数理解析研究所講究録
第178巻 1973年 91-98

有限射影空間とPSL(n,q)の特徴づけ

北大 理学部　都筑 俊郎

§1. 話をしようと思うこと。

Kをq個の元からなる有限体とし、 $SL_n(q)$でKの元を成分とする$(n\geqq 3)$ n次の行列で行列式が1のものの作る群を表わし、$PSL_n(q)$で$SL_n(q)$をその中心でわった群を表わす。

よく知られているように、

1) $PSL_n(q)$は非可換単純群であり、

2) $PSL_n(q)$はK上の$n-1$次元(有限)射影空間$\mathbb{P}_{n-1}(q)$に自然に作用し、$\mathbb{P}_{n-1}(q)$の(或いは$\mathbb{P}_{n-1}(q)$を適当なデザインと考えたときの)自己同型群は$PSL_n(q)$の solvable な拡大である。(このようなとき$PSL_n(q)$を一かりに一その essential part とよぶことにする。)

$PSL_n(q)$は Chevalley (or Lie typeの)群としてA-型の有限単純群とよばれるものであるが、有限単純群をすべて決定すること(いわゆる単純群の分類問題)、もっと一般に

群のある性質をあたえたとき，その性質を満足する群を具体的に構成・表現することは現在の有限群論における中心課題である。$PSL_n(q)$, $n \geqq 3$, をあたえるとそれから $\mathbb{P}_{n-1}(q)$ が構成され，$PSL_n(q)$ はその自己同型群(の essential part)として把握されるが，この過程で我々の興味をひくのは，

3) $PSL_n(q)$ のどのような性質が $\mathbb{P}_{n-1}(q)$ を構成するのに本質的であるか，

4) $PSL_n(q)$ のどのような性質が $\mathbb{P}_{n-1}(q)$ の自己同型群の essential part となるに本質的であるか，

という問題である。

一般に有限集合 Ω とその部分集合の family $\mathcal{L}$ をあたえて出来る incidence system を"有限幾何"とよぶことにする。（例えば上例の $\mathbb{P}_{n-1}(q)$）。有限幾何 Δ の incidence をたもつ 1：1 変換の全体のつくる群を Δ の自己同型群とよぶことにすると，上例 $PSL_n(q)$ の場合と同様に多くの重要な群は適当な有限幾何の自己同型群(の essential part)としてつかまえることが出来る。従って上にのべた問題は次のように一般化して考へられる。一つの群 G とそれに附随する有限幾何 Δ を考へるとき，

5) G のどのような性質が Δ の構成に本質的であるか？

6) Gのどのような性質が $\triangle$の自己同型群の essential part (を含む) となることに本質的であるか？

例えば "BN pair" をもつ群と "Building" に関する J. Tits の理論はこの方向で今までに得られている最大の結果であるが、その他に、個々の群について直接デザインに関係する形での問題が存在する。ここでは $PSL_n(q)$ とそれに附随する有限幾何について (i.e. デザインと直接関係する形) この方向で得られている結果と方法を紹介する。以下 言葉づかいは Dembowski "Finite Geometry" に従うものとする。

§2 問題をもう少し具体的に設定すれば。

$\mathbb{P}_{n-1}(q)$ からいくつかの incidence system を考へることが出来る。例えば、

1) $\Omega = \mathbb{P}_{n-1}(q)$ の点の全体, $\mathcal{L} = \mathbb{P}_{n-1}(q)$ の 1次元 subspace の全体。このとき $|\Omega| = q^n-1/q-1$, $|\mathcal{L}| = (q^n-1)(q^{n-1}-1)/(q-1)(q^2-1)$.

2) Ω = 上と同じ, $\mathcal{L} = \mathbb{P}_{n-1}(q)$ の $n-2$次元 subspace の全体 このとき $|\mathcal{L}| = (q^n-1)/q-1$.

3) Ω = 上と同じ, $\mathcal{L} = \mathbb{P}_{n-1}(q)$ の r次元 subspace の全体. ここで $2 \leqq r$, $|\mathcal{L}| = (q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q^{n-r}-1)/(q-1)(q^2-1)\cdots(q^{r+1}-1)$.

更に一般に
4) $\Omega = \mathbb{P}_{n-1}(q)$ の r次元 subspace の全体, $\mathcal{L} = \mathbb{P}_{n-1}(q)$ の s次元 subspace の全体 ここで $r<s$.

$PSL_n(q)$はこれらの incidence system の自己同型群(の subgroup)と考へられるが,

イ) いずれの場合にも Ω, $\mathcal{L}$ 上にきく transitive に作用する, が更に

ロ) 1)〜3) の場合は Ω 上に2重 transitive に作用し, 2)の場合には $\mathcal{L}$ 上に2重 transitive に作用している, といった性質をもっている。

さて有限群 G が $PSL_n(q)$ に一致する(又は essential part としてふくむ)ということを証明しようとするとき, 問題は次のように細分される。

問題(1). G を自己同型群としてもつようなうまい incidence system を構成出来るための条件は?

問題(2). 一般に(又は問題(1)でつくられた) incidence system $\Delta = (\Omega, \mathcal{L})$ が $\mathbb{P}_{n-1}(q)$ から得られる incidence system と一致するための条件は?

問題(3) $\mathbb{P}_{n-1}(q)$ の自己同型群 G が与えられたとき, それが $PSL_n(q)$ をふくむための条件は?

§3 知られている結果・予想など.

以下例えば 結果(2.*) とかくときは, §2の問題(2)に関係した結果といういみである。 まず 1961年 A.Wagner

によって propose された次の問題は有名である。([9])

問題 (3.1)　G が $\mathbb{P}_{n-1}(q)$ の点の全体の上に 2 重 transitive

$\Longrightarrow$　$G \supseteq PSL_n(q)$　?

これについては 1 つの反例を除いて成立つように予想されている。今までに得られている結果は,

結果 (3.1)　$3 \leqq n \leqq 9$

$\Longrightarrow$　$G \supseteq PSL_n(q)$, 又は

$n=4$, $q=2$, $G = A_7$

$3 \leqq n \leqq 5$ の場合は A. Wagner - Ostrom ([5])

$n = 6, 7$ は D. G. Higman (unpublished, [4] 参照)

$n = 8, 9$ は M. Kantor. ([4])

類似の問題として,

問題 (3.2)　G が $\mathbb{P}_{n-1}(q)$ の r 次元 $(r \geqq 1)$ subspace 全体の集合の上に transitive

$\Longrightarrow$　$G = $?

問題 (3.1) は問題 (2) の場合に自然に拡張される.

問題 (2.1)　$D = (\Omega, \mathcal{L})$ を projective design (パラメター: v, k, λ) とし, G を $\subseteq \mathrm{Aut}\, D$ で Ω 上に 2 重 transitive に作用している

$\Longrightarrow$　D, G の構造は如何?

結果 (2.1. M. Kantor [4])　D の parameter が $v = \frac{q^n-1}{q-1}$

$k = q^{n-1}-1/q-1$, $\lambda = q^{n-2}-1/q-1$ $\Longrightarrow$ $D = \mathbb{P}_{n-1}(q)$.

$\mathbb{P}_{n-2}(q)$ の subspace の列 $S_0, S_1, \cdots, S_{n-2}$ (S_i は i 次元 subspace) を nest とよぶが、

結果 (3.2 D G Higman [2]) G が $\mathbb{P}_{n-1}(q)$ の nest 全体の集合の上に transitive

$\Longrightarrow$ $(n, q) = (3, 2), (3, 8), (4, 2)$ の場合を除き

$$G \geq PSL_n(q)$$

デザイン $D = (\Omega, \mathcal{L})$ の直線 l (くわしくは 2点 $x, y \in \Omega$ を通る直線) を $l = \bigcap_{x,y \in B \in \mathcal{L}} B$ で定義すると

結果 (2.2 Dembowski-Wagner [1]) D のパラメーターを v, b, k, r, λ とするとき、次の条件は同値.

イ) $D = \mathbb{P}_{n-1}(q)$ の点と hyperplane のつくるデザイン

ロ) 任意の直線 l と任意の $B \in \mathcal{L}$ に対して $l \cap B \neq \phi$

ハ) 任意の直線 l に対して $|l| = b-\lambda/r-\lambda$

結果 (3.3 Perin [7]) G が $\mathbb{P}_{n-1}(q)$ の i-次元 ($2 \leq i \leq n-4$) subspace 全体の集合に transitive に作用, $(n, q) \neq (\text{even}, 2)$

$\Longrightarrow$ $G \geq PSL_n(q)$

結果 (1.1 N. Ito [3]) $G = (G, \Omega)$ は集合 Ω 上の 2重 transitive な置換群, $G \overset{\exists}{>} H$ such that $[G:H] = |\Omega|$ で $H \neq {}^{g}G_i$ $(= \{\sigma \in G \mid i^{\sigma} = i\})$ for ${}^{\forall} i \in \Omega$

$\Omega \supset {}^{\exists}B$ such that B は H の orbit (i.e. $B \ni i$ に対して $B = \{i^{\sigma} \mid \sigma \in H\}$) で H は B 上に faithful でない

$\Longrightarrow$ ${}^{\exists}n$, ${}^{\exists}q$ such that G は $\mathbb{P}_{n-1}(q)$ の自己同型群で, $G \geqq PSL_n(q)$

結果 (1.2 M. O'Nan [6]) $(G, \Omega) = 2$重 transitive な置換群, $\Omega \ni i$ に対して G_i は abelian normal subgroup A で $\Omega - \{i\}$ 上に semi-regular でないものをふくむ

$\Longrightarrow$ ${}^{\exists}n$, ${}^{\exists}q$ such that G は $\mathbb{P}_{n-1}(q)$ の自己同型群で, $G \geqq PSL_n(q)$

結果 (1.3 T. Tsuzuku [8]) $(G, \Omega) = 2$重 transitive な置換群, $|\Omega| = 1 + p + p^2$, p は素数, $|G| \equiv 0\ (p^3)$, $\not\equiv 0\ (p^4)$

$\Longrightarrow$ G は $\mathbb{P}_2(p)$ の自己同型群で, $G \geqq PSL_3(p)$,

か又は $G = A_7$.

結果 (1.4 T. Tsuzuku [8]) $(G, \Omega) = 2$重 transitive な置換群, $|\Omega| = 1 + q + \cdots + q^{n-1}$, $q =$ 素数 p の巾, $n \geqq 3$, G の Sylow p-subgroup を P, $PSL_n(q)$ の Sylow p-subgroup を $\widetilde{P}$ とすると $(P, \Omega) \cong (\widetilde{P}, \mathbb{P}_{n-1}(q))$

$\Longrightarrow$ G は $\mathbb{P}_{n-1}(q)$ の自己同型群で $G \geqq PSL_n(q)$

か又は $G = A_7$

以上のほかに勿論いくつかの結果は存在するが（たとえば，Gがデザインのautomorphismとして特別な元をふくむ，といった条件からの結果など），それらについては下記文献のほか，

Dembowski : Finite Geometry, Springer

をみられたい。

[1] Dembowski-Wagner, Arch. Math. 11 1960 (465-469)

[2] D. G. Higman, Ill. J. Math. 6, 1962 (434-446)

[3] N. Ito, Arch. Math. 18, 1967 (564-570)

[4] M. Kantor, Math. Zeit. 122, 1971 (61-62)

[4'] 〃, On 2-transitive collineation groups ... (to appear)

[4''] 〃, Line-transitive collineation groups ... (to appear)

[5] Ostrom-Wagner, Math. Z. 71, 1959 (186-199)

[6] M. O'Nan, Math. Z. 127, 1972 (301-314)

[7] Perin, Math. Z. 126, 1972 (135-142)

[8] Tsuzuku, J. Algebra. 8, 1968 (143-147)

[8'] 〃, (to appear)

[9] Wagner, Math. Z. 76, 1961 (411-426)