数理解析研究所講究録
第178巻 1973年 53-58

Lattice graph の特徴づけ

東大 理　榎本彦衛

この講演では、有限でループがなく、向きのないグラフだけを考えることにします。グラフの頂点 x に対し、x と隣接する頂点の全体を $\Delta(x)$ と書き、2頂点 x, y の間に自然に定義される距離を $d(x, y)$ で表わすことにします。

まず、$I = \{1, 2, \cdots, t\}$ とおいて、次のようなグラフ T_r^t を考えます。

$$T_r^t = \{ J \subset I \mid |J| = r \},$$

$$J \in T_r^t \text{ に対して、} \Delta(J) = \{ K \in T_r^t \mid |J \cap K| = r-1 \}.$$

このグラフは局所構造だけで特徴づけられています。

定理1（Dowling [3]）. グラフ (Ω, Δ) が次の条件を満たすとする.

(1) すべての $x \in \Omega$ に対し、$|\Delta(x)| = r(t-r)$.

(2) $y \in \Delta(x)$ ならば、$|\Delta(x) \cap \Delta(y)| = t-2$.

(3) $d(x, y) = 2$ ならば、$|\Delta(x) \cap \Delta(y)| \leqq 4$.
この時、$t > 2r(r-1)+4$ ならば、(Ω, Δ) は T_r^t と同型になる.

この定理1を使うことにより、次の定理2が容易に証明できます。

定理2(Enomoto [4]). (G, Ω) は rank $r+1$ の原始置換群で、subdegrees が $\binom{r}{i}(t-r)^i$, $0 \leqq i \leqq r$, とする。この時、$r \geqq 6$, $t > 2r(r-1)+4$ ならば、長さ $r(t-r)$ の orbital を使って定義される Ω のグラフ構造は T_r^t と同型になり、G は $\mathrm{Aut}\, T_r^t = \Sigma_t$ (t 次対称群) の $2r$ 重可移部分群になる。

この講演では、r 次元 Lattice graph L_r^t の特徴づけについて考えることにします。このグラフは、

$I = \{1, 2, \cdots, t\}$,

$L_r^t = I \times \cdots \times I$ (r 個の直積),

$x = (x_1, \cdots, x_r) \in L_r^t$ に対し、$\Delta(x) = \{(y_1, \cdots, y_r) \in L_r^t \mid x_i = y_i$ となる i が $r-1$ 個$\}$,

として定義されます.

$r=2, 3, 4$ の時には次のような特徴づけが得られています。(Aigner [1], Dowling [2], Laskar [6, 7], Shrikhande [8])

定理3. グラフ (Ω, Δ) が次の条件を満たすとする.

(1) $|\Omega| = t^r$.

(2) すべての $x \in \Omega$ に対し, $|\Delta(x)| = r(t-1)$.

(3) $y \in \Delta(x)$ ならば, $|\Delta(x) \cap \Delta(y)| = t-2$.

(4) $d(x, y) = 2$ ならば, $|\Delta(x) \cap \Delta(y)| = 2$.

この時, t が大きければ, (Ω, Δ) は L_r^t と同型になる。($r=2$ の時は $t>4$, $r=3$ の時は $t>7$, $r=4$ の時には $t>11$).

一般に t が r に比べて十分大きければ, 定理3が成り立つはずだと思っていますが, 今の所証明できる見込みはありません。ここではもう少し条件を強くして, 任意の次元の lattice graph を特徴づけることにします.

定理4 (Enomoto [5]). グラフ (Ω, Δ) が次の条件を満たすとする。

(1) $|\Omega| = t^r$.

(2) すべての $x \in \Omega$ に対し、$|\Delta(x)| = r(t-1)$.

(3) $y \in \Delta(x)$ ならば、$|\Delta(x) \cap \Delta(y)| = t-2$.

(4) $d(x, y) = 2$ ならば、$|\Delta(x) \cap \Delta(y)| = 2$.

(5) $d(x, y) = 2$ ならば、$\Delta(x) \cap \Delta(y)$ の2頂点は隣接していない。

(6) 5角形が存在しない。

この時、$t > 2$ ならば、(Ω, Δ) は L_r^t と同型になる。

この定理を使うと、置換群に関する次の定理5が証明できます。

定理5 (Enomoto [5]). (G, Ω) は rank $r+1$ の原始置換群で、subdegrees が $\binom{r}{i}(t-1)^i$, $0 \leqq i \leqq r$, とする。この時、$t > 2$ ならば、長さ $r(t-1)$ の orbital を使って定義される Ω のグラフ構造は L_r^t と同型になり、G は Aut $L_r^t = \Sigma_t \int \Sigma_r$ (Σ_t と Σ_r の wreath 積) の部分群になる。

定理4において、条件(1)以外は局所構造に関する条件ですが、L_r^t というグラフは定理1のようにその局所構造だけで特徴づけることはできません。

例えば、Hを位数 t の有限群とし、$M_r(H)$ というグラフ

を次のように定義します。

$M_r(H) = H \times \cdots \times H/\sim$ （Hのr個の直積の、同値関係～による類別集合、ただし～は

$(a_1, \cdots, a_r) \sim (b_1, \cdots, b_r)$

$\Longleftrightarrow$ すべての i, j について $a_i^{-1}b_i = a_j^{-1}b_j$ が成り立つと定義します。）

つまり、$(a_1, \cdots, a_r)$ と $(a_1x, \cdots, a_rx)$ $(x \in H)$ とを同一視するわけです。$(a_1, \cdots, a_r)$ の属す class を $[a_1, \cdots, a_r]$ と書くことにします。次にグラフ構造を

$\Delta([a_1, \cdots, a_r]) = \{[b_1, \cdots, b_r] \in \Omega \mid a_i^{-1}b_i,$
$1 \leqq i \leqq r$ のうち、$r-1$ 個が一致する$\}$

により定義します。（つまり適当な代表元をとると、$r-1$ 個の座標が一致するとき、隣接しているわけです。）

このように定義すると、任意の頂点から半径 $[\frac{r}{2}]-1$ 以内のグラフ構造は L_r^t でも $M_r(H)$ でも同型になることがすぐわかります。

文　献

[1] Aigner: The uniqueness of the cubic lattice graph, J. Combinatorial Theory 6 (1969)

[2] Dowling: Note on "A characterization of cubic lattice graphs", J. Combinatorial Theory 5 (1968)

[3] Dowling, A characterization of the T_m graph, J. Combinatorial Theory 6(1969)

[4] Enomoto, Characterization of families of finite permutation groups by the subdegrees. I, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec IA 19 (1972)

[5] Enomoto, Characteization of families of finite permutation groups by the subdegrees. II, to appear

[6] Laskar, A characterization of cubic lattice graphs, J. Combinatorial Theory 3 (1967)

[7] Laskar, On 4-lattice graphs, Notices of AMS 19(1972)

[8] Shrikhande, The uniqueness of the L_2 association scheme, Ann. Math. Statist. 30 (1959)