数理解析研究所講究録
第178巻 1973年 9-17

Balanced 2^m Fractional Factorial Design をめぐって

岡山理大　白倉 暉弘
広大 理　来田 正秀
広大 理　山本 純恭

§1. 序

Balanced array の概念は Chakravarti [1] によって partially balanced array として導入され，最近 2^m fractional factorial (f.f.) design の重要な subclass として注目されるようになった。それは orthogonal array を用いる design のように，母数の推定値が互に独立という性質はもたないまでも，推定値の分散行列が比較的簡単な構造をもつという点と，制約条件が弱いという点で，存在の可能性が広いという利点をもつからである。

Fractional factorial design には，その"よさ"を測る一つの尺度として分解能（resolution）がある。いわゆる主効果，2因子交互作用，3因子交互作用等が，どの程度分

解して推定することが可能かということである。たとえば、resolution Ⅴ の design とは、2因子交互作用までが互に交絡しない design のことである。

Balanced 2^m f.f. design をめぐる最近の研究は、Srivastava [2][3]、Srivastava, Chopra [4][5] 等がある。この研究をめぐる重要な問題を要約すると、

①, resolution Ⅲ, Ⅳ, Ⅴ の f.f. design について、design が balanced であることと（定義は省略するが、母数の推定値の分散行列がある種の単純な形であること）、処理組合せの作る array が strength 2, 3, 4 の balanced array であることの同等性が一般に成り立つか？

②, Balanced design の Information 行列 M, とくにその逆行列 M^{-1}（母数の推定値の分散行列）の固有値が一般的に求まるか？

③, Balanced design の存在条件と構成方法は？

等がある。

問題①については、一般に 2^m f.f. design が resolution $2l+1$ の balanced であるための必要十分条件は、design が strength $2l$ の balanced array であることが示された [6]。

問題②については、resolution Ⅴ (strength 4) の場合に

ついて Srivastava, Chopra [5] が解決した。白倉は，同様の方法により resolution VII (strength 6) の場合について求めた。最近，われわれは，これらの方法を改良し，リレーションシップ代数の構造分析を通じて，かなり直接的かつ一般性のある求め方を見出した。詳細は別途発表の予定である。

問題③は，この報告でとりあげるものである。Srivastava [3] は strength t, constraints $m=t+1$, $t+2$ の balanced array の存在するための一つの必要十分条件を構成的に与えている。われわれはこの結果を拡張して，strength t, constraints $m=t+3$ の balanced array の存在するための一つの必要十分条件を構成的に与える。

§2. Balanced array の定義

(0,1)-行列，$T(m\times n)$ の任意の t 個の行からなる sub-array $T_0(t\times n)$ において weight i ($i=0,1,\cdots,t$) のベクトルがいずれも T_0 の列に丁度 μ_i 回現われるとき，T は size n, strength t, constraints m, index set $(\mu_0,\mu_1,\ldots,\mu_t)$ の balanced array (B-array) という。あきらかに

$$n=\binom{t}{0}\mu_0+\binom{t}{1}\mu_1+\cdots+\binom{t}{t}\mu_t$$

である。

とくに $\mu_0=\mu_1=\cdots=\mu_t=\lambda$ のとき，Tは size n, strength t, constraints m, index λ の orthogonal array という。

[B-arrayの存在]

$\Omega(m,k)$ を weight k の $(0,1)$ベクトルを $\binom{m}{k}$個すべて並べてできる $m\times\binom{m}{k}$ 行列とする。$\Omega(m,k)$ をそれぞれ s_k 個 $(k=0,\ldots,m)$ 横に並べてできる $m\times\left\{\sum_{k=0}^{m}s_k\binom{m}{k}\right\}$ 行列をTとする。そのとき，Tは strength t, constraints m, index $\mu_i=\sum_{k=0}^{m}s_k\binom{m-t}{k-i}$ $(i=0,1,\ldots,t)$ のB-arrayとなる。

§3. strength t, constraints $m\leq t+3$ のB-arrayの存在するための必要十分条件とその構成法。

記号として，$\lambda(T)$ をTの列ベクトルでその要素がすべて1であるベクトルの個数。T_l $(l=1,2,3)$ を $(t+l)\times n$ の$(0,1)$-行列とする。$\nu^{(l)}(i_1,i_2,\ldots,i_k)$ を T_l の列ベクトルで $i_1,i_2,\ldots,i_k$ 番目は0，その他はすべて1であるベクトルの個数とする。

[定理1]　$d^{(1)}=\lambda(T_1)$ とする，そのとき T_1 が strength t, index set $(\mu_0,\ldots,\mu_t)$ のB-arrayであるための必要十分条件は，

(i). $d^{(1)}\geq 0$ なる整数

(ii) $\psi_{11} \le d^{(1)} \le \psi_{12}$

となることである。ただし，

$$\psi_{11} = \max_{1 \le 2r \le t+1} \Big(\sum_{q=0}^{2r-1} (-1)^{q+1} \mu_{t-(2r-1)+q} \Big)$$

$$\psi_{12} = \min_{1 \le 2r+1 \le t+1} \Big(\sum_{q=0}^{2r} (-1)^{q} \mu_{t-2r+q} \Big)。$$

構成方法として，

$$\nu^{(1)}(i_1, \ldots, i_k) = \sum_{q=0}^{k-1} (-1)^{q} \mu_{t-(k-1)+q} + (-1)^k d^{(1)}$$

とすればよい。

[定理2] $d^{(2)} = \lambda(T_2)$, $d_i^{(1)} = \lambda(T_{2i})$ とする，ただし T_{2i} は T_2 の i 行を除いてできる $(t+1) \times n$ 行列。そのとき T_2 が strength t, index set $(\mu_0, \ldots, \mu_t)$ の B-array であるための必要十分条件は；

(i) $d^{(2)}$, $d_i^{(1)} \ge 0$ なる整数，$i = 1, \ldots, t+2$

(ii) $\psi_{11} \le d_i^{(1)} \le \psi_{12}$

(iii) $\psi_{21} \le d^{(2)} \le \psi_{22}$

となることである。ただし，

$$\psi_{21} = \max_{1 \le 2r \le t+2} \Big\{ \sum_{q=0}^{2r-1} (-1)^{q} q \mu_{t-(2r-1)+q} + \max_{(i_1, \ldots, i_{2r}) \in \Omega_2} \Big(\sum_{\alpha=1}^{2r} d_{i_\alpha}^{(1)} \Big) \Big\}$$

$$\psi_{22} = \min_{1 \le 2r+1 \le t+2} \Big\{ \sum_{q=0}^{2r} (-1)^{q+1} q \mu_{t-2r+q} + \min_{(i_1, \ldots, i_{2r+1}) \in \Omega_2} \Big(\sum_{\alpha=1}^{2r+1} d_{i_\alpha}^{(1)} \Big) \Big\}$$

（ただし，$\Omega_2 = \{1, 2, \ldots, t+2\}$）。

構成方法として

$$\nu^{(2)}(i_1, \ldots, i_k) = \sum_{q=0}^{k-1} (-1)^{q+1} q \mu_{t-(k-1)+q} - (-1)^k \sum_{\alpha=1}^{k} d_{i_\alpha}^{(1)} + (-1)^k d^{(2)}$$

とすればよい。

[定理 3]　$d^{(3)}=\lambda(T_3)$, $d_i^{(2)}=\lambda(T_{3i})$, $d_{i,j}=\lambda(T_{3ij})$ とする，ただし，T_{3i} は T_3 の i 行を除いてできる $(t+2)\times n$ 行列，T_{3ij} は T_3 の i,j 行を除いてできる $(t+1)\times n$ 行列。そのとき T_3 が strength t, index set $(\mu_0,\dots,\mu_t)$ の B-array であるための必要十分条件は，

(i)　$d^{(3)}, d_i^{(2)}, d_{i,j} \geq 0$ なる整数，$i,j=1,\dots,t+3\,;\,i<j$

(ii)　$\psi_{11} \leq d_{i,j} \leq \psi_{12}$

(iii)　$\psi_{21}^{(i)} \leq d_i^{(2)} \leq \psi_{22}^{(i)}$

(iv)　$\psi_{31} \leq d^{(3)} \leq \psi_{32}$

となることである。ただし，

$$\psi_{21}^{(i)}=\max_{1\leq 2r\leq t+2}\left\{\sum_{q=0}^{2r-1}(-1)^q q\,\mu_{t-(2r-1)+q}+\max_{(j_1,\dots,j_{2r})\in\Omega_3}\left(\sum_{\substack{\alpha=1\\ i\neq j_\alpha}}^{2r} d_{i,j_\alpha}\right)\right\}$$

$$\psi_{22}^{(i)}=\min_{1\leq 2r+1\leq t+2}\left\{\sum_{q=0}^{2r}(-1)^{q+1} q\,\mu_{t-2r+q}+\min_{(j_1,\dots,j_{2r+1})\in\Omega_3}\left(\sum_{\substack{\alpha=1\\ i\neq j_\alpha}}^{2r+1} d_{i,j_\alpha}\right)\right\}$$

$$\psi_{31}=\max_{1\leq 2r\leq t+3}\left\{\sum_{q=0}^{2r-1}(-1)^{q+1}\binom{q}{2}\mu_{t-(2r-1)+q}+\max_{(i_1,\dots,i_{2r})\in\Omega_3}\left(\sum_{\alpha=1}^{2r} d_{i_\alpha}^{(2)}-\sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha<\beta}}^{2r} d_{i_\alpha,i_\beta}\right)\right\}$$

$$\psi_{32}=\min_{1\leq 2r+1\leq t+3}\left\{\sum_{q=0}^{2r}(-1)^{q}\binom{q}{2}\mu_{t-2r+q}+\min_{(i_1,\dots,i_{2r+1})\in\Omega_3}\left(\sum_{\alpha=1}^{2r+1} d_{i_\alpha}^{(2)}-\sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha<\beta}}^{2r+1} d_{i_\alpha,i_\beta}\right)\right\}$$

（ただし　$\Omega_3=\{1,2,\dots,t+3\}$）。

構成方法として，

$$\nu^{(3)}(i_1,\dots,i_k)=\sum_{q=0}^{k-1}(-1)^q\binom{q}{2}\mu_{t-(k-1)+q}+(-1)^k\sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha<\beta}}^{k} d_{i_\alpha,i_\beta}-(-1)^k\sum_{\alpha=1}^{k} d_{i_\alpha}^{(2)}+(-1)^k d^{(3)}$$

とすればよい。

[証明]　T_3 が B-array であるとすると，T_{3i}, T_{3ij} もそれぞれ $m=t+2$, $m=t+1$, の B-array であり，[定理 1, 2] より $d_{i,j}$, $d_i^{(2)}$ は (ii), (iii) を満さねばならぬ。よって T_3 が B-array である

ということは，(ii)，(iii)を満す非負整数 $d_{i,j}$, $d_i^{(2)}$ に対してつぎの条件を満す非負整数 $\nu^{(3)}(i_1,\dots,i_k)$ が存在することと同値である。

$$\nu^{(3)}(i_1)+d^{(3)}=d_{i_1}^{(2)}$$

$$\nu^{(3)}(i_1,i_2)+\nu^{(3)}(i_1)+\nu^{(3)}(i_2)+d^{(3)}=d_{i_1,i_2}$$

$$\nu^{(3)}(i_1,i_2,i_3)+\nu^{(3)}(i_1,i_2)+\nu^{(3)}(i_1,i_3)+\nu^{(3)}(i_2,i_3)+\nu^{(3)}(i_1)+\nu^{(3)}(i_2)+\nu^{(3)}(i_3)$$
$$+d^{(3)}=\mu_t$$

$4\leq k\leq t+3$ に対して，

$$\nu^{(3)}(i_1,i_2,i_3,i_4,\dots,i_k)+\nu^{(3)}(i_1,i_2,i_4,\dots,i_k)+\nu^{(3)}(i_1,i_3,i_4,\dots,i_k)$$
$$+\nu^{(3)}(i_2,i_3,i_4,\dots,i_k)+\nu^{(3)}(i_1,i_4,\dots,i_k)+\nu^{(3)}(i_2,i_4,\dots,i_k)$$
$$+\nu^{(3)}(i_3,i_4,\dots,i_k)+\nu^{(3)}(i_4,\dots,i_k)=\mu_{t-(k-3)}$$

上の式をとくと，

$$\nu^{(3)}(i_1,\dots,i_k)=\sum_{q=0}^{k-1}(-1)^q\binom{q}{2}\mu_{t-(k-1)+q}+(-1)^k\sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha<\beta}}^{k}d_{i_\alpha,i_\beta}-(-1)^k\sum_{\alpha=1}^{k}d_{i_\alpha}^{(2)}+(-1)^k d^{(3)},$$

$(1\leq k\leq t+3)$.

$\nu^{(3)}(i_1,\dots,i_k)\geq 0$ は (iv) と同値である。

［例］

$$\begin{bmatrix}1&1&1&0&0&1&1&0&0&0\\1&0&0&1&1&1&0&1&0&0\\0&1&0&1&1&0&1&0&1&0\\1&0&1&1&0&0&0&0&1&1\\0&1&1&0&1&0&0&1&0&1\end{bmatrix}$$

この行列は $t=2$, $m=5$, index set $(2,3,2)$ の B-array

である。この行列の列として，列ベクトル (0,…,0)′,(1,…,1)′ をつけ加えれば，index $\lambda=3$ の orthogonal array となる。

References

[1] Chakravarti, I. M. (1956). Fractional replication in asymmetrical factorial designs and partially balanced arrays. Sankhya 17 143~164

[2] Srivastava, J. N. (1970). Optimal balanced 2^m fractional factorial designs. S. N. Roy Memorial Volume. Univ. of North Carolina and Indian Statistical Institute 689~706

[3] Srivastava, J. N. (1972). Some general existence condition for balanced array of strength t and 2 symbols. Jour. Comb. Th., 13

[4] Srivastava, J. N. and Chopra, D. V. (1971). Optimal balanced 2^m fractional factorial designs $m \leq 6$. Technometrics, Vol 13 No 2 257~269

[5] Srivastava, J. N. and Chopra, D. V. (1971). On the characteristics roots of the information

matrix of 2^m balanced factorial designs of resolution V, with applications. Ann. Math. Statist. 42 722~734

[6] 栗田，白倉，山本． 2^m balanced fractional factorial design について．「実験計画法」に関するシンポジューム予稿集、 1973，1/11～12．広島大学において