak{A}(\omega)$ は $C(\Omega)$-module C^*-subalgebra of $B(\mathcal{H})$ である。
逆に $\mathfrak{A}$ を $C(\Omega)$-moduled C^*-subalgebra of $B(H)$ に対して $\mathfrak{A}(\omega) = \{ A(\omega) : A \in \mathfrak{A},\ A = C_{\Omega}^{\oplus} A(\omega) \}$ とおく。その時、$\mathfrak{A} = C_{\Omega}^{\oplus} \mathfrak{A}(\omega)$ を示すことが次の様な準備の下で示すことが出来る。

$A = C_{\Omega}^{\oplus} A(\omega)$ に対して、$\| A(\omega) \| = \sup \{ \| A(\omega) \xi(\omega) \| ;\ \xi \in \mathcal{H},\ \| \xi \| \leq 1 \}$ より、$\omega \to \| A(\omega) \|$ は lower semi-continuous であるが、次の事から連続になる。

<u>補題 7.</u> Ω ; Stonean space, $\mathcal{H} = C_{\Omega}^{\oplus} \mathcal{H}(\omega)$; continuous field of Hilbert sp.
$\mathcal{H}$ において $|\xi_0| = 1$ なる ξ_0 が存在すると仮定する。その時、
$\{ A \in B(H) :\ A(\omega) = 0 \text{ where } A = C_{\Omega}^{\oplus} A(\omega) \} = \text{norm closure of } \{ \sum z_i A_i ;\ A_i \in B(H),\ z_i \in M_{\omega} \cap$ [illegible] $\}$.

これは Glimm [2] によって考えられた closed ideal であって上の事から $\omega \to \|A(\omega)\|$ の連続性が分る。一般に $\mathfrak{A}(\omega)$ は von Neumann algebra ではない。そこで、前の事から次の結果を得る。

<u>定理</u>。 Ω ; Stonean space, $H = C_\Omega^\oplus H(\omega)$; faithful continuous field of Hilbert spaces, $\mathfrak{A}$: $C(\Omega)$-moduled C^*-subalgebra of $C(\Omega)$. $\mathfrak{A}(\omega) = \{A(\omega) \in B(H(\omega))\ ;\ A \in \mathfrak{A},\ A = C_\Omega^\oplus A(\omega)\}$, $\widetilde{\mathfrak{A}(\omega)}$ を $\mathfrak{A}(\omega)$ の $B(H(\omega))$ における weak closure とする

$\Rightarrow$ $\quad \mathfrak{A} = C_\Omega^\oplus \mathfrak{A}(\omega) = C_\Omega^\oplus \widetilde{\mathfrak{A}(\omega)}$ となる。

最後に、前の節で module predual について話をしたが、それを我々の continuous field について考えると次の様になる。 $H = C_\Omega^\oplus H(\omega)$ を Continuous field of Hilbert spaces, 今 $|\xi_0| = 1$ なる $\xi_0 \in H$ が存在するとする。 $E_0 \in B(H)$ を ξ_0 から導かれる abelian projection とし、 $\Phi_0(A) = E_0 A E_0$ とおき、 $V = $ norm closure of $\{\sum L_{a_i} R_{b_i} \Phi_0 \ :\ a_i \in B(H),\ b_i \in B(H)\}$ とおくと V は $B(H)$ から $C(\Omega)$ への σ-weakly Continuous $C(\Omega)$-module maps 全体の集合と一致する。

[1] J. Dixmier; Les C*-algebres et leurs representations, Gauthier-Villars, Paris, 1964.

[2] J. Glimm; A Stone-Weierstrass theorem for C*-algebras, Ann. of Math., 72(1960), 216-244,

[3] H. Halpern, Irreducible module homomorphisms of a von Neumann algebra into its center, Trans. Amer. Soc., 140(1969), 195-221.

[4] I. Kaplansky; Modules over operator algebras, Amer. Journ. Math., 75 (1953), 839-853.

[5] S. Sakai; The theory of W*-algebras, Yale University, Lecture Note, 1962.

[6] S. Stratila and L. Zsido; An algebraic reduction theory for W*-algebras, I, Journ. of Functnal Analysis, 11(1972), 295-313.

[7] H. Takemoto; On a characterization of AW*-modules and a representation of Gelfand type of Non commutative operator algebras, to appear.

[8] __________; On the homomorphism of von Neumann algebra, Tohoku Math. J., 21(1969), 152-157.

[9] __________; Complement to "On the homomorphism of von Neumann algebra", Tohoku Math. J., 22(1970), 210-211.

[10] H. Takemoto and J. Tomiyama; On the reduction of finite von Neumann algebras, to appear in Tohoku Math. J.