数理解析研究所講究録
第178巻 1973年 47-52

Moore graphs について

東大 理 伊藤達郎
東大 理 坂内英一

有限 Moore graphs の分類がこの講演の目標であり、これについて以下のような解決を得たので報告します。

1° グラフ $\mathcal{G}$ が Moore graph of type (d, k) であるとは、次の条件 1)〜4) が成り立つことと定義する。

1) $\mathcal{G}$ は undirected graph (i.e., グラフの lines は方向を持たない。)

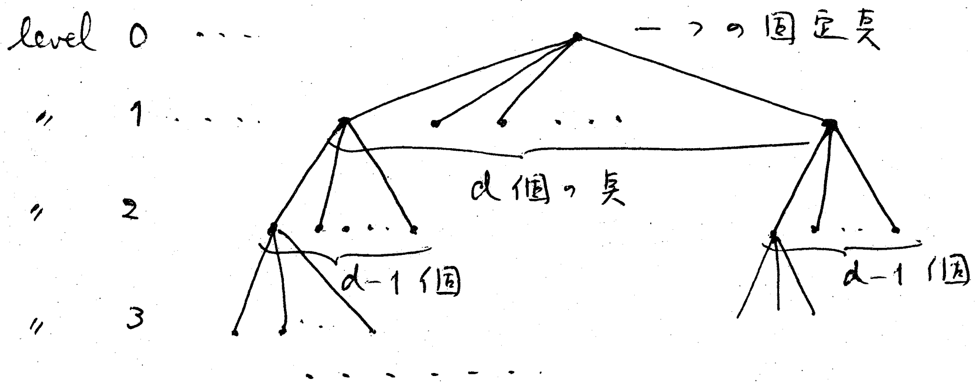
2) $\mathcal{G}$ は regular で valence (= degree) が d (i.e., 各点から出る lines の個数は一定 $= d$).

3) $\mathcal{G}$ の diameter は k (i.e., $\mathcal{G}$ の任意の2点は高々 k 本の lines を通じて結ぶことが出来、更に $\mathcal{G}$ の2点で $(k-1)$ 本以下の lines では結べないようなものが存在する。)

4) $\mathcal{G}$ は $1 + d\sum_{r=1}^{k}(d-1)^{r-1}$ $(= n(d,k) = n$ とおく$)$ 個の点を持つ。

注：$n(d, k)$ は 1), 2), 3) の条件をみたす点の個数としての可能な最大値である。

注：G が Moore graph であれば、G の点を任意に一つ固定した時、次のように表わされる。



（以下 level k まで同様

注：valence $d = 2$ の Moore graph は多角形であり、そのようなものは任意の diameter k に対して存在する。以下そのようなものを trivial な Moore graph と呼び、以下では non-trivial な Moore graph のみを考える。

2° 一般にどのような Moore graph が存在するかは未解決であったと思われる。

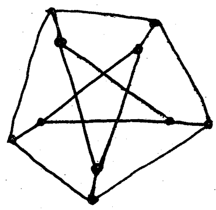
diameter k が 2 と 3 の場合については、A. J. Hoffman and R. R. Singleton: On Moore graphs with diameters 2 and 3, I.B.M. J. Res. Develop. 4 (1960), 497–504. により次の形でほぼ解決されている。

I　$k=2$ の場合.

1) $d>2$, $d \neq 3, 7, 57 \Rightarrow (d, 2)$型 Moore graph は存在しない.

2) $(3, 2)$型 Moore graph は一意的に存在する。

i.e.,



$(3, 2)$型 Moore graph
(Peterson graph)

3) $(7, 2)$型 Moore graph は一意的に存在する.

4) $(57, 2)$型 Moore graph に関しては, 存在, 一意性共に未定.

II. $k=3$ の時.

$d>2 \Longrightarrow (d, 3)$型 Moore graph は存在しない.

3° 我々の得た結果は次の通りである.

定理　$k \geqq 4$ の non-trivial (i.e., $d>2$) Moore graph は存在しない.

系　rank $k+1$, subdegree $1, d, d(d-1), \cdots d(d-1)^{k-1}$ なる ~~[illegible]~~ primitive permutation group (G, Ω) は, $k \geqq 4$ ならば, $|\Omega| = 2k+1$ 文字上に働く. 位

数 2(2k+1) の2面体群に限る．ここで 2k+1 は素数．

<u>定理の証明の概略</u>　基本的な idea は次の2論文（及び先に引用した Hoffman-Singleton の論文）による．

- W. Feit and G. Higman: The non-existence of certain generalized polygons, J. of Algebra 1 (1964), 114-131.
- D. G. Higman: Intersection matrices for finite permutation groups, J. of Algebra 6 (1967), 22-42.

更に次の事実が我々の証明の基礎になっている．

- グラフの incidence matrix A の固有値の間の共役性（$\mathbb{Q}$ 上の Galois 群の作用による）が固有値の（A における）multiplicity を保つことから，A の minimal polynomial の因数分解（$\mathbb{Z}[x]$ における）の様子がわかり，そのことが Moore graph の存在と矛盾するようになる．

<u>もう少し詳しく証明を steps を追って述べる</u>（以下 (d, k) 型 Moore graph の存在を仮定し，A をその incidence matrix とする．）

1) A の minimal polynomial は $(x-k)F_k(x)$ である．ここで $F_k(x)$ は $F_0(x)=1$, $F_1(x)=x+1$, $F_{i+1}(x)=xF_i(x)-(d-1)F_{i-1}(x)$ で inductive に定義される多項式である．

2) $d-1=s^2$, $s>0$, $x=2s\cos\varphi$ とおくと．

$$F_k(x) = \frac{s^k}{\sin\varphi}\left\{\sin(k+1)\varphi + \frac{1}{s}\sin k\varphi\right\}$$

3) $\theta_0 = d,\ \theta_1, \cdots, \theta_k$ （それらは全て実の単根）を A の固有値とすると、θ_i の multiplicity $m(\theta_i)$ は

$$\frac{m(\theta_i)}{n} = \frac{-2\sin\varphi_i \sin k\varphi_i}{\left(1 - \frac{2s}{1+s^2}\cos\varphi_i\right)\left\{(k+1)\cos(k+1)\varphi_i + \frac{k}{s}\cos k\varphi_i\right\}}$$

であらわされる。ただし $\theta_i = 2s\cos\varphi_i$, $n = n(d, k)$ とおく。（ここで Feit-Higman, Higman の idea を利用する。）

4) d, k 共に十分大の時

i) $m(\theta_1) < m(\theta_i)$ for $\forall i = 2, \cdots, k-1$

ii) $m(\theta_k) < m(\theta_i)$ for $\forall i = 2, \cdots, k-1$

iii) $-1 < \theta_1 + \theta_k < 0$

（このあたりの計算は極く初等的であるが、かなり複雑である。）

が得られる。従って $F_k(x)$ は $(x-\theta_1)(x-\theta_k)$ を $\mathbb{Z}[x]$ において因数として持たなければならないが、これは矛盾である。

5) d, k のいずれかが小さい時は、4) の方法を少し modify して矛盾が容易に導びき出される。

注： ここでの証明は、他の広いクラスの regular graphs（特に群が自己同型群として働らいている場合に有効）の

非存在の証明に使えます。今までは、このような証明の際には、固有値のmultiplicityが整数になるという事実しか利用していなかったことに比べると、ここでの方法は強力です。

注：なお(57, 2)型のMoore graphの存在だけは、依然未解決のままです。

<u>Remark.</u> 1) この原稿は1972年春の数学会年会(応用数学分科会 abstract)の原稿と全く同じです。

2) なお、全く同じ結果が、R. Damerell (University of London)によっても得られていることがわかりました。(両方の仕事は全く独立である。) 両方の証明は、incidence matrixの固有値とそのmultiplicityに注目する点では同じであるが、いくつかの点では異なる。時間があれば、Damerellの証明法にもふれる予定である。彼の論文はProc. Cambridge Phil. Soc.に、我々の論文はJ. Fac. of Sci. Univ. Tokyoに、いずれも近刊予定である。

3) なお、時間があれば、T. Itoによる(strongly regular graphs with maximal diameterの) ~~場合の~~ incidence matrixの固有値のmultiplicityの簡単な計算法、およびNoda-BannaiによるFisherの不等式(2r-designに対する)のintersection matrixのideaを用いた証明についても述べる。