

## Automorphism group of a factor automaton

早大 理工 植村 憲治

Factor Automaton の automorphism group についての研究は Fleck [5], Bayer [6], Paul [7] によって行なわれており, Fleck は strongly connected automaton  $A = (S, \Sigma, M)$  について  $H$  が  $G(A)$  の normal subgroup である時,  $G(A)/H$  は  $G(A/H)$  の subgroup に isomorphic を示し, Bayer は  $H$  が normal でない一般の場合について論じた. 又 Paul は  $S$  上の 2 つの permutation group を定義する事によって  $G(A/H)$  と isomorphic な group をみつけている.

Fleck の結果より  $G/H$  と isomorphic な subgroup をふくむ任意の group  $L$  に対して  $G(A) = G$ ,  $G(A/H) \cong L$  となる automaton が存在するか, という問題が生じてくる.

ここではその必要条件を述べる.

次に基本的な事項を列挙する.

#  $S$ : set  $S$  の cardinality.

#A : automaton  $A = (S, \Sigma, M)$  の  $S$  の cardinality 即ち #S

$S_1 + S_2$  :  $S_1 \cup S_2$  の意味だが  $S_1 \cap S_2 = \phi$  が成り立っている。

定義1 automaton  $A$  とは  $A = (S, \Sigma, M)$  である。  $S$  は finite nonempty set of states,  $\Sigma$  は finite nonempty set of symbols,  $M$  は  $S \times \Sigma \rightarrow S$  の mapping である。

$\Sigma^*$  は  $\Sigma$  の element による finite sequence の全体と empty sequence  $\lambda$  による set を表す。

$M$  は  $S \times \Sigma^* \rightarrow S$  の mapping に次の様に拡張される。

$$M(s, \lambda) = s, \quad M(s, x\sigma) = M(M(s, x), \sigma) \quad x \in \Sigma^*, \sigma \in \Sigma$$

定義2 automaton  $A = (S, \Sigma, M)$  が "strongly connected" とは  $\forall s, \forall t \in S$  に對して  $\exists x \in \Sigma^*$  で  $t = M(s, x)$  が成り立つ時をいう。

定義3  $A = (S, \Sigma, M)$  を automaton とする。  $S$  上の permutation  $g$  が  $A$  の automorphism であるとは、 $M(s, x)g = M(sg, x)$  for any  $s \in S, x \in \Sigma$  が成り立つ時をいう。

定義4 set  $S$  上の permutation group  $G$  が "regular permutation group" であるとは、 $sg = s$  for some  $s \in S$  なる  $g$  は  $G$  の identity である permutation をいう。

automaton  $A$  の automorphism の全体は permutation の演算に関して  $S$  上の permutation group になっている事がある。

容易に示され、これを  $G(A)$  と書き、automaton  $A$  の automorphism group と呼ぶ。  $A$  が strongly connected の時  $G(A)$  は  $S$  上の regular permutation group になる事が容易に示される。

定義 5  $S$  上の permutation group  $G$  が与えられて  $\forall s, t \in S$  に対して  $\exists g \in G, s = tg$  が成り立つ時  $G$  は transitive という。

定義 6  $A = (S, \Sigma, M)$  を automaton とする。  $G(A)$  の subgroup  $H$  に対して  $S$  の partition  $S/H = \{s_1H, s_2H, \dots, s_mH\}$  を考える。この時  $S = s_1H + s_2H + \dots + s_mH$  になっている訳である。

$A/H = (S/H, \Sigma, \bar{M})$  なる automaton が次の様に定義される。

$$\bar{M}(s_iH, \sigma) \stackrel{\text{def}}{=} M(s_i, \sigma)H.$$

これは  $M(s_i, \sigma)H = M(s_iH, \sigma)$  である well-defined である。

この automaton  $A/H$  を  $A$  の  $H$  による factor automaton と呼ぶ。

$\Sigma^* - \{\lambda\}$  上に  $x \sim y \Leftrightarrow M(s, x) = M(s, y)$  for any  $s \in S$  の relation を定義するとこれは equivalence relation となる。

1)  $S$  上の mapping の semigroup を induce する。この semigroup を automaton  $A$  の characteristic semigroup と呼ぶ。

定義 7 group  $G$  と subgroup  $H$  が与えられた時,

$N(H) = \{ \alpha \mid \alpha^{-1} H \alpha = H \}$  は  $G$  の subgroup となり,  $H$  の normalizer と呼ぶ.  $H$  は  $N(H)$  の normal subgroup となる. 特に  $G$  を示す必要のある時には  $\sqrt{G}(H)$  と書く.

定義 8 group  $G$  と normal subgroup  $H$  が与えられた時  $\Gamma$  が  $G/H$  に isomorphic な group の時  $G$  は  $H$  の  $\Gamma$  による extension という.

定義 9 group  $K$  が  $H$  の  $K/H$  による extension であり, group  $G$  も  $H$  を  $G/H$  による extension と呼ぶ.  $K$  は  $H$  の  $K/H$  による  $G$  と  $H$  を  $G/H$  による extension と呼ぶ.

定理 1 任意の group  $G$  に対して  $G$  上の permutation group  $G_R$  と  $G_L$  が存在して,

i)  $G_R, G_L$  は  $G$  上 transitive regular,

ii)  $g_R h_L = h_L g_R \quad g_R \in G_R, h_L \in G_L$

iii)  $G_R \cong G \cong G_L$

iv)  $G_R$  の各 element と可換な  $G$  上の permutation の全体は  $G_L$ .

v)  $G_R \rightarrow G_L$  の isomorphism  $\varphi$  が存在して  $G_R$  の normal subgroup を  $H_R$  とすると  $H_L = \varphi(H_R)$  で,  $G$  の  $H_R$  による partition と  $H_L$  による partition は同じものになり,  $G_R/H_R, G_L/H_L$  は  $G/H_R$  上の regular permutation

group となり,  $g h = h g \quad \forall g \in G_R/H_R, \quad \forall h \in G_L/H_L$   
 である.

証明.  $g \in G$  に対して  $G_R, G_L$  の element  $g_R, g_L$  を次の様に定義する.

$$x g_R = x g$$

$$x g_L = g^{-1} x \quad x \in G.$$

すると  $g_R, g_L$  は  $G$  上の permutation となり,  $G_R, G_L$  は  $G$  上の permutation group となる.

i) 任意の  $g, h$  に対し  $g \cdot g^{-1} h = h$  であるから

$$g (g^{-1} h)_R = h \quad \text{となり } G_R \text{ は transitive,}$$

$x g_R = x$  for some  $x$  の時

$$x g = x \quad \Rightarrow g = e \quad \Rightarrow y g_R = y \quad \text{for any } y \in G$$

となり,  $G_R$  は regular である.

$G_L$  についても同様である.

$$\text{ii) } x g_R h_L = x g h_L = h^{-1} x g = h^{-1} x g_R = x h_L g_R$$

$$\Rightarrow g_R h_L = h_L g_R$$

$$\text{iii) } g \mapsto g_R, h \mapsto h_L \quad \text{II } G \rightarrow G_R, G \rightarrow G_L \text{ の isomorphism}$$

を与えてゐる事が容易にわかる.

iv)  $h$  が  $G$  上の permutation で  $G_R$  の element と可換で,

$$e h = g, \quad \text{とする.}$$

$$g h = e g_R h = e h g_R = g \cdot g \quad \text{となり, } e \text{ を } g_1 \text{ に}$$

動かして  $G_R$  と可換な permutation はただ一つしか存在しない事になり, それはすてに  $G_L$  の中にある。

v)  $\varphi: g_R \mapsto g_L$  を考えるとこれは iii) より  $G_R \rightarrow G_L$  の isomorphism であり,  $G$  の normal subgroup  $H$  に対して  $H_R, H_L$  を考えると

$$\varphi(H_R) = H_L \text{ である.}$$

$$\text{この時 } xH_R = xH = Hx = xH_L$$

よって  $H_R, H_L$  による  $G$  の partition は同じものになる。

$$g_R \in G_R \text{ は } (xH)g_R = xHg_R = xgRH \text{ より}$$

$G/H_R$  上の permutation を与え,

$$xHg_R = xH \text{ for any } x \Leftrightarrow g_R \in H_R \text{ より}$$

kernel は  $H_R$  となる, 即ち  $G_R/H_R$  は  $G/H_R$  上の permutation group (= isomorphic) となる。

$$\text{又 } xHg_R = xH \text{ for some } x \Leftrightarrow g \in H \text{ となり}$$

$$yHg_R = yH \text{ for any } y \text{ となって}$$

$G_R/H_R$  は regular permutation group になる。

$G_L/H_L$  も同様である。

$$g_R k_R k_L k'_L = k_L k'_L g_R k_R \quad g, k \in G, k, k' \in H$$

$$\text{よって } g_R H_R k_L H_L = k_L H_L g_R H_R \text{ となって}$$

$G_R/H_R$  と  $G_L/H_L$  は可換である。

Q.E.D.

補題定理 1  $S$  上の regular permutation group  $G$  が与え

られた時,  $G$  の subgroup  $H$  に対して  $N(H)/H$  は  $S/H$  上の regular permutation group (isomorphic) になる。

証明  $S/H = \{a_1H, a_2H, \dots, a_mH\}$  とする。

$S/H$  上に permutation を次の様に定義する。

$$g \in N(H) \text{ に対して } (a_iH) \cdot g = (a_i g)H.$$

$a_i g H = a_i H g$  より  $\cdot$  は well-defined であり,

$g$  が  $S$  上の permutation であり,  $g$  が  $S/H$  上の permutation になっている。

$$\text{次に } a_i H g = a_i H \text{ for any } a_i H \Leftrightarrow a_i g H = a_i H \text{ for any } a_i H$$

$$\Leftrightarrow \exists h_i, a_i h_i g = a_i \Leftrightarrow h_i g = \text{id} \text{ (} G \text{ が regular より)}$$

$\Leftrightarrow g \in H$ . したがって kernel は  $H$  となり,  $N(H)/H$  は  $S/H$  上の permutation group (isomorphic)

になる。

$$\exists a_i H g = a_i H \text{ for some } a_i H \Leftrightarrow a_i g H = a_i H$$

$$\Leftrightarrow g \in H \Leftrightarrow a_j H g = a_j H \text{ for any } a_j H \text{ となり}$$

$N(H)/H$  は regular になる。 Q.E.D.

補題定理 1 より,  $S$  上の regular permutation group  $G$  と subgroup  $H$  が与えられた時,  $N(H)/H$  は  $S/H$  上の regular permutation group と isomorphic になるが,

その  $S/H$  上の group は  $N(H)/H$  に depend しているのだから今後  
は  $N(H)/H$  以外のものが  $S/H$  上の regular permutation  
group と考へる。

Remark  $(\sigma \cdot H) \cdot N(H)/H = \sigma \cdot N(H)$  である。(両辺を  
 $S$  の subset とみて.)

定理 2 [6]  $A = (S, \Sigma, M)$  を strongly connected  
automaton,  $H$  を  $G(A)$  の任意の subgroup とする。

i)  $N(H)/H$  は  $G(A/H)$  の subgroup に isomorphic であり,

ii) 特に  $\#G(A) = \#S$  の時  $N(H)/H$  は  $G(A/H)$  と isomorphic  
になる。

証明は [6] を参照。

定理 2 において  $H$  が normal な場合が Fleck [5] の結果で  
ある。

group  $G, G \neq \{e\}$  と  $H$  が与えられた時に  $G(A) \cong G$ ,  
 $G(A/G(A)) \cong H$  となる automaton は単につくる事ができる。  
この拡張として次の問題が起きてくる。

$G, H, L$  が  $H \neq \{e\}$  は  $G$  の normal subgroup,  $L$  は  
 $G/H$  と isomorphic な subgroup を持つように与えられた  
時,  $G(A) \cong G$ ,  $H' \cong H$  として ( $H'$  は  $G(A)$  の subgroup)  
 $G(A/H') \cong L$  となる automaton  $A$  が存在するか。

一般には無理と思われる。次の定理 3 がその十分条件を与え



る。

定理 3  $K$  を normal subgroup  $H \neq \{e\}$  の  $K/H$  による  $G$  をふくむ extension とする。この時 automaton  $A$  が存在して  $G(A) = G_R$ ,  $G(A/H_R) = K_R/H_R$  である。

証明 automaton  $B = (K, K, M)$  を考える。  $K$  が states の set で  $\Sigma$  symbols の set になっている。

$$M(k_0, k) = k^{-1}k_0 \text{ によって定義する。}$$

この時  $K = G + Gk_2 + \dots + Gk_m$  という states の set の partition が存在する。

$B$  に symbol を 1 つふやした automaton  $A$  を考える。

$h \in H$  ( $h \neq e$ ) を 1 つとって

$$\begin{aligned} M(k, \tilde{h}) &= k \quad \text{if } k \in G \\ &= h^{-1}k \quad \text{if } k \in G. \end{aligned}$$

とする。  $h^{-1}G = G$  より  $h$  は  $K$  上の permutation になっている。

$$A = (K, K \cup \{\tilde{h}\}, M) \text{ とする。}$$

$B$  の characteristic semigroup は作り  $\bar{\alpha}$  より  $K_L$  であり、よって  $G(B) = K_R$  である。

作り  $\bar{\alpha}$  より  $G(A)$  は  $G(B)$  の subgroup であるから、

$e \cdot G(A) = G$  (states の subset とみて) をいえるが  $G(A) = G_R$  になる。

i)  $e \cdot g = h' k_i$  とする ( $g \in G(A)$ ,  $k_i \neq e$ ,  $h' \in G$ )

$$\begin{aligned} h' k_i &= e \cdot g = M(e, \tilde{h}) g = M(e \cdot g, \tilde{h}) = M(h' k_i, \tilde{h}) \\ &= h^{-1} h' k_i \neq h' k_i. \text{ よって } e \cdot G(A) \subset G. \end{aligned}$$

ii)  $g_R \in G_R$  とすると

$$\begin{aligned} M(k, \tilde{h}) g_R &= k g = M(k g, \tilde{h}) \quad \text{if } k \in G \\ &= k^{-1} k g = M(k g, \tilde{h}) \quad \text{if } k \in G \end{aligned}$$

よって  $g_R \in G(A)$  となり  $G_R \subset G(A)$  となり、

$G = e \cdot G_R \subset e \cdot G(A)$  である。

よって  $G(A) = G_R$  である。

次に  $A/H_R = (K/H_R, K \cup \{\tilde{h}\}, \bar{M})$ ,

$B/H_R = (K/H_R, K, \bar{M})$  を考える。

$k' \in K$  に対して

$$\bar{M}(k H_R, k') = M(k, k') H_R$$

$\tilde{h}$  に対して

$$\begin{aligned} \bar{M}(k H_R, \tilde{h}) &= H \quad \text{if } k H_R = H \\ &= k^{-1} k H_R = k^{-1} k H = k^{-1} H k \\ &= H k = k H \quad \text{if } k H_R \neq H. \end{aligned}$$

よって  $\bar{M}(k H_R, \tilde{h}) = k H_R$  となり、 $\tilde{h}$  の与える

transition は  $e \in K$  の与える transition と同じである。

$B/H_R$  は  $A/H_R$  の symbols から  $\tilde{h}$  を除いたもので、

transition には何の差いもないから、characteristic

semigroup は同じものになり, states の set は同じ事  
から automorphism group は等しくなる

$G(A/H_R) = G(B/H_R)$ .  $B$  は  $G(B) = K_R$  より Fleck の  
結果より  $G(B/H_R) = K_R/H_R$ .

よって  $G(A/H_R) = K_R/H_R$  Q.E.D.

定理 4  $A = (S, \Sigma, M)$  を strongly connected automaton と  
し,  $G(A) = G$ ,  $H$  は  $G$  の normal subgroup とする. この時  
 $G(A/G)$  は  $N(G/H)/G/H$  と isomorphic な subgroup  
をもつ. ただし  $N(G/H)$  は  $G(A/H)$  の中で考える.

証明  $A/G = (S/G, \Sigma, \bar{M})$

$A/H = (S/H, \Sigma, \bar{M})$  とする.

$g \in N(G/H)$  として  $\Delta G \cdot g \stackrel{\text{def}}{=} (\Delta H) \cdot (G/H)g$  とする  
 $(\Delta H) \cdot (G/H)g = (\Delta H) \cdot g(G/H) = \Delta' H \cdot (G/H) = \Delta' G$  である  
ゆえに well-defined.

$$\begin{aligned} \bar{M}(\Delta G g, x) &= \bar{M}((\Delta H)(G/H)g, x) = \bar{M}(\Delta H)G/H g, x) \\ &= \bar{M}(\Delta H, x)G/H g = M(\Delta, x)H \cdot G/H g = M(\Delta, x)Gg \\ &= \bar{M}(\Delta G, x)g \end{aligned}$$

又  $\Delta G g = \Delta G$  for any  $\Delta G \Leftrightarrow (\Delta H)(G/H)g = (\Delta H)(G/H)$   
 $\Leftrightarrow g \in G/H$ . よって  $N(G/H)/(G/H)$  は  $G(A/G)$  の  
subgroup (= isomorphic) である.

Q.E.D.

定理5 定理3で与えられた automaton  $A$  について

$$G(A/G_R) \cong N_{K/H_R} (G_R/H_R) / G_R/H_R \text{ である.}$$

証明.  $G(A/H_R) = K/H_R$  は  $G_R/H_R$  をふくむ

$(A/H_R) / G_R/H_R = (K/H_R) / G_R/H_R, K \cup \bar{K}, \bar{M}$  が定義でき,  $A/G_R = (K/G_R, K \cup \bar{K}, \bar{M})$  である.

$(A/H_R) / G_R/H_R$  の states も  $A/G_R$  の states も  $K$  上の partition を induce するが, Remark より

$(k/H_R) \cdot G_R/H_R = k \cdot G_R$  となり, 両者の partition は同じものになる.

$$\bar{M}((k/H_R) \cdot G_R/H_R; k') = \bar{M}(k/H_R, k') G_R/H_R = M(k, k') H_R \cdot G_R/H_R$$

$$\bar{M}(k \cdot G_R, k') = M(k, k') G_R \text{ となり}$$

$$(k/H_R) \cdot G_R/H_R \mapsto k \cdot G_R \text{ は } (A/H_R) / G_R/H_R \rightarrow A/G_R \text{ の}$$

isomorphism を与える.

$$\text{即ち } G(A/G_R) \cong G(A/H_R / G_R/H_R).$$

$$\# G(A/H_R) = \# A/H \text{ と定理2より}$$

$$G(A/H_R / G_R/H_R) = N_{K/H_R} (G_R/H_R) / G_R/H_R.$$

である.

$$\text{即ち } G(A/G_R) \cong N_{K/H_R} (G_R/H_R) / G_R/H_R.$$

Q. E. D.

これは定理3の  $A$  が条件を満しつゝ,  $G(A/G(A))$  が可能なかぎり一番小さい automaton に存在しうる事を意味する.

$H$  が  $G(A)$  で normal の条件をはずすとどうなるかはまだ全然分っていない。

系 6  $G$  が  $\Gamma$  と  $H$  の direct product である時,  $\Gamma$  と isomorphic な subgroup をもつ任意の group  $L$  に対して automaton  $A$  が存在して  $G(A) = \bar{G} \cong G$ ,  $G(A/\bar{\Gamma}) \cong L$  である。

$\bar{H}$  は  $\bar{G}$  の subgroup で  $H$  に対応するもの。

証明. 定理 3 の  $K$  として  $L \times H$  をとればよい。

定理 3 より得られる別の十分条件を示す前に群論の知識が必要である。以下は Schreier の定理と呼ばれるもので、詳しくは群論の本を参照していただきたい。

group  $G$  が  $H$  の  $\Gamma$  による extension とする。

$\Gamma \rightarrow G/H$  の isomorphism を 1 つ固定して

$\xi \mapsto r_\xi H$  とする  $r_\xi \in G$

$G = \bigcup_{\xi \in \Gamma} r_\xi H$  である。

$r_\xi H r_\eta H = r_{\xi\eta} H$  より

$$r_\xi \cdot r_\eta = r_{\xi\eta} c_{\xi,\eta} \quad c_{\xi,\eta} \in H \quad \dots (1)$$

が成り立つ。

$$\text{次に } r_\xi^{-1} a r_\xi = a^\xi \quad a \in H, \xi \in \Gamma \quad \dots (2)$$

で表わす。  $a^\xi$  は  $H$  の automorphism になっている。

$c_{\xi,\eta}$  ( $\xi, \eta \in \Gamma$ ) を transversal  $\{r_\xi\}$  に関する  $G$  の extension の factor system と呼ぶ。

$a \rightarrow a^\xi$  の automorphism は  $\{\Gamma_\xi\}$  に関する  $G$  の automorphism system と呼ばれる。

両者をあわせて  $\{C_{\xi, \eta}; a \rightarrow a^\xi\}$  は  $G$  の transversal  $\{\Gamma_\xi\}$  に関する parameter system と呼ばれる。

すると  $G$  の演算は

$$\Gamma_\xi a \Gamma_\eta b = \Gamma_\xi \Gamma_\eta a^\eta b = \Gamma_{\xi\eta} C_{\xi, \eta} a^\eta b \quad \dots (3)$$

$(C_{\xi, \eta} a^\eta b \in H)$

であらわされる。

さらに (1), (2) より  $(a^\xi)^\eta = (a^{\xi\eta})^{C_{\xi, \eta}} \quad \dots (4)$

が得られる。ここには  $x^y = y^{-1} x y$  ( $x, y \in H$ ) とする。

又 associative law より

$$C_{\xi, \eta} C_{\eta, \zeta} = C_{\xi\eta, \zeta} C_{\xi, \eta} \quad (\xi, \eta, \zeta \in \Gamma) \quad \dots (5)$$

が得られる。

よってすべての parameter system は (4), (5) の関係を満たしている。

逆に group  $H$  と  $\Gamma$  があって

i)  $\Gamma$  の elements の任意の pair  $(\xi, \eta)$  に対して

$C_{\xi, \eta}$  で表わされる  $H$  の element が一つ存在し

ii)  $H$  の automorphism  $a \rightarrow a^\xi$  が任意の  $\xi \in \Gamma$  に定義されて、

それらが (4), (5) の条件を満たす時、 $H$  の  $\Gamma$  による extension

group がつくられ,  $G$  の element を  $r_{\xi} a$  の形である  
 として演算は

$$r_{\xi} a r_{\eta} b = r_{\xi \eta} C_{\xi, \eta} a^{\eta} b \text{ となる.}$$

定義10  $G$  が  $H$  の  $\Gamma$  による extension  $\bar{c}$   $C_{\xi, \eta} = e$  for any  
 $\xi, \eta \in \Gamma$  が成り立つとき transversal  $\{r_{\xi}\}$  は  $G$  の  
 subgroup  $R$  となって  $G = RH, R \cap H = \{e\}$  である.

又逆にこの時  $R$  は transversal となって  $H$  の  $R$  による extension  
 $C_{\xi, \eta} = e$  であるとして  $G$  と isomorphic な group がつくられる.

$G = RH, R \cap H = \{e\}$   $H$  は  $G$  の normal subgroup が成り立つ  
 とき  $G$  は normal subgroup  $H$  と  $R$  の semidirect  
 Product となる.

補助定理2 group  $G$  が  $H$  の  $\Gamma$  による extension  $\bar{c}$   $L$  が  
 normal subgroup  $M$  と  $\Gamma$  の semidirect product となる時  $H$  の  
 $L$  による  $G$  と isomorphic な group を  $L$  による extension  $K$  が  
 存在する.

証明  $\Gamma \rightarrow G/H$  の isomorphism を固定し, その transversal  
 $\{r_{\xi}\}$  に関する parameter system を

$$\{C_{\xi, \eta}; h \rightarrow h^{\xi}\} \text{ とする.}$$

$$(h^{\xi})^{\eta} = (h^{\xi \eta}) C_{\xi, \eta},$$

$$C_{\xi, \eta} C_{\eta, \zeta} = C_{\xi \eta, \zeta} C_{\xi, \eta}^{\zeta} \text{ が成り立つ.}$$

$$\text{又 } (r_{\xi} h)(r_{\eta} h) = r_{\xi \eta} C_{\xi, \eta} h^{\eta} h \text{ である.}$$

$L$  の element は  $\xi a$   $a \in M$  の形である.

$H$  の  $L$  による extension を考えるために

parameter system を

$$\eta \rightarrow \eta^{\xi a} \quad \text{def} \quad \eta \rightarrow \eta^{\xi}$$

$$C'_{\xi a, \eta b} \stackrel{\text{def}}{=} C_{\xi, \eta} \quad \text{とする.}$$

あきらかに  $\eta \rightarrow \eta^{\xi a}$  は  $H$  の automorphism であり,

$$C'_{\xi a, \eta b} \in H \text{ である.}$$

これらが (4), (5) を満たす事をいってさらに  $G$  に isomorphic

な subgroup を示す事をいえばよい.

$$(\eta^{\xi a})^{\eta b} = (\eta^{\xi})^{\eta} = (\eta^{\xi \eta})^{C_{\xi, \eta}} = (\eta^{(\xi a)(\eta b)})^{C'_{\xi a, \eta b}}$$

$$C'_{\xi a, \eta b} \circ C'_{\eta b, \zeta c} = C_{\xi, \eta \zeta} \circ C_{\eta, \zeta} = C_{\xi \eta, \zeta} \circ C_{\xi, \eta}$$

$$= C'_{(\xi a)(\eta b), \zeta c} \circ C'_{\xi a, \eta b} \quad \text{である.}$$

よって (4), (5) が満たされた.

次に  $K$  の element は  $\Gamma_{\xi} a \eta$  とあらわされるから

$$G' = \{ \Gamma_{\xi} a \eta, \xi \in \Gamma, \eta \in H \} \quad \text{とする.}$$

$$(\Gamma_{\xi} a \eta) (\Gamma_{\eta} b) = \Gamma_{\xi \eta} a \quad C'_{\xi \eta, \eta} \eta^{\eta b} a$$

$$= \Gamma_{\xi \eta} a \quad C_{\xi, \eta} \eta^{\eta} a \quad \text{となり,}$$

$\Gamma_{\xi} a \eta \mapsto \Gamma_{\xi} a \eta$  は  $G \rightarrow G'$  の isomorphism と

与えられた事がある.

Q. E. D.



定理 7 group  $G$  と normal subgroup  $H$  に対する group  $L$  が normal subgroup  $M$  と  $G/H$  に isomorphic to subgroup の semidirect product になっている時, automaton  $A = (S, \Sigma, M)$  が存在して  $G(A) = \bar{G} \cong G$ ,  $G(A/H) \cong L$  である.  $\bar{H}$  は  $\bar{G}$  の中で  $H$  に対応する group である.

証明は補助定理 2 と定理 3 よりあきらかである。

### 文献

1. Weeg, G.P. "The structure of an automaton and its operation-preserving transformation group", J.ACM 9 p345 1962
2. Fleck, A.C. "Isomorphism groups of automata", J.ACM 9 p468 1962
3. Oehmke, R.H. "On the structure of an automaton and its input semigroup", J.ACM, 10 p521 1963
4. Barnes, B "Groups of automorphisms and sets of equivalence classes of input for automata", J.ACM, 12 p561 1965
5. Fleck, A.C, "On the automorphism group of automata", J.ACM, 12 p566 1965
6. Bayer, R "Automorphism groups and quotients of strongly connected automata and monadic algebras", IEEE Conf. Rec. 1966 7th Ann. Symp. on Switching and Automata Theory 1966
7. Paul, M. "On the automorphism group of a reduced automaton", IEEE Conf. Rec. 1966 7th Ann. Symp. on Switching and Automata Theory 1966
8. Bavel, Z, "Structure and transition preserving functions of finite automata" J.ACM, 15 p135 1968
9. Barnes, B "On the group of automorphisms of strongly connected automata" M.S.T. 4, p289 1970
10. 植村 "Regular permutation group と strongly connected automaton automorphism group について" 数理解析論究録 123 p68 1971
11. Burnside, W "Theory of groups of finite order" 2nd ed. Dover Publications Inc., New York 1955
12. Kochendörffer, R "Group Theory" McGraw-Hill London 1970